

Szilágyi Zsolt

Affin geometria

Presa Universitară Clujeană

Szilágyi Zsolt

•

Affin Geometria

Szilágyi Zsolt

Affin Geometria

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2023

Referenți științifici:

Conf. univ. dr. László Tamás

Asist. univ. dr. Lukács Andor

ISBN 978-606-37-1832-8

**© 2023 Autorul volumului. Toate drepturile rezervate.
Reproducerea integrală sau parțială a textului, prin orice
mijloace, fără acordul autorului, este interzisă și se pedepsește
conform legii.**

**Universitatea Babeș-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
<http://www.editura.ubbcluj.ro/>**

Tartalomjegyzék

Előszó	8
1. Csoporthatások	9
1.1. Kitérő: belső és külső műveletek	9
1.2. Bal oldali csoporthatás	10
1.2.1. Csoporthatások származtatása	14
1.2.1.1. Részcsoport hatása	14
1.2.1.2. Csoportmorfizmussal való származtatás	15
1.2.1.3. Leszűkítés invariáns részhalmazra	16
1.2.1.4. Hatás részhalmazok halmazán	17
1.2.1.5. Hatás szorzat halmazon	17
1.2.2. Bal oldali csoporthatások és (S_X, \circ) -be képező csoportmorfizmusok kapcsolata	18
1.3. Csoporthatással kapcsolatos fogalmak	21
1.3.1. Pálya	21
1.3.1.1. Csoporthatás által származtatott ekvivalenciareláció	23
1.3.2. Stabilizátor	23
1.3.3. Szabad csoporthatás	25
1.3.4. Transzitiv csoporthatás	27
1.3.5. Szabad és transzitiv csoporthatás	28
1.3.6. Húséges csoporthatás	29
1.4. Csoporthatások és számlálások	30
1.4.1. Véges test feletti invertálható mátrixok száma	33
1.4.2. Véges test feletti vektortér lineáris altereinek száma	35
2. Általános affin tér	38
2.1. Általános affin tér értelmezése	38
2.1.1. Vektortérhez rendelt affin tér értelmezése	41
2.1.2. Lineáris altér eltoltja, mint affin tér	42
2.1.3. Lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, mint affin tér	43
2.2. Affin tér érintőtere	44
2.3. Baricentrum és affin kombináció	48

3. Affin részterek	52
3.1. Algebrai kitérő: részstruktúrák az algebrában	52
3.1.1. Részcsoport	52
3.1.2. Lineáris altér	53
3.2. Affin résztér értelmezése	53
3.2.1. Affin részterek megnevezései	54
3.3. Affin részterek megadása	54
3.3.1. Iránytér lineáris alterei és az alaptér affin részterei közötti megfeleltetés	56
3.3.2. Véges affin tér adott ponton átmenő affin résztereinek száma	57
3.4. Affin résztér jellemzése vektorokkal	57
3.5. Lineáris varietások	60
3.5.1. Az \mathbb{R}^3 valós affin tér affin részterei (lineáris varietásai)	61
3.5.2. Affin részterek és az érintőtér lineáris varietásai	63
3.6. Affin résztér jellemzése affin kombinációval	64
3.7. Affin részterek bennfoglalása	65
3.8. Affin részterek egyenlősége	68
3.9. Véges affin tér affin résztereinek száma	70
3.10. Affin részterek metszete	71
3.11. Affin burkoló	74
3.11.1. Lineáris algebrai kitérő: halmaz által generált lineáris altér	74
3.11.2. Affin burkoló értelmezése	74
3.11.3. Affin burkoló jellemzése affin kombinációval	76
3.11.4. Affin burkoló irányterének jellemzése	77
3.11.5. n pont affin burka	77
3.11.6. Két affin résztér egyesítésének affin burka	78
3.12. Dimenzióra vonatkozó tételek	79
3.12.1. Lineáris algebrai kitérő	79
3.12.2. Affin részterek metszetének dimenziója	80
3.12.3. Affin burkoló dimenziója	80
3.13. Affin részterek párhuzamossága	82
3.13.1. Véges affin tér párhuzamos affin résztereinek száma	84
3.13.2. Affin részterek párhuzamosságával kapcsolatos tulajdonságok	85
3.14. Affin részterek jellemzése egyenesekkel	87
4. Koordináta-rendszerek affin térben	90
4.1. Descartes-féle koordináta-rendszer	90
4.1.1. Lineáris algebrai kitérő: bázis és koordináták	90
4.1.2. Descartes-féle koordináta-rendszer	91
4.1.3. Koordináta-rendszerek vektorterekhez rendelt affin terekben	92
4.2. Descartes-féle koordináta-transzformáció	93
4.2.1. Lineáris algebrai kitérő: báziscsere és koordináta-transzformáció	93
4.2.2. Descartes-féle koordináta-transzformáció	94
4.3. Affin koordináta-rendszerek	96
4.3.1. Affin generátorrendszer	96

4.3.1.1.	Lineáris algebrai kitérő: lineáris generátorrendszer	96
4.3.1.2.	Affin generátorrendszer	96
4.3.2.	Affin függőség és függetlenség	97
4.3.2.1.	Lineáris algebrai kitérő: a lineáris függetlenség egyenértékű meg- fogalmazásai	98
4.3.2.2.	Affin függőség és függetlenség	98
4.3.3.	Affin koordináta-rendszer	100
4.3.3.1.	Lineáris algebrai kitérő: bázis	100
4.3.3.2.	Affin koordináta-rendszer	100
4.3.4.	Affin koordináták és koordináta-transzformáció	103
4.4.	Affin és Descartes-féle koordináta-rendszerek közti kapcsolat	105
4.4.1.	Affin koordináta-rendszerből szerkesztett Descartes-féle koordináta- rendszer	105
4.4.2.	Descartes-féle koordináta-rendszerből szerkesztett affin koordináta- rendszer	106
5.	Affin részterek egyenletei	108
5.1.	Affin részterek paraméteres egyenlete	108
5.1.1.	Affin résztér paraméteres egyenlete	108
5.1.1.1.	Affin résztér affin koordináta-rendszerének megadása	109
5.1.1.2.	Affin független pontok által kifeszített résztér paraméteres egyenlete	110
5.2.	Affin résztér algebrai egyenlete(i)	112
5.2.1.	Hipersík algebrai egyenlete	115
5.2.2.	Egyenes algebrai egyenlete	117
5.2.3.	Affin részterek metszete, bennfoglalás, párhuzamossága	117
5.2.3.1.	Affin részterek metszete	117
5.3.	Egyenlet átírása másik koordináta-rendszerbe	122
5.3.1.	Hipersík algebrai egyenletének átírása	123
5.3.2.	Egyenes egyenletének átírása más koordináta-rendszerbe	124
6.	Affin függvények	126
6.1.	Affin függvények	126
6.1.1.	Lineáris algebrai kitérő: lineáris függvények	126
6.1.2.	Affin függvény értelmezése és affin függvény nyoma	127
6.1.2.1.	Affin függvény értelmezésének motivációja	127
6.1.2.2.	Affin függvény értelmezése és affin függvény nyoma	128
6.1.3.	Érintőterek között származtatott függvény	131
6.1.4.	Affin függvények jellemzése affin kombinációval	132
6.1.5.	Affin függvény megadása affin koordináta-rendszerrel	136
6.1.6.	Affin függvény megadása egy pont és egy lineáris függvény segítségével . .	137
6.2.	Affin függvények tulajdonságai	138
6.2.1.	Affin függvény összetétele affin	138
6.2.2.	Bijektív affin függvények	139
6.2.3.	Affin függvények affin kombinációja	140

6.2.4.	Affin részterek affín függvény általi képe	142
6.2.5.	Affin részterek affín függvény általi ősképe	142
6.2.6.	Affin függvény megőrzi a párhuzamosságot	143
6.3.	Affin függvények egyenlete	144
6.3.1.	Lineáris algebrai kitérő: lineáris függvény mátrixa	144
6.3.2.	Affin függvény egyenlete affín koordináta-rendszerben	144
6.3.3.	Affin függvény egyenlete Descartes-féle koordináta-rendszerben	146
6.3.4.	Kapcsolat az affín és Descartes-féle koordináta-rendszerben felírt egyenle- tek között	147
6.3.4.1.	Affin koordináta-rendszerbeli egyenlet átírása Descartes-féle koordináta- rendszerbeli egyenletté	147
6.3.4.2.	Descartes-féle koordináta-rendszerbeli egyenlet átírása affín koordináta- rendszerbeli egyenletté	148
6.3.4.3.	Affin koordináta-rendszerrel adott függvény egyenlete	150
6.3.5.	Affin részter képeinek egyenlete	152
6.3.6.	Affin részter ősképeinek egyenlete	155
6.4.	Affin endomorfizmusok és automorfizmusok	157
6.4.1.	Lineáris algebrai kitérő: lineáris endomorfizmusok és automorfizmusok	157
6.4.2.	Affin endomorfizmusok és automorfizmusok	158
6.4.2.1.	Affin endomorfizmus és automorfizmus egyenlete	159
6.4.3.	Fixpontok	159
6.5.	Affin endomorfizmus felbontása	160
6.5.1.	Centrális affín endomorfizmusok és automorfizmusok	160
6.5.2.	Transzlációk csoportja	161
6.5.3.	Affin endomorfizmus felbontása centrális endomorfizmus és transzláció össze- tételére	162
6.5.4.	Csoportok direkt és féldirekt szorzata	164
6.5.5.	Az affín endomorfizmus monoid és affinitások csoportjának felbontása fél- direkt szorzatra	164
6.6.	Projekció vagy párhuzamos vetítés	165
6.6.1.	Lineáris algebrai kitérő: lineáris altér mentén lineáris altérre való vetítés	166
6.6.2.	Írány mentén (affín részterrel párhuzamos) vetítés affín részterre	167
6.7.	Szimmetria vagy tükrözés	175
6.7.1.	Szimmetria és projekció kapcsolata	176
6.8.	Homotétia	181
7.	Osztásviszony	184
7.1.	Kollineáris pontok osztásviszonya	184
7.1.1.	Kollineáris vektorok összehasonlítása	184
7.1.2.	Három kollineáris pont osztásviszonya	185
7.1.3.	Osztásviszony tulajdonságai	186
7.1.4.	Osztásviszony, mint szakaszok hosszának előjeles aránya	187

7.1.5.	Az affin függvény megőrzi az osztásviszonyt	187
7.2.	Az osztásviszony alkalmazásai	188
7.2.1.	Thalész tétele és fordított tétele	188
7.2.1.1.	Thalész tétele a háromszögre	189
7.2.2.	Thalész fordított tétele a háromszögre	190
7.2.3.	Thalész tétele hipersíkokra	194
7.2.4.	Metszés lemma	194
7.2.5.	Ceva tétele és fordított tétele	197
7.2.5.1.	Ceva tétele a háromszögre	197
7.2.5.2.	Ceva fordított tétele a háromszögre	199
7.2.6.	Meneláosz tétele és fordított tétele	202
7.2.6.1.	Meneláosz tétele és fordított tétele a háromszögre	202
7.2.6.2.	Meneláosz tételének és fordított tételének általánosítása	204
7.2.7.	Desargues tétele	206
8.	Valós affin terek	210
8.1.	Speciális halmazok egy valós affin térben	210
8.1.1.	Három pont helyzete egy egyenesen	210
8.1.2.	Szakaszok	211
8.1.2.1.	Zárt szakasz	211
8.1.2.2.	Nyílt szakasz	211
8.1.2.3.	Félig nyílt és zárt szakaszok	211
8.1.3.	Félegyenesek	212
8.1.3.1.	Zárt félegyenes	212
8.1.4.	Féltér	212
8.1.5.	Háromszöglap, szimplex pontjai	213
8.2.	Konvex halmazok	214
8.2.1.	Konvex kombináció	214
8.2.2.	Konvex halmaz jellemzése konvex kombinációval	215
8.2.3.	Konvex halmaz affin függvény általi képe és ősképe	215
8.2.4.	Konvex halmazok metszete	216
8.2.5.	A konvex burkoló és jellemzése konvex kombinációval	216
8.2.5.1.	Konvex burkoló	216
8.2.5.2.	Konvex burkoló jellemzése konvex kombinációval	218
8.3.	Konvex halmazokkal kapcsolatos tételek	219
8.3.1.	Radon tétele	219
8.3.2.	Helly tétele	221
8.3.3.	Carathéodory tétele	222
9.	Euklideszi vektorterek	224
9.1.	Skálárszorzat, norma	224
9.1.1.	Skálárszorzat és vektorok merőlegessége	224
9.1.2.	Merőleges vektorhalmazok	225
9.1.3.	Norma	230

9.1.3.1.	Két vektor szöge	230
9.1.3.2.	Skálárszorzat által meghatározott norma	230
9.1.4.	Pitagorasz-tétel euklideszi vektorterekben	232
9.2.	Ortonormált bázisok	232
9.2.1.	Skálárszorzat felírása ortonormált bázisban	234
9.3.	A Gram-Schmidt ortogonalizációs tétel	234
10.	Euklideszi affin terek	238
10.1.	Affin részterek merőlegessége	238
10.1.1.	Merőleges affin részterek	238
10.1.2.	Egyenesre való merőlegesség	240
10.1.3.	Hipersík normálvektora	241
10.1.4.	Hipersíkra való merőlegesség	241
10.1.5.	Hipersíkkal való párhuzamosság	242
10.2.	Merőleges vetítés és tükrözés	242
10.2.1.	Merőlegesen kiegészítő affin részterek	242
10.2.2.	Pont merőleges vetülete affin részterre	245
10.2.3.	Merőleges vetítés és tükrözés	248
10.2.4.	Gram-mátrix és determináns	248
10.2.5.	Merőleges vetítés egyenlete	251
10.2.5.1.	Egyenesre való merőleges vetítés egyenlete	254
10.2.5.2.	Hipersíkra való merőleges vetítés egyenlete	255
10.2.6.	Merőleges tükrözés egyenlete	258
10.2.6.1.	Egyenesre való tükrözés	258
10.2.6.2.	Hipersíkra való tükrözés egyenlete	259
10.3.	Affin részterek távolsága	260
10.3.1.	Metrika vagy távolságfüggvény	260
10.3.2.	Affin tér pontjainak távolsága	261
10.3.3.	Szögek mértéke	261
10.3.4.	Pont távolsága affin résztértől és a merőleges vetület	262
10.3.5.	Két affin résztér távolsága	262
10.3.6.	Pont és affin résztér távolságának képlete	263
10.3.6.1.	Pont távolsága egyenestől	266
10.3.6.2.	Pont távolsága hipersíktól	266
10.3.6.3.	Példák	266
11.	Izometriák és hasonlóságok	268
11.1.	Lineáris izometriák és ortogonális transzformációk	268
11.1.1.	Ortogonalis transzformációk	269
11.1.1.1.	Ortogonalis transzformációk felbontása merőleges tükrözések össze- tételére	271
11.2.	Izometria euklideszi affin térek között	273
11.2.1.	Izometriák felbontása tükrözések összetételére	276
11.2.2.	Irányításmegőrző izometriák	277

11.2.3. Izometria és kongruencia kapcsolata	278
11.3. Hasonlóságok	280
11.3.1. Hasonlóságok kapcsolata a hasonlósági relációval	282
12. Másodrendű síkgörbék kanonikus alakra hozása	284
12.1. Másodrendű síkgörbék	284
12.2. Kúpszelet centruma	285
12.3. Centrális kúpszeletek	287
12.3.1. Eltolás	287
12.3.2. Forgatás	289
12.3.3. Centrális kúpszeletek tárgyalása	292
12.4. Parabola típusú kúpszeletek	297
12.4.1. Forgatás	298
12.4.2. Eltolás és parabolikus kúpszeletek tárgyalása	300
12.5. Kúpszelet típusának meghatározása	305
12.6. Példák	308
A. Jobb oldali csoportosítás	327
A.1. Kapcsolat jobb és bal oldali csoportosítások között	328
B. Műveletek vektorterek részhalmazaival	330
Irodalomjegyzék	332

Előszó

A könyv a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Magyar Matematika és Informatika Intézetének *Geometria 2 (Affin geometria)* című tárgyához készült jegyzet, Varga Csaba és Mezei Ildikó kollégák által korábban tanított tananyagra épül, átdolgozva és kibővítve azt. Az elméleti anyagon kívül példákat és megoldott feladatokat is tartalmaz.

A könyvben támaszkodunk a *Lineáris algebra* és *Geometria 1* tantárgyakra, amelyet a diákok a *Geometria 2* tárgyat megelőzően tanulnak. A lineáris algebra felőlről indulva építjük fel az affin geometria elméletét, ezért a geometriai fogalmak bevezetése előtt röviden át szoktuk ismételni a hozzájuk kapcsolódó lineáris algebrai fogalmakat, hogy jobban motiváljuk a bevezetett geometriai fogalmakat.

Az affin tér általános értelmezéstől indulva fokozatosan vezetjük be a geometriai fogalmakat. A egyenes és sík megfelelői lesznek az affin résztelek. Kezdetben csak párhuzamosságról, metszésről tudunk beszélni. Az osztásviszony segítségével hossz fogalma nélkül igazoljuk Thalész, Menelaosz, Ceva tételeit és fordított tételeit. A valós affin terekre rátérve tudunk beszélni szakaszcsoportokról, háromszög belsejéről, konvexitásról. Skalárszorzat segítségével bevezetjük a távolság, hossz, merőlegesség, szögmérték fogalmakat valós affin terek esetén. Így tudunk beszélni merőleges vetítésről és tükrözésről. Izometriák, illetve hasonlóságok segítségével általánosítjuk a háromszögek kongruenciáját, illetve hasonlóságát más alakzatokra.

A könyv csak bevezetésnek tekinthető az affin geometria világába, segít elindulni az ide tartozó témákban, amelyekkel kapcsolatosan felsoroltunk néhány könyvet az irodalomjegyzékben.

Kolozsvár, 2023 május.

A szerző.

1. fejezet

Csoporthatások

A csoporthatás fogalma a matematika több területén is felbukkan, ezért is tanulmányozzuk részletesebben a csoporthatás tulajdonságait és a hozzá kapcsolódó fogalmakat. A következő fejezetben az általános affin teret szabad és tranzitív bal oldali csoporthatás segítségével fogjuk értelmezni. Ezenkívül még szerepet játszik a féldirekt szorzat, a kongruenciák és hasonlóságok értelmezésénél, továbbá hasznos eszköz számlálásoknál is.

Kétféle csoporthatásról szoktunk beszélni, bal oldali és jobb oldali csoporthatásról. Kommutatív csoport esetén ez a két fogalom megegyezik. Minden bal oldali csoporthatásból természetes módon szerkeszthető egy jobb oldali csoporthatás és fordítva, ezért nincs lényegi különbség a két fogalom között. Mi csak bal oldali csoporthatással fogunk dolgozni, ezért a bal oldali csoporthatás helyett röviden csak csoporthatást fogunk mondani. A jobb oldali csoporthatásról, illetve a bal és jobb oldali csoporthatások kapcsolatáról az A. Függelékben olvashattok.

Több értelmezést is adunk a bal oldali csoporthatásra, melyek csak jelölésben térnek el egymástól. Általában a csoporthatást műveletként jelölik (lásd az 1.2. Értelmezést), de mi későbbiekben inkább a függvény jelölést használjuk (lásd az 1.1. Értelmezést). Ahhoz, hogy a kétféle jelölés egyenértékűsége érthetőbb legyen átismételjük a külső és belső művelet fogalmát.

Módszereket mutatunk, hogy már meglévő csoporthatásból hogyan tudunk újabbakat szerkeszteni. Megmutatjuk, hogy a bal oldali csoporthatás egyenértékű egy szimmetria-csoportba képező csoportmorfizmussal. Ezután rátérünk a csoporthatással kapcsolatos pálya és stabilizátor részcsoporthatás fogalmára és a hozzájuk kötődő szabad, tranzitív, illetve hűséges csoporthatásokra.

Végül csoporthatással kapcsolatos számlálási módszereket mutatunk be. Megszámoljuk a véges test feletti invertálható $(n \times n)$ -es mátrixok számát, illetve a véges test feletti n -dimenziós vektortér k -dimenziós altereinek számát.

1.1. Kitérő: belső és külső műveletek

Mielőtt rátérnénk a csoporthatás értelmezésére átismételjük a belső és külső művelet, a csoport, illetve a vektortér fogalmát, hogy könnyebben párhuzamot lehessen vonni ezekkel a fogalmakkal.

A \mathcal{G} nemüres halmaz esetén egy $f: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ függvényt *belső műveletnek* nevezzük. Ez a függvény két $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ elemnek megfeleltet egy $f(g_1, g_2)$ -vel jelölt \mathcal{G} -beli elemet. A valós számok összeadása és szorzása esetén megszokott jelölések és szabályok miatt bevált szokás az $f(g_1, g_2)$ helyett az $g_1 + g_2$, $g_1 \cdot g_2$, $g_1 g_2$, $g_1 * g_2$ típusú jelölések használata. Összegezve, egy belső művelet a \mathcal{G} halmazon nem több, mint egy $f: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ függvény.

A (\mathcal{G}, \cdot) párt *csoporthatásnak* nevezzük, ha „ \cdot ” egy belső művelet a \mathcal{G} nemüres halmazon, vagyis $\cdot: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$, és amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- (i) *asszociativitás*: minden $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ esetén $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$;
- (ii) *semleges elem létezése*: létezik $e \in \mathcal{G}$ úgy, hogy minden $g \in \mathcal{G}$ esetén $e \cdot g = g \cdot e = g$;
- (iii) *szimmetrikus elem létezése*: minden $g \in \mathcal{G}$ esetén létezik $g' \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $g \cdot g' = g' \cdot g = e$.

Azt mondjuk, hogy a „ \cdot ” művelet *kommutatív*, ha minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ esetén $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$. Ha a csoport művelete kommutatív, akkor a csoportot *kommutatív* vagy *Abel-féle csoportnak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy kommutatív csoport esetén a műveletet gyakran „ $+$ ”-szal jelölik, illetve nem kommutatív csoport esetén a „ \cdot ” jelölés használata a gyakori.

Abban az esetben, ha a műveletet „ $+$ ”-szal jelölik, akkor a g elem g' szimmetrikusára a $(-g)$ jelölést használják és a g elem *ellentettjének* is nevezik. Abban az esetben, ha a műveletet „ \cdot ”-al jelölik, akkor a g elem g' szimmetrikusára a g^{-1} jelölést használják és a g elem *inverzének* is nevezik.

Átismételjük a vektortér értelmezését is. Legyen $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ egy kommutatív test. A \mathcal{V} nemüres halmazon értelmezünk egy $+$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ belső műveletet, illetve egy $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $(k, v) \mapsto kv$ külső műveletet. A \mathcal{V} halmaz elemeire vektorként, illetve a \mathbb{K} test elemeire skalárként hivatkozunk. A \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér, ha a belső műveletre teljesül, hogy $(\mathcal{V}, +)$ egy Abel-csoport és a külső műveletre fennállnak a következő tulajdonságok:

- (i) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$, minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ skalárok és minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén;
- (ii) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$, minden $k \in \mathbb{K}$ skalár és minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ vektorok esetén;
- (iii) $k_1(k_2v) = (k_1 \cdot k_2)v$, minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ skalárok és minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén;
- (iv) $1v = v$, minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén, és ahol $1 \in \mathbb{K}$ a test egységeleme.

Az általunk használt leggyakoribb vektorterek a \mathbb{K}^n \mathbb{K} -vektortér, az \mathbb{R}^n valós vektortér, a \mathbb{C}^n komplex vektortér, a $(\mathbb{Z}_p)^n$ \mathbb{Z}_p -vektortér, ahol p prím.

1.2. Bal oldali csoporthatás

Legyen (\mathcal{G}, \cdot) egy (nem feltétlenül kommutatív) csoport és \mathcal{X} egy nemüres halmaz.

1.1. Értelmezés (Csoporthatás értelmezése függvény jelöléssel)

A $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény a (\mathcal{G}, \cdot) csoport egy *bal oldali csoporthatása* az \mathcal{X} nemüres halmazon, ha

- (i) $t(g_1, t(g_2, x)) = t(g_1 \cdot g_2, x)$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ csoportelem és minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén;
- (ii) $t(e, x) = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén, ahol $e \in \mathcal{G}$ a csoport semleges eleme.

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a (\mathcal{G}, \cdot) csoport *balról hat* az \mathcal{X} halmazon.

A t függvényre úgy is gondolhatunk, mint egy külső műveletre az \mathcal{X} halmazon, vagyis a \mathcal{G} csoport elemeivel hatunk az \mathcal{X} halmaz elemeire. Emiatt is szokták a csoporthatást a műveletekhez hasonlóan következőképpen is jelölni:

$$g * x \stackrel{\text{jel.}}{=} t(g, x), \quad \forall g \in \mathcal{G}, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Ezzel a jelöléssel az 1.1. Értelmezést átírhatjuk a vektortér értelmezéséhez közelebb álló alakba (lásd a vektortér (iii) és (iv) axiómáit).

1.2. Értelmezés (Csoportthatás értelmezése művelet jelöléssel)

$A *: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $(g, x) \mapsto g * x$ a (\mathcal{G}, \cdot) csoport egy *bal oldali csoportthatása* az \mathcal{X} nemüres halmazon, ha

- (i) $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 \cdot g_2) * x$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ csoportelem és minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén;
- (ii) $e * x = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén, ahol $e \in \mathcal{G}$ a csoport semleges eleme.

1.3. Megjegyzés

Egy csoportthatás nem attól lesz bal oldali, hogy a csoport elemeit a bal oldalra írjuk. Az értelmezés első pontját szóban úgy tudjuk kifejezni, hogy ha a $g_1 \cdot g_2$ szorzattal hatunk az x halmazelemre az ugyanaz, mint ha előbb a g_2 csoportelemmel (a szorzat jobb oldali vagy második tényezőjével) hatunk x -re, majd a g_1 csoportelemmel (a szorzat bal oldali vagy első tényezőjével) hatunk a $g_2 * x$ halmazelemre. \diamond

A következőben bal oldali csoportthatás helyett röviden csak csoportthatást fogunk mondani. Egy csoport többféleképpen is hathat ugyanazon a halmazon, illetve egy adott halmazon több különböző csoportthatást is értelmezhetünk. A következőkben példákat adunk csoportthatásokra.

1.4. Példa (Nemnulla skalárokkal való szorzás vektortéren)

Az 1.2. Értelmezése előtt megemlítettük, hogy ha a csoportthatás műveletként jelöljük, akkor az azt értelmező tulajdonságok hasonlítanak a vektortér értelmező két tulajdonságra. Ebben a példában tisztázzuk, hogy ez a hasonlóság milyen csoportthatáshoz vezet. Legyen $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ egy kommutatív test és \mathcal{V} pedig egy \mathbb{K} -vektortér. Ekkor a \mathbb{K} test elemeivel (a skalárokkal) megszorozhatjuk a \mathcal{V} vektortér elemeit (a vektorokat) és többek között teljesülnek a következő axiómák:

- (iii) $k_1(k_2v) = (k_1 \cdot k_2)v$, minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ és minden $v \in \mathcal{V}$ esetén;
- (iv) $1v = v$, minden $v \in \mathcal{V}$ esetén, és $1 \in \mathbb{K}$ a test egységeleme.

Ezek a relációk ugyanazok, mint amelyek a csoportthatás 1.2. Értelmezésében szerepelnek, de ettől még a $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $k * v \stackrel{\text{ért.}}{=} kv$ nem egy csoportthatás, mivel \mathbb{K} a szorzásra nézve nem csoport (a $0 \in \mathbb{K}$ zéruselem nem invertálható). Ellenben, ha a (\mathbb{K}^*, \cdot) multiplikatív csoportot tekintjük, akkor

$$*: \mathbb{K}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad k * v \stackrel{\text{ért.}}{=} kv, \quad \forall k \in \mathbb{K}^*, \forall v \in \mathcal{V}$$

egy csoportthatást értelmez a fenti (iii) és (iv) relációk által, ahol $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. \diamond

1.5. Példa (Triviális hatás)

Minden (\mathcal{G}, \cdot) csoport és minden \mathcal{X} nemüres halmaz esetén értelmezhető a következő hatás:

$$*: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad g * x = x.$$

Ezen hatás esetén minden csoportelem minden halmazelemet fixen hagy. Ezt a hatást *triviális hatásnak* hívjuk. \diamond

1.6. Példa (Csoport hatása önmagán)

Minden (\mathcal{G}, \cdot) csoport hat önmagán balról való szorzással, vagyis értelmezhető a

$$*: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad g * x \stackrel{\text{ért.}}{=} g \cdot x, \quad \forall g, x \in \mathcal{G}$$

csoportthatás. Ebben az esetben a csoport is \mathcal{G} és a halmaz, amelyen hat, az is \mathcal{G} . Valóban,

- (i) $g_1 * (g_2 * x) = g_1 * (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x = (g_1 \cdot g_2) * x$, minden $g_1, g_2, x \in \mathcal{G}$ esetén a csoportművelet asszociativitása miatt, és
- (ii) $e * x = e \cdot x = x$, minden $x \in \mathcal{G}$ esetén, ahol $e \in \mathcal{G}$ a csoport semleges eleme.

◇

1.7. Példa (Rögzített pont körüli forgatások a síkon)

Legyen \mathcal{S} az intuitív sík és $O \in \mathcal{S}$ egy rögzített pontja. Legyen $Rot_{O,\alpha}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ az \mathcal{S} sík pontjainak $\alpha \in \mathbb{R}$ szöggel való (óramutató járásával ellentétes irányú) forgatása az $O \in \mathcal{S}$ pont körül. Minden $A \in \mathcal{S}$ pont O pont körüli, α szöggel való forgatása, majd a $Rot_{O,\alpha}(A)$ elforgatott pont újabb β szöggel való elforgatása megegyezik az A pont O pont körüli $\alpha + \beta$ szöggel való elforgatásával, vagyis

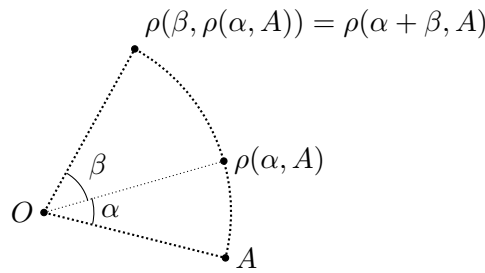
$$Rot_{O,\beta}(Rot_{O,\alpha}(A)) = Rot_{O,\alpha+\beta}(A), \quad \forall A \in \mathcal{S}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Továbbá a 0 mértékű szöggel való forgatás fixen hagyja az \mathcal{S} sík pontjait, vagyis

$$Rot_{O,0}(A) = A, \quad \forall A \in \mathcal{S}. \quad (1.2)$$

Ekkor $\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\rho(\alpha, A) = Rot_{O,\alpha}(A)$ az $(\mathbb{R}, +)$ additív csoport egy csoportthatása az \mathcal{S} síkon, mivel

- (i) $\rho(\alpha, \rho(\beta, A)) = \rho(\alpha + \beta, A)$, minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ szög és minden $A \in \mathcal{S}$ pont esetén az (1.1) alapján, és
- (ii) $\rho(0, A) = A$, minden $A \in \mathcal{S}$ pont esetén az (1.2) alapján.



1.1. ábra. Rögzített O pont körüli forgatás.

◇

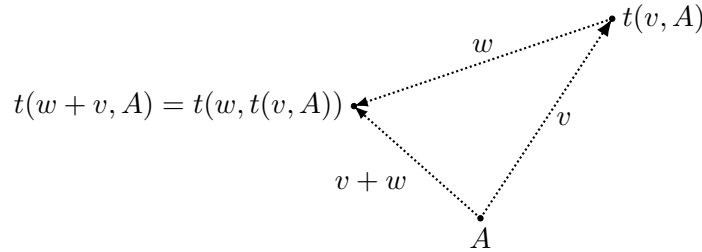
1.8. Példa (Szabad vektorokkal való eltolások a síkon)

Legyen \mathcal{S} az intuitív sík és \mathcal{V} a sík szabad vektorainak vektortere. Sajátosan a vektorok az összeadásra nézve egy Abel-csoportot alkotnak. Az \mathcal{S} sík pontjait eltolhatjuk a szabad vektorokkal: minden $A \in \mathcal{S}$ pont és $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén létezik egyetlen olyan $B \in \mathcal{S}$ pont, hogy $\overrightarrow{AB} = v$. A B pont az A pont v vektorral való eltoltja, és amelyet úgy is jelölünk, hogy $B = t(v, A)$. Ha $w \in \mathcal{V}$ egy másik szabad vektor és $C = t(w, B)$, vagyis $\overrightarrow{BC} = w$, akkor a háromszög-szabály alapján $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, vagyis $t(v + w, A) = t(w, t(v, A))$. A $\vec{0}$ nullvektor a $(\mathcal{V}, +)$ csoport

semleges eleme és tetszőleges $A \in \mathcal{S}$ pont eltolása a nullvektorral az A pontot eredményezi, vagyis $A = t(\vec{0}, A)$. Tehát teljesülnek a következő összefüggések:

- (i) $t(v, t(w, A)) = t(v + w, A)$, minden $A \in \mathcal{S}$ pont és minden $v, w \in \mathcal{V}$ szabad vektorok esetén,
- (ii) $t(\vec{0}, A) = A$, minden $A \in \mathcal{S}$ pont esetén.

Tehát a szabad vektorok $(\mathcal{V}, +)$ additív csoportja hat az \mathcal{S} intuitív síkon. \diamond



1.2. ábra. Eltolás a síkon szabad vektorokkal.

1.9. Példa (Szimmetrikus-csoport hatása)

Az \mathcal{X} nemüres halmaz *szimmetrikus-csoportja* az $S_{\mathcal{X}} = \{f \mid f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \text{ bijektív függvény}\}$ halmaz, amelyen a művelet a függvények „o” összetétele. A függvények kiértékelése egy adott pontban egy bal oldali $S_{\mathcal{X}}$ -csoportthatást eredményez az \mathcal{X} halmazon:

$$ev: S_{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad ev(f, x) \stackrel{\text{ért.}}{=} f(x), \quad \forall f \in S_{\mathcal{X}}, \forall x \in \mathcal{X}$$

(az ev jelölés az evaluation szóból, a kiértékelés angol megfelelőjéből származik). Valóban,

- (i) $ev(f_1, ev(f_2, x)) = ev(f_1, f_2(x)) = f_1(f_2(x)) = (f_1 \circ f_2)(x) = ev(f_1 \circ f_2, x)$, minden $f_1, f_2 \in S_{\mathcal{X}}$ és minden $x \in \mathcal{X}$ esetén,
- (ii) $ev(1_{\mathcal{X}}, x) = 1_{\mathcal{X}}(x) = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén,

ahol $1_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $1_{\mathcal{X}}(x) = x$ identikus függvény az $(S_{\mathcal{X}}, \circ)$ csoport semleges eleme. \diamond

1.10. Példa (Permutációk hatása)

Az 1.9. Példa egy sajátos esetét kapjuk, ha $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$. Ekkor $S_{\mathcal{X}} = S_n$, az n -edrendű permutációk csoportja hat az $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$ halmazon: $*$: $S_n \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $\sigma * k = \sigma(k)$, minden $\sigma \in S_n$ és minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén. \diamond

1.11. Példa (Invertálható mátrixszal való szorzás balról)

A (2×2) -es valós együtthatós invertálható mátrixok $GL_2(\mathbb{R})$ halmaza csoport a mátrixok szorzásra nézve, amelynek semleges eleme az I_2 identikus mátrix. Ez a csoport hat a (2×1) -es valós mátrixok $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ halmazán balról való szorzással:

$$*: GL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{ért.}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{bmatrix}.$$

Az első tulajdonság a mátrixok szorzásának asszociativitásából következik, a második pedig az identikus mátrixszal való szorzás miatt áll fenn, de akár direkt számolással is könnyen leellenőrizhetők. \diamond

1.2.1. Csoporthatások származtatása

A matematikában gyakran vizsgáljuk, hogy már meglévő struktúrákból hogyan lehet újabbakat szerkeszteni. Például, már meglévő halmazból újabb halmaz szerkeszthető, ha vesszük a részhalmazok halmazát vagy vesszük az önmagával vett Descartes-féle szorzatát. Másik példa, lineáris algebrában vehetjük meglévő vektorterek résztereit, metszetét, Descartes-féle szorzatát, hogy újabb vektortereket kapjunk. Megvizsgáljuk, hogy egy adott csoporthatásból hogyan tudunk természetes módon újabb csoporthatásokat konstruálni. A származtatott hatások jelölésére általában az eredetivel megegyező szimbólumot szoktunk használni.

Tekintsünk egy $\ast: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoporthatást, vagyis a (\mathcal{G}, \cdot) csoport (balról) hat az \mathcal{X} halmazon. A csoporthatások származtatásának egyik módja, hogy a \mathcal{G} csoportot lecseréljük egy másik csoportra (lásd az 1.2.1.1 és 1.2.1.2 alfejezeteket). A csoporthatások származtatásának egy másik családját kapjuk, ha az \mathcal{X} halmaz helyett a \mathcal{G} csoporttal egy másik \mathcal{X}' halmazon hatunk, amelyet az \mathcal{X} halmazból szerkesztjük meg. Az \mathcal{X}' halmazt többféleképpen is megszerkeszthetjük az \mathcal{X} halmazból, amelyre néhány példát mutatunk az 1.2.1.3, 1.2.1.4, 1.2.1.5 alfejezetekben. Természetesen ezeket a módszereket lehet kombinálni is.

1.2.1.1. Részcsoport hatása

Egy származtatási módszer, ha a \mathcal{G} csoport helyett egy \mathcal{G}' részcsoporthatást vesszük és azzal hatunk az \mathcal{X} halmazon. Így minden \mathcal{G}' részcsoporthatás származtat egy újabb csoporthatást, vagyis a már meglévő (bal oldali) csoporthatás segítségével értelmezhetjük a \mathcal{G}' részcsoporthatás egy (bal oldali) csoporthatását ugyanazon az \mathcal{X} halmazon:

$$\bullet: \mathcal{G}' \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad g' \bullet x \stackrel{\text{ért.}}{=} g' \ast x, \quad \forall g' \in \mathcal{G}', \forall x \in \mathcal{X},$$

úgy gondolva a $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ részcsoporthatás g' elemére, mint a \mathcal{G} csoport eleme és az eredeti „ \ast ” hatással hatunk az $x \in \mathcal{X}$ halmazelemre. Valóban, az 1.2. Értelmezés (i) alpontja teljesül, mert a \mathcal{G}' részcsoporthatás minden eleme egyben a \mathcal{G} csoport eleme is, továbbá a \mathcal{G}' részcsoporthatás semleges eleme megegyezik a \mathcal{G} csoport semleges elemével.

1.12. Megjegyzés

Részcsoporthatással való hatás ugyanazon a halmazon analóg azzal, hogy egy \mathcal{V} komplex vektorteret lehet tekinteni valós vagy racionális vektortérként is, hiszen valós számok teste, illetve a racionális számok teste a komplex számok testének részteste. \diamond

1.13. Példa (Részcsoporthatás hatása csoporton)

Az 1.6. Példában tekintettük egy (\mathcal{G}, \cdot) csoport hatását önmagán balról való szorzással. A \mathcal{G} csoport egy \mathcal{G}' részcsoporthatja szintén hat a \mathcal{G} -n, mint halmazon balról való szorzással:

$$\bullet: \mathcal{G}' \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad g' \bullet g \stackrel{\text{ért.}}{=} g' \ast g = g' \cdot g, \quad \forall g' \in \mathcal{G}', \forall g \in \mathcal{G}$$

egy bal oldali csoporthatás. \diamond

1.14. Példa

Az $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$ részcsoporthatja a $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ csoportnak, amely az 1.11. Példa szerint balról hat az $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ halmazon, így mint részcsoporthatás $SO_2(\mathbb{R})$ is hat az

$\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ halmazon a következőképpen:

$$*: SO_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{ért.}}{=} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

◇

1.15. Példa

Tekintsük a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$ hatodrendű permutációt. A $\mathcal{H} = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5\}$ az S_6 egy részcsoportha, ahol e a hatodrendű identikus permutációt jelöli. Az S_6 csoport hatása az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon származtatja a

$$*: \mathcal{H} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \sigma^k * x \stackrel{\text{ért.}}{=} \sigma^k(x), \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

hatást. Ez a hatás az alábbi táblázattal írható le. Megjegyezzük, hogy a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ alsó sora mutatja, hogy σ -val hatva az $x \in \{1, 2, \dots, 6\}$ elemre mit ad eredményül, ezért az 1.3 táblázatba a σ sorába ezen permutáció alsó sora kerül.

◇

$\sigma^k * x$	1	2	3	4	5	6
e	1	2	3	4	5	6
σ	2	4	6	1	5	3
σ^2	4	1	3	2	5	6
σ^3	1	2	6	4	5	3
σ^4	2	4	3	1	5	6
σ^5	4	1	6	2	5	3

1.3. táblázat. A σ permutáció által generált részcsoporthatása.

1.16. Példa (Rögzített pont körüli, diszkrét szöggel való forgatások a síkon)

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} intuitív síkon egy O rögzített pont körüli forgatások által. Legyen $n \geq 1$ egész szám. Az $(\mathbb{R}, +)$ csoport egy részcsoportha a $\frac{2\pi}{n}\mathbb{Z} = \{\frac{2\pi}{n} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ és az általa származtatott hatás a síkon az O rögzített pont körül, a $\frac{2\pi}{n}$ szög többszöröseivel való forgatásokat jelenti.

◇

1.17. Példa (Adott iránnyal párhuzamos eltolások a síkon)

Az 1.8. Példában tekintettük a szabad vektorok $(\mathcal{V}, +)$ additív csoportjának eltolásokkal való hatását az \mathcal{S} síkon. Ha $v \in \mathcal{V}$ egy nemnulla vektor, akkor a v vektor által generált $\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ lineáris altér egyben részcsoportha a $(\mathcal{V}, +)$ csoportnak, és a $(\langle v \rangle, +)$ részcsoportha a v iránnyal párhuzamos eltolásokkal hat az \mathcal{S} síkon.

◇

1.2.1.2. Csoportmorfizmussal való származtatás

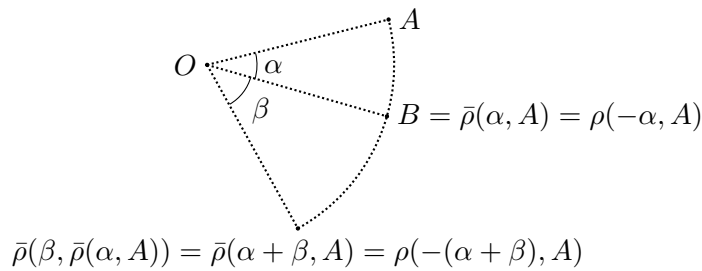
Legyen \mathcal{G}, \mathcal{H} két csoport és \mathcal{X} egy nemüres halmaz. Ha adott egy $*: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoporthatás és egy $\psi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ egy csoportmorfizmus, akkor az $\bullet: \mathcal{H} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $h \bullet x = \psi(h) * x$ egy \mathcal{H} -csoporthatás lesz az \mathcal{X} halmazon. Az olvasóra bízunk annak ellenőrzését, hogy ez valóban egy \mathcal{H} -csoporthatást értelmez az \mathcal{X} halmazon.

1.18. Példa (Forgatás síkon rögzített pont körül)

Az 1.9. Példában tekintettük az $S_{\mathcal{X}}$ szimmetrikus-csoport hatását az \mathcal{X} halmazon. Ebben a példában legyen $\mathcal{X} = \mathcal{S}$ az intuitív sík. Az O középpontú α szögű $Rot_{O,\alpha}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ forgatás egy bijekció, ezért $Rot_{O,\alpha} \in S_{\mathcal{S}}$. Továbbá egy α szögű és egy β szögű O középpontú forgatás összetétele egy $(\beta + \alpha)$ szögű forgatás lesz, vagyis $Rot_{O,\beta} \circ Rot_{O,\alpha} = Rot_{O,\beta+\alpha}$, ami azt jelenti, hogy $\psi: \mathbb{R} \rightarrow S_{\mathcal{S}}$, $\psi(\alpha) = Rot_{O,\alpha}$ egy csoportmorfizmus. Az $S_{\mathcal{S}}$ szimmetrikus-csoport \mathcal{S} síkon való ev hatása és a $\psi: \mathbb{R} \rightarrow S_{\mathcal{S}}$ csoportmorfizmus által származtatott hatás pontosan az 1.7. Példában tárgyalt O középpontú forgatások hatása a síkon:

$$\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad ev(\psi(\alpha), A) = ev(Rot_{O,\alpha}, A) = Rot_{O,\alpha}(A) = \rho(\alpha, A),$$

minden $\alpha \in \mathbb{R}$ szög és minden $A \in \mathcal{S}$ pont esetén. ◇



1.4. ábra. Rögzített O pont körüli forgatás ellenkező irányba.

1.19. Példa (Forgatás síkon rögzített pont körül ellenkező irányba)

Tekintsük az 1.7. Példában tárgyalt $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} intuitív síkon az O középpontú (az óramutató járásával ellentétes irányú) forgatások által. A $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(\alpha) = -\alpha$ az $(\mathbb{R}, +)$ csoport egy automorfizmusa, és az előbb említett csoporthatással együtt származtatott hatása az $(\mathbb{R}, +)$ csoportnak az O középpontú, az óramutató járásával megegyező irányú forgatások általi hatása az \mathcal{S} síkon:

$$\bar{\rho}: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \bar{\rho}(\alpha, A) = \rho(\psi(\alpha), A) = \rho(-\alpha, A) = Rot_{O,-\alpha}(A),$$

minden $\alpha \in \mathbb{R}$ szög és minden $A \in \mathcal{S}$ pont esetén. ◇

1.20. Példa

A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$ hatodrendű permutáció esetén $\mathcal{H} = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5\}$ az S_6 egy részcsoportha és az 1.15. Példában tekintettük a \mathcal{H} részcsoporthatását az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. Ezen hatás és a $\psi: (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathcal{H}, \cdot)$, $\psi(\hat{k}) = \sigma^k$ egy csoportmorfizmus segítségével konstruálhatunk egy

$$\bullet: \mathbb{Z}_6 \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \hat{k} \bullet x = \sigma^k * x = \sigma^k(x)$$

hatást. ◇

1.2.1.3. Leszűkítés invariáns részalmazra

Legyen $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ egy nemüres részalmaz. Azt mondjuk, hogy \mathcal{X}' *invariáns* részalmaz a csoport-hatásra nézve, ha minden $x' \in \mathcal{X}'$ halmazelem és minden $g \in \mathcal{G}$ csoportelem esetén $g * x' \in \mathcal{X}'$.

Ebben az esetben az eredeti hatás segítségével értelmezhető egy $\mathcal{G} \times \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$, $(g, x') \mapsto g * x'$ csoportthatás az \mathcal{X}' részhalmazon.

1.21. Példa (Rögzített pont körüli forgatások körön és korongon)

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} intuitív síkon egy O rögzített pont körüli forgatások által. Az O középpontú, r sugarú $\mathcal{C}(O, r)$ kör invariáns erre a csoportthatásra nézve, mivel a $\mathcal{C}(O, r)$ kör egy pontját α szöggel elforgatva az O pont körül szintén a $\mathcal{C}(O, r)$ körön lévő pontot kapunk. Így az 1.7. Példában megadott hatás az $(\mathbb{R}, +)$ csoport egy hatását származtatja a $\mathcal{C}(O, r)$ körön.

Jelölje $|OA|$ az $[OA]$ szakasz hosszát. Az O középpontú, r sugarú $\mathcal{D}(O, r) = \{A \in \mathcal{S} \mid |OA| \leq r\}$ zárt korong is invariáns az O középpontú forgatásokra nézve, így az 1.7. Példában megadott hatás szintén származtat egy $(\mathbb{R}, +)$ csoportthatást a $\mathcal{D}(O, r)$ zárt korongon. \diamond

1.2.1.4. Hatás részhalmazok halmazán

Legyen $\mathcal{P}'(\mathcal{X}) = \{\mathcal{Z} \mid \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{Z} \neq \emptyset\}$ az \mathcal{X} nemüres részhalmazainak halmaza. Ekkor

$$*: \mathcal{G} \times \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{X}), \quad g * \mathcal{Z} \stackrel{\text{ért.}}{=} \{g * z \mid z \in \mathcal{Z}\}, \quad \forall g \in \mathcal{G}, \forall \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{Z} \neq \emptyset,$$

egy csoportthatás a $\mathcal{P}'(\mathcal{X})$ halmazon. A csoportthatás tulajdonságainak ellenőrzését az olvasóra bízunk.

1.22. Példa

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} síkon az $O \in \mathcal{S}$ pont körüli forgatások által, vagyis $\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\rho(\alpha, A) = \text{Rot}_{O, \alpha}(A)$. Ekkor természetes módon tekinthetjük az \mathcal{S} sík nemüres részhalmazainak O pont körüli forgatásait is. A $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}$ nemüres részhalmaz az O pont körül α szöggel való elforgatottja az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy a \mathcal{Z} minden elemét elforgatjuk O körül α szöggel, vagyis $\rho(\alpha, \mathcal{Z}) = \{\rho(\alpha, A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$.

Tekinthetjük az \mathcal{S} sík háromszögeinek $\Delta \subseteq \mathcal{P}'(\mathcal{S})$ halmazát. A forgatások háromszögeket háromszögekbe visznek, ezért Δ halmaz a $\mathcal{P}'(\mathcal{S})$ -en származtatott hatásra nézve egy invariáns részhalmaz. Tekinthetjük a

$$\rho_{\Delta}: \mathbb{R} \times \Delta \rightarrow \Delta, \quad \rho_{\Delta}(\alpha, ABC_{\Delta}) = \rho(\alpha, ABC_{\Delta}) = \rho(\alpha, A)\rho(\alpha, B)\rho(\alpha, C)_{\Delta}$$

hatást, vagyis az α szöggel való forgatás egy ABC háromszöget abba a háromszögbe visz át, amelynek csúcsai az A, B, C pontok α szöggel való elforgatottjai. \diamond

1.2.1.5. Hatás szorzat halmazon

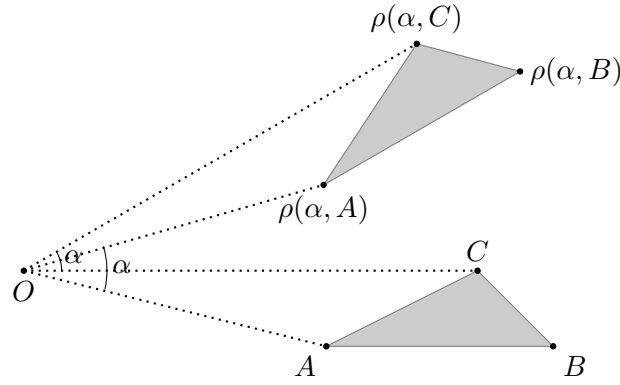
Egy $*: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás természetes módon származtat egy csoportthatást az $\mathcal{X}^n = \mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}\}$ n -szeres Descartes-féle szorzaton:

$$*: \mathcal{G} \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad g * (x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{ért.}}{=} (g * x_1, \dots, g * x_n), \quad \forall g \in \mathcal{G}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n.$$

A csoportthatás tulajdonságainak ellenőrzését az olvasóra bízunk.

1.23. Példa

Tekintsük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} síkon az $O \in \mathcal{S}$ pont körüli forgatások által, vagyis $\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\rho(\alpha, A) = \text{Rot}_{O, \alpha}(A)$. Mivel egy háromszöget meghatároznak a csúcsai és

1.5. ábra. Síkbeli háromszögek forgatása rögzített O pont körül.

forogatások háromszögeket olyan háromszögekbe visznek, amelyek csúcsai az eredeti háromszög csúcsainak elforgatottjai, ezért a $\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$, $\rho(\alpha, (A, B, C)) = (\rho(\alpha, A), \rho(\alpha, B), \rho(\alpha, C))$ hatás is az \mathcal{S} sík háromszögeinek O pont körüli forgatásának csoportthatását írja le. Ezen példa esetén a háromszögek lehetnek elfajultak is, akár mindhárom csúcs egybe is eshet. Ha ezt ki szeretnénk zárni, akkor az \mathcal{X}^3 -nek azon invariáns részhalmazát kell venni, amely a nem kollineáris ponthármakból áll. \diamond

1.2.2. Bal oldali csoportthatások és $(S_{\mathcal{X}}, \circ)$ -be képező csoportmorfizmusok kapcsolata

Ebben az alfejezetben azt fogjuk belátni, hogy minden csoportthatás az 1.9. Példában tekintett szimmetrikus-csoport hatásából származtatható egy csoportmorfizmus által (lásd az 1.2.1.2. alfejezetet). Mielőtt erre rátérnénk bevezetünk pár jelölést, amelyeket a későbbiekben is használni fogunk.

1.2.4. Jelölés

Az $f: A \times B \rightarrow C$, $(a, b) \mapsto f(a, b)$ kétváltozós függvény segítségével értelmezhetünk két egyváltozós függvényt. Ha először rögzítjük a második változót $b \in B$ -nek, akkor kapunk egy $A \rightarrow C$, $a \mapsto f(a, b)$ egyváltozós függvényt, amelyet $f(-, b)$ -vel fogunk jelölni, tehát

$$f(-, b): A \rightarrow C, \quad f(-, b)(a) \stackrel{\text{ért.}}{=} f(a, b). \quad (1.3)$$

Hasonlóan, ha rögzítjük az első változót $a \in A$ -nak, akkor kapunk egy $B \rightarrow C$, $b \mapsto f(a, b)$ egyváltozós függvényt, amelyet $f(a, -)$ -vel fogunk jelölni, tehát

$$f(a, -): B \rightarrow C, \quad f(a, -)(b) \stackrel{\text{ért.}}{=} f(a, b). \quad (1.4)$$

Egy $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ kétváltozós függvényt úgy is lehet tekinteni, mint a $g \in \mathcal{G}$ csoportelemekkel paraméterezett

$$t_g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad t_g(x) \stackrel{\text{ért.}}{=} t(g, x)$$

függvények családja, vagyis $t_g = t(g, -)$. Csoportthatás esetén ez a függvény írja le hogyan hat a g csoportelem az \mathcal{X} halmazon. Ezzel a jelöléssel az 1.1. Értelmezés (i) feltétele a

$$t_{g_1}(t_{g_2}(x)) = t_{g_1 \cdot g_2}(x), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

alakba, vagy az ezzel egyenértékű

$$(t_{g_1} \circ t_{g_2})(x) = t_{g_1 \cdot g_2}(x), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

formába írható. Ez egyenértékű a $t_{g_1} \circ t_{g_2} = t_{g_1 \cdot g_2}$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ esetén feltétellel. A (ii) feltétel pedig a $t_e(x) = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén, vagyis $t_e = 1_{\mathcal{X}}$ alakba írható, ahol $1_{\mathcal{X}}$ az \mathcal{X} halmaz identikus függvénye ($1_{\mathcal{X}}(x) = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén).

A csoportthatás 1.1. Értelmezése a $t_g = t(g, -)$ jelöléssel a következőképpen írható át.

1.25. Értelmezés (Csoportthatás értelmzése, mint függvények családja)

A $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény a (\mathcal{G}, \cdot) csoport egy *bal oldali csoportthatása* az \mathcal{X} nemüres halmazon, ha a $t_g = t(g, -): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvényekre teljesülnek a

- (i) $t_{g_1} \circ t_{g_2} = t_{g_1 \cdot g_2}$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ csoportelemek esetén,
- (ii) $t_e = 1_{\mathcal{X}}$

feltételek, ahol $e \in \mathcal{G}$ a csoport semleges eleme és $1_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $1_{\mathcal{X}}(x) = x$ az \mathcal{X} halmaz identikus függvénye.

1.26. Példa

Az 1.7. Példában az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatott az \mathcal{S} síkon az O pont körüli forgatások által: $\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\rho(\alpha, A) = \text{Rot}_{O, \alpha}(A)$. Ezen hatás esetén a $\rho_{\alpha}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\rho_{\alpha} = \text{Rot}_{O, \alpha}$ az O pont körüli α szöggel való forgatást jelenti, mivel $\rho_{\alpha}(A) = \rho(\alpha, -)(A) = \rho(\alpha, A) = \text{Rot}_{O, \alpha}(A)$, minden $A \in \mathcal{S}$ pont esetén. ◇

1.27. Példa

Az 1.8. Példában a szabadvektorok $(\mathcal{V}, +)$ csoportjának eltolások általi hatását tekintettük az \mathcal{S} síkon: $t: \mathcal{V} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $t(v, A) = B \iff v = \overrightarrow{AB}$. Ebben az esetben a $t_v: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ függvény a v vektorral való eltolás a síkon. ◇

1.28. Lemma

Ha $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy bal oldali csoportthatás, akkor

- (i) $t_g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bijektív, minden $g \in \mathcal{G}$ esetén, vagyis $t_g \in S_{\mathcal{X}}$;
- (ii) $(t_g)^{-1} = t_{g^{-1}}$, minden $g \in \mathcal{G}$ esetén.

Bizonyítás. Az 1.25. Értelmezésben $g_1 = g$ és $g_2 = g^{-1}$ választással $t_g \circ t_{g^{-1}} = t_{g \cdot g^{-1}} = t_e = 1_{\mathcal{X}}$, majd fordítva $g_1 = g^{-1}$ és $g_2 = g$ választás esetén $t_{g^{-1}} \circ t_g = t_{g^{-1} \cdot g} = t_e = 1_{\mathcal{X}}$. Tehát a t_g és $t_{g^{-1}}$ függvények egymás inverzei, vagyis $(t_g)^{-1} = t_{g^{-1}}$, ezért bijektívek. □

1.29. Tétel

Legyen (\mathcal{G}, \cdot) egy csoport, \mathcal{X} egy nemüres halmaz és $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy függvény. A t függvény pontosan akkor egy bal oldali csoportthatás, ha

$$T: \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{X}}, \quad T(g) = t_g$$

egy csoportmorfizmus, ahol $t_g = t(g, -): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy bal oldali csoportthatás. Ekkor az 1.28. Lemma (i) alpontja alapján a $T: \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{X}}, T(g) = t_g$ függvény jól értelmezett. Az 1.25. Értelmezés (i) pontja azt fejezi ki, hogy T egy csoportmorfizmus:

$$T(g_1 \cdot g_2) = t_{g_1 \cdot g_2} = t_{g_1} \circ t_{g_2} = T(g_1) \circ T(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G},$$

(az $S_{\mathcal{X}}$ csoportban a „ \circ ” összetevés a művelet).

\Leftarrow Ha $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy olyan függvény, amelyre $T: \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{X}}, T(g) = t_g$ csoportmorfizmus, akkor

$$t_{g_1 \cdot g_2} = T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1) \circ T(g_2) = t_{g_1} \circ t_{g_2}, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G},$$

tehát teljesül az 1.25. Értelmezés (i) pontja. Mivel egy csoportmorfizmus semleges elemet semleges elembe képez és az identikus $1_{\mathcal{X}}$ függvény az $(S_{\mathcal{X}}, \circ)$ csoport semleges eleme, ezért $1_{\mathcal{X}} = T(e) = t_e$, és így teljesül az 1.25. Értelmezés (ii) pontja is. \square

Az 1.29. Tétel azt mondja, hogy minden $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás az $S_{\mathcal{X}}$ szimmetrikus-csoport \mathcal{X} halmazon való hatásából (lásd az 1.9. Példát) származtatható a $T: \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{X}}, T(g) = t_g$ csoportmorfizmus segítségével. Valóban, az 1.2.1.2. alfejezetben értelmezett származtatás szerint

$$ev(T(g), x) = ev(t_g, x) = t_g(x) = t(g, x),$$

minden $g \in \mathcal{G}$ és minden $x \in \mathcal{X}$ esetén.

1.30. Példa

Tekintsük a $K = \{e, a, b, c\}$ Klein-féle csoportot, amelynek műveleti táblája az 1.6. táblázatban látható. Az $a \cdot b$ eredményét például az 1.6. táblázat második sorából és harmadik oszlopából

\cdot	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

1.6. ábra. A Klein-csoport műveleti táblája.

olvashatjuk le, vagyis $a \cdot b = c$. Ha a K csoport önmagán való hatását tekintjük balról való szorzással (lásd az 1.6. Példát), akkor az 1.6. táblázatban található műveleti tábla a csoportthatást is leírja. A táblázat bal oldalán lévő elemekre, mint a K csoport elemeire tekintünk, amelyek hatnak a táblázat felső részén felsorolt halmazelemekre. Ekkor a táblázat azt mutatja, hogyan cseréli fel a hatás az $\{e, a, b, c\}$ halmaz elemeit. Ez alapján az e hatása a $\sigma_e = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ e & a & b & c \end{pmatrix}$ identikus per-

mutációnak, az a hatása az $\sigma_a = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \end{pmatrix}$ permutációnak, a b hatása a $\sigma_b = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix}$

permutációnak, míg a c hatása a $\sigma_c = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix}$ permutációnak felel meg. Az 1.29. Tétel

alapján $T: K \rightarrow S_K, T(k) = \sigma_k$, minden $k = e, a, b, c$ esetén, egy csoportmorfizmus. A K csoportthatása önmagán ezen T csoportmorfizmus és az S_K csoportnak a $K = \{e, a, b, c\}$ halmazon való hatása (lásd az 1.9. Példát) által van származtatva. \diamond

1.3. Csoportthatással kapcsolatos fogalmak

Ebben a fejezetben csoportthatással kapcsolatosan használt főbb fogalmakat fogunk áttekinteni úgy, mint a pálya, stabilizátor-részcsoporthatás, illetve szabad, tranzitív, hűségű csoportthatások. Legyen (\mathcal{G}, \cdot) egy csoport és $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(g, x) \stackrel{\text{jel.}}{=} g * x$ egy \mathcal{G} -csoportthatás az \mathcal{X} halmazon.

1.3.1. Pálya

Egy $x \in \mathcal{X}$ elem pályája az \mathcal{X} azon részhalmaza, amelynek összes elemét megkaphatjuk a \mathcal{G} elemeivel hatva az x halmazelemre. Mivel a csoportthatásra kétféle jelölést is használhatunk (lásd az 1.1. és 1.2. Értelmezéseket), ezért ezeknek megfelelően a pályát is kétféleképpen vezethetjük be. Mivel $g * x = t(g, x)$, ezért mindkét esetben ugyanarról a részhalmazról beszélünk.

1.31. Értelmezés

Egy $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $(g, x) \mapsto g * x = t(g, x)$ csoportthatás esetén az $x \in \mathcal{X}$ elem *pályája* (vagy *orbitja*)

$$\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \mathcal{G} * x = \{g * x \in \mathcal{X} \mid g \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{X},$$

ha a csoportthatást „ $*$ ” műveletként jelöljük (lásd az 1.2. Értelmezést), és

$$\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = t(\mathcal{G}, x) = \{t(g, x) \in \mathcal{X} \mid g \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{X},$$

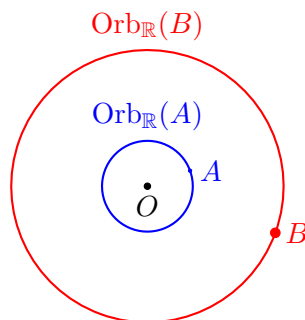
ha a csoportthatást t függvényként jelöljük (lásd az 1.1. Értelmezést). Az *pályák halmaza*

$$\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \{\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén $x = e * x \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$, ezért $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \neq \emptyset$.

1.32. Példa (Rögzített pont körüli forgatás pályái)

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} síkon az $O \in \mathcal{S}$ pont körüli forgatások által. Ezen hatás esetén egy $A \neq O$ pont pályája az O középpontú $|OA|$ sugarú $\mathcal{C}(O, |OA|)$ kör, ahol $|OA|$ az A pont távolsága az O ponttól (az $[OA]$ szakasz hossza), tehát $\text{Orb}(A) = \mathcal{C}(O, |OA|)$. Az $A = O$ pont pályája pedig $\text{Orb}(O) = \{O\}$. Tehát ennek a hatásnak a pályáit az $\{O\}$ halmaz és az O középpontú koncentrikus körök alkotják.



1.7. ábra. A forgatás síkon O pont körül hatás pályái.

1.33. Példa

Az 1.8. Példában a szabad vektorokkal való eltolásokat tekintettük az \mathcal{S} intuitív síkon. Mivel bármely két A és B pont meghatároz egy $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}$ szabad vektort, ezért az A pont eltolható a B pontban az \overrightarrow{AB} vektorral. Tehát tetszőleges $A \in \mathcal{S}$ pont pályája $\text{Orb}_{\mathcal{V}}(A) = \mathcal{S}$. \diamond

1.34. Példa

Az 1.17. Példában egy v iránnyal párhuzamos eltolások hatását tekintettük. Ezen hatás pályái a v iránnyal párhuzamos egyenesek lesznek. \diamond

1.35. Példa

Az 1.15. Példában a $\mathcal{H} = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5\}$ csoport hatását tekintettük az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ hatodrendű permutáció esetén. Ennek a hatásnak a pályáit könnyen leolvashatjuk az 1.3. táblázat oszlopaiból:

$$\text{Orb}_{\mathcal{H}}(1) = \{1, 2, 4\} = \text{Orb}_{\mathcal{H}}(2) = \text{Orb}_{\mathcal{H}}(4), \quad \text{Orb}_{\mathcal{H}}(3) = \text{Orb}_{\mathcal{H}}(6) = \{3, 6\}, \quad \text{Orb}_{\mathcal{H}}(5) = \{5\}.$$

Megjegyezzük, hogy a σ permutáció felírható diszjunkt ciklusok szorzataként $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 6)(5)$, és a ciklusokat alkotó elemek halmazai a pályák. \diamond

1.36. Tulajdonság

- (i) Ha $z \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$, akkor $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(z)$.
- (ii) Ha $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \cap \text{Orb}_{\mathcal{G}}(y) \neq \emptyset$, akkor $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(y)$, tehát a pályák vagy diszjunktak vagy egybeesnek.

Bizonyítás.

- (i) Ha $z \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$, akkor létezik $h \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $z = h * x$, így bármely $g \in \mathcal{G}$ esetén

$$g * z = g * (h * x) = (gh) * x \in \mathcal{G} * x = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x).$$

Tehát $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(z) = \{g * z \mid g \in \mathcal{G}\} \subseteq \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$. Mivel $x = e * x = (h^{-1}h) * x = h^{-1} * (h * x) = h^{-1} * z$, ezért $x \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(z)$, és az előbbi gondolatmenetben felcserélve az x és z szerepét kapjuk, hogy $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \subseteq \text{Orb}_{\mathcal{G}}(z)$. Összegezve $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(z)$.

- (ii) Ha $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \cap \text{Orb}_{\mathcal{G}}(y) \neq \emptyset$, akkor létezik $z \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \cap \text{Orb}_{\mathcal{G}}(y)$. Ekkor előző alpont alapján $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(z) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(y)$. \square

Az \mathcal{X} halmaz felírható pályák diszjunkt uniójaként, vagyis a pályák az \mathcal{X} halmaz egy partícióját adják. Az 1.2.1.3. alfejezetben bevezettük az invariáns részhalmaz fogalmát. Egy részhalmaz akkor és csakis akkor lesz invariáns a hatásra nézve, ha felírható pályák egyesítéseként. Az 1.21. Példában tekintett O középpontú kör és korong invariáns részhalmazok az O körüli forgatások hatására nézve, mivel ezek a halmazok felírhatók O középpontú koncentrikus körök egyesítéseként.

1.37. Példa

Az 1.11. Példában tekintettük a $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ csoport hatását az $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ halmazon balról való szorzással. Ezen hatás esetén

$$\text{Orb}_{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

mert minden $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ invertálható mátrix esetén $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, továbbá minden $v_1 = (a_{11}, a_{21}) \in \mathbb{R}^2$ nemnulla vektor kiegészíthető az \mathbb{R}^2 2-dimenziós valós vektortér egy \mathbf{B} bázisává egy $v_2 = (a_{12}, a_{22})$ vektorral, majd felírva a $T_{\mathbf{EB}} = \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{E}} & [v_2]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix}$ áttérési mátrixot (ahol \mathbf{E} a kanonikus bázis) kapjuk, hogy $T_{\mathbf{EB}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Tehát ennek a hatásnak két pályája van:

$$\text{Orb}_{GL_2(\mathbb{R})}(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\}.$$

Ez azt is jelenti, hogy két adott nemnulla (2×1) -es valós mátrix esetén létezik olyan (2×2) -es invertálható valós mátrix, hogy megszorozva vele az egyiket megkapható a másik. \diamond

1.3.1.1. Csoportthatás által származtatott ekvivalenciareláció

Egy \mathcal{G} -csoportthatás az \mathcal{X} halmazon megad egy „ \sim ” ekvivalenciarelációt ezen a halmazon a következő módon. Értelmezés szerint az $x, y \in \mathcal{X}$ elemek relációban vannak, azaz $x \sim y$, pontosan akkor, ha létezik $g \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $x = g * y$. Arra kérjük az olvasót, hogy igazolja, hogy az így értelmezett reláció egy ekvivalenciareláció. Ezen ekvivalenciareláció faktorhalmazai pontosan a csoportthatás pályái és $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})$ az „ \sim ” ekvivalenciareláció által származtatott partíció az \mathcal{X} halmazon. Mivel az \mathcal{X} halmaz partíciói meghatározzák az \mathcal{X} halmazon értelmezett ekvivalenciarelációkat, ezért a „ \sim ” ekvivalenciareláció úgy is értelmezhető, hogy két elem pontosan akkor van relációban, ha a pályáik megegyeznek.

1.38. Példa

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} síkon O középpontú forgatások által. Ezen hatás esetén két pont pontosan akkor van „ \sim ” relációban, ha ugyanazon az O középpontú körön vannak (az $\{O\}$ halmazt az O középpontú 0 sugarú körnek tekintjük). Az O középpontú és $r \geq 0$ sugarú körök alkotják ezen ekvivalenciarelációhoz rendelt partíciót. \diamond

1.39. Példa

Az 1.15. Példában tárgyalt csoportthatás az $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon azt az ekvivalenciarelációt származtatja, amelynek grafikonja

$$\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 6)\},$$

és partíciója $\text{Orb}_{\mathcal{H}}(\mathcal{X}) = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 6\}, \{5\}\}$. \diamond

1.3.2. Stabilizátor

Egy $x \in \mathcal{X}$ halmazelem stabilizátora azon csoportelemek halmaza, amelyek az x elemet fixen hagyják.

1.40. Értelmezés

Tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén

$$\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{g \in \mathcal{G} \mid g * x = x\} \subseteq \mathcal{G}$$

az x elem *stabilizátora*.

1.41. Példa (Forgatás stabilizátora)

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az \mathcal{S} síkon az $O \in \mathcal{S}$ pont körüli forgatások által, vagyis $\rho: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $\rho(\alpha, A) = \text{Rot}_{O, \alpha}(A)$. Ha az $A \in \mathcal{S}$ pont nem esik egybe az O ponttal, akkor a stabilizátora $\text{Stab}_{\mathbb{R}}(A) = 2\pi\mathbb{Z}$, illetve az O pont stabilizátora $\text{Stab}_{\mathbb{R}}(O) = \mathbb{R}$. \diamond

1.42. Példa

Az 1.15. Példában esetén az 1.3. táblázatból leolvasható, hogy $\text{Stab}_{\mathcal{H}}(1) = \{e, \sigma^3\}$, $\text{Stab}_{\mathcal{H}}(2) = \{e, \sigma^3\}$, $\text{Stab}_{\mathcal{H}}(3) = \{e, \sigma^2, \sigma^4\}$, $\text{Stab}_{\mathcal{H}}(4) = \{e, \sigma^3\}$, $\text{Stab}_{\mathcal{H}}(5) = \{e, \sigma, \dots, \sigma^5\}$ és $\text{Stab}_{\mathcal{H}}(6) = \{e, \sigma^2, \sigma^4\}$. \diamond

1.43. Tulajdonság

Minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ a \mathcal{G} részcsoportha.

Bizonyítás. Minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelemet fixen hagy a csoport $e \in \mathcal{G}$ semleges eleme, vagyis $e * x = x$. Tehát $e \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$, és ezért $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) \neq \emptyset$. Tetszőleges $g_1, g_2 \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ esetén, vagyis ha $g_1 * x = x$ és $g_2 * x = x$, akkor

$$(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) = g_1 * x = x,$$

tehát $g_1 g_2 \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$. Ha $g \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$, vagyis $g * x = x$, akkor

$$x = e * x = (g^{-1} g) * x = g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * x,$$

ezért $g^{-1} \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$. Ezzel beláttunk, hogy $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ részcsoportha a \mathcal{G} -nek, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén. \square

1.44. Tulajdonság

Ha $g * x = y$, akkor $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(y) = g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) g^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)\}$, vagyis adott pálya elemeinek stabilizátorai konjugáltak.

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $g^{-1} * y = g^{-1} * (g * x) = (g^{-1} g) * x = e * x = x$. Kétoldali bennfoglalással fogjuk belátni a $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(y) = g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) g^{-1}$ halmazegyenlőséget. Minden $h \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ esetén

$$(ghg^{-1}) * y = (gh) * (g^{-1} * y) = (gh) * x = g * (h * x) = g * x = y,$$

tehát $ghg^{-1} \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(y)$, ezért $g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) g^{-1} \subseteq \text{Stab}_{\mathcal{G}}(y)$. Fordítva, minden $k \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(y)$ esetén

$$\begin{aligned} k * y = y &\iff k * (g * x) = g * x \iff (kg) * x = g * x \iff \\ &\iff g^{-1} * ((kg) * x) = x \iff (g^{-1} kg) * x = x, \end{aligned}$$

tehát $h \stackrel{\text{ért.}}{=} g^{-1}kg \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$, ahonnan $k = ghg^{-1} \in g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)g^{-1}$, ezért

$$\text{Stab}_{\mathcal{G}}(y) \subseteq g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)g^{-1}.$$

□

1.45. Példa

Az 1.11. Példában tekintettük a $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ csoport hatását az $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ halmazon balról való szorzással. Ezen hatás esetén a stabilizátor csoportok:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = GL_2(\mathbb{R}), \\ \text{Stab}_{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{12} \in \mathbb{R}, a_{22} \in \mathbb{R}^* \right\}. \end{aligned}$$

Ha $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, akkor $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ és $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ezért

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{Stab}_{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \left\{ \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a_{12} \in \mathbb{R}, a_{22} \in \mathbb{R}^* \right\}. \end{aligned}$$

◇

1.3.3. Szabad csoportthatás

Egy csoportthatás szabad, ha csak a csoport semleges eleme hagy fixen halmazelemet.

1.46. Értelmezés

Egy csoportthatás *szabad*, ha valamely $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén $g * x = x$, akkor $g = e$.

Szabad csoportthatás esetén a csoport elemei a semleges elem kivételével nem hagynak fixen egyetlen halmazelemet sem, vagyis ha a $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(g, x) = g * x$ függvénnyel jelöljük a csoportthatást, akkor minden $g \neq e$ esetén a $t_g = t(g, -): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t_g(x) = t(g, x) = g * x$ függvénynek nincs fixpontja. Megjegyezzük, hogy a csoportthatás akkor nem szabad, ha létezik $g \neq e$ csoportelem és létezik $x \in \mathcal{X}$ halmazelem úgy, hogy $g * x = x$.

1.47. Tulajdonság (Szabad csoportthatás jellemzései)

Egy $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás esetén a következő állítások egyenértékűek:

- (i) a csoportthatás szabad;
- (ii) minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{e\}$, azaz a stabilizátor-csoportok triviálisak;
- (iii) minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén, ha $g_1 * x = g_2 * x$, akkor $g_1 = g_2$;
- (iv) minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén a $t(-, x): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(-, x)(g) = t(g, x) = g * x$ függvény injektív.

Bizonyítás.

(i) \Rightarrow (ii) Mivel a csoportthatás szabad, ezért tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén a $g * x = x$ egyenlőség csak a $g = e$ csoportelem esetén áll fenn, tehát

$$\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{g \in \mathcal{G} \mid g * x = x\} = \{e\}.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Rögzített $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén, ha

$$g_1 * x = g_2 * x \iff x = g_1^{-1} * (g_2 * x) \iff x = (g_1^{-1} g_2) * x,$$

akkor a $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{e\}$ feltétel miatt $g_1^{-1} g_2 = e$, vagyis $g_1 = g_2$.

(iii) \Leftrightarrow (iv) Mind a két állítás azt mondja, hogy a $t(-, x)$ függvény injektív, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén.

(iii) \Rightarrow (i) Ha $g * x = x$, akkor az $e * x = x$ miatt $g * x = e * x$, így (iii) alapján $g = e$.

□

1.48. Példa (Forgatás rögzített pont körül)

Az 1.7. Példában vizsgált $(\mathbb{R}, +)$ csoportthatása az \mathcal{S} síkon O középpontú forgatások által nem szabad csoportthatás, mivel $\text{Stab}_{\mathbb{R}}(O) = \mathbb{R} \neq \{0\}$. ◇

1.49. Példa (Szimmetrikus csoport hatása)

Az 1.9. Példában vett $S_{\mathcal{X}}$ szimmetrikus-csoport hatása az \mathcal{X} halmazon nem szabad, ha az \mathcal{X} halmaznak legalább három eleme van. Legyen $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{X}$ három különböző halmazelem és legyen

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad f(x) = \begin{cases} x_2, & \text{ha } x = x_1, \\ x_1, & \text{ha } x = x_2, \\ x, & \text{ha } x \neq x_1, x_2. \end{cases}$$

Ekkor $f \neq 1_{\mathcal{X}}$, $f \in S_{\mathcal{X}}$ (vagyis az f bijektív), továbbá $f(x_3) = x_3$, ezért $f \in \text{Stab}_{S_{\mathcal{X}}}(x_3)$, tehát $\text{Stab}_{S_{\mathcal{X}}}(x_3) \neq \{1_{\mathcal{X}}\}$. ◇

1.50. Példa (Szabad vektorokkal való eltolás síkon)

Az 1.8. Példában tárgyalt szabad vektorok hatása a síkon eltolások által egy szabad csoportthatás, mivel ha $A = t(v, A)$, akkor $v = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. ◇

1.51. Példa (Csoport hatása önmagán szabad)

A \mathcal{G} csoport hasson önmagán balról való szorzással (1.6. Példa). Ez a hatás szabad, mivel tetszőleges $g \in \mathcal{G}$, $x \in \mathcal{G}$ esetén

$$g * x = x \iff g \cdot x = x / \cdot x^{-1} \iff g = e.$$

◇

Az 1.2.1.1, illetve 1.2.1.3 alfejezetekben tekintettük a részcsoporthatást és az invariáns részhalmazra való leszűkített hatást.

1.52. Tulajdonság (Szabadság öröklődik)

Legyen $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy szabad csoportthatás.

- (i) Ekkor a $\mathcal{G}' \leq \mathcal{G}$ részcsoporthatás által származtatott hatás is szabad, vagyis a szabadság öröklődik.
- (ii) Ha $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ egy nemüres invariáns részhalmaz, akkor a \mathcal{G} hatása az \mathcal{X}' részhalmazon is szabad.

Bizonyítás.

- (i) Ha $g' * x = x$, valamely $g' \in \mathcal{G}'$, $x \in \mathcal{X}$ esetén, akkor g' -re úgy tekintve, mint a \mathcal{G} csoport elemére a \mathcal{G} csoportthatás szabadsága miatt következik, hogy $g' = e$, ahol e a \mathcal{G} és \mathcal{G}' csoportok közös semleges eleme.
- (ii) Az $x' \in \mathcal{X}'$ elem $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x') = \{g \in \mathcal{G} \mid g * x' = x'\}$ stabilizátor-részcsoporthatja ugyanaz, ha a \mathcal{G} csoport az \mathcal{X}' részhalmazon hat, illetve ha az eredeti \mathcal{X} halmazon hat. Mivel az eredeti hatás szabad, ezért a közös stabilizátor-csoport triviális (csak a semleges elemből áll), ami azt is jelenti az invariáns részhalmazon való hatás is szabad.

□

1.53. Példa (Részcsoporthatása csoporton)

Ha a \mathcal{G}' részcsoporthat a \mathcal{G} csoporton (mint halmazon) balról való szorzással, akkor ez a hatás szabad az 1.52. Tulajdonság és az 1.51. Példa alapján. ◇

1.54. Példa

Az 1.15. Példában tekintett hatás nem szabad, mivel például σ fixen hagyja az 5-öt. Úgy is belátható, hogy a hatás nem szabad, hogy van olyan stabilizátor, amely nem csak az identikus permutációt tartalmazza. ◇

1.3.4. Tranzitív csoportthatás

A tranzitív csoportthatás azt jelenti, hogy a hatásnak csak egyetlen pályája van, a teljes \mathcal{X} halmaz.

1.55. Értelmezés

Egy $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás *tranzitív*, ha bármely $x, y \in \mathcal{X}$ halmazelemek esetén létezik $g \in \mathcal{G}$ csoportelem úgy, hogy $g * x = y$.

1.56. Tulajdonság (Tranzitív csoportthatás jellemzései)

Egy $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás esetén a következő állítások egyenértékűek:

- (i) a csoportthatás tranzitív;
- (ii) létezik $x \in \mathcal{X}$ halmazelem úgy, hogy $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \mathcal{X}$, vagyis \mathcal{X} egyetlen egy pályából áll;
- (iii) minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \mathcal{X}$;
- (iv) minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem esetén a $t(-, x): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(-, x)(g) = t(g, x) = g * x$ függvény szürjektív.

Bizonyítás.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Ha rögzítjük az x -et, akkor minden $y \in \mathcal{X}$ esetén létezik $g \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $g * x = y$, vagyis $y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$, tehát $\mathcal{X} \subseteq \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$. De $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \subseteq \mathcal{X}$, ezért $\mathcal{X} = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ha létezik $x \in \mathcal{X}$ úgy, hogy $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \mathcal{X}$, akkor minden $y \in \mathcal{X}$ esetén $y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$ és az 1.36. Tulajdonság alapján $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(y) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \mathcal{X}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Mivel $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$ a $t(-, x)$ függvény képe, vagyis $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \text{Im}(t(-, x))$, ezért az $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \mathcal{X}$ feltétel miatt a $t(-, x)$ függvény szürjektív.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Ha minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $t(-, x): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény szürjektív, akkor minden $y \in \mathcal{X}$ esetén létezik $g \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $y = t(g, x) = g * x$, tehát a hatás tranzitív.

□

1.57. Példa (Rögzített pont körüli forgatás)

Az 1.7. Példában tárgyalt forgatás a síkon nem tranzitív, mert az 1.32. Példa alapján a hatás pályái koncentrikus körök, tehát a hatásnak nem csak egyetlen pályája van, a teljes sík. Ellenben az 1.21. Példában tekintett körön való forgatás esetén a hatás tranzitív, mivel csak egyetlen pályája van. A szintén ugyanebben a példában tekintett forgatás a korongon hatás szintén nem tranzitív, mivel a korong is felbomlik több koncentrikus körre. ◇

1.58. Példa (Eltolások síkon)

Az 1.33. Példa alapján a síkon szabad vektorokkal való eltolások hatása tranzitív, míg a síkon adott iránnyal párhuzamos eltolások hatása nem tranzitív. Ez utóbbi esetben a pálya egy egyenes. ◇

1.59. Példa (Csoport hatása önmagán tranzitív)

Az 1.6. Példában a (\mathcal{G}, \cdot) csoport balról való szorzással hat önmagán. Ez a hatás tranzitív, mivel tetszőleges $x, y \in \mathcal{G}$ halmazelemek esetén létezik $g = y \cdot x^{-1} \in \mathcal{G}$ csoportelem úgy, hogy $y = g \cdot x = g * x$. ◇

1.60. Példa (Részcsoporthatása csoporton)

Az 1.13. Példában a (\mathcal{G}, \cdot) csoport egy \mathcal{H} részcsoporthatja hat a \mathcal{G} halmazon balról való szorzással. Ha $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$, akkor a \mathcal{H} részcsoporthatása \mathcal{G} -n nem tranzitív, mivel $\text{Orb}_{\mathcal{H}}(e) = \{h \cdot e \mid h \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H} \neq \mathcal{G}$. ◇

1.61. Példa

Az 1.15. Példában tekintett hatás nem tranzitív, mivel például $\text{Orb}_{\mathcal{H}}(1) = \{1, 2, 4\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ◇

1.3.5. Szabad és tranzitív csoportthatás

Az általános affin teret szabad és tranzitív csoportthatásokkal fogjuk értelmezni, ezért külön kiemeljük az ilyen csoportthatások egy jellemzését. Az 1.47. Tulajdonság (iv) és 1.56. Tulajdonság (iv) alponja alapján kijelenthetjük a következőt.

1.62. Következmény (Szabad és tranzitív hatás jellemzése)

Egy $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás akkor és csakis akkor szabad és tranzitív, ha minden $x \in \mathcal{X}$ esetén a $t(-, x): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(-, x)(g) = t(g, x)$ függvények bijektívek.

1.63. Példa (Eltolás síkon)

Az 1.50. és 1.58. Példák alapján a síkon szabad vektorokkal való eltolás szabad és tranzitív. \diamond

1.64. Példa (Csoport hatása önmagán)

Ha (\mathcal{G}, \cdot) csoport hat önmagán balról való szorzással, akkor ez a hatás szabad és tranzitív az 1.51. és 1.59. Példák alapján. \diamond

1.65. Példa (Vektortér, mint Abel-féle csoport hatása önmagán)

Ha $(\mathcal{V}, +, \cdot, \mathbb{K})$ egy vektortér, akkor sajátosan $(\mathcal{V}, +)$ egy Abel-féle csoport. Az 1.64. Példa alapján ez a csoport hat önmagán balról való összeadással, vagyis

$$t: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad t(v, w) \stackrel{\text{ért.}}{=} v + w, \quad \forall v, w \in \mathcal{V},$$

továbbá ez a hatás szabad és tranzitív. \diamond

1.3.6. Hűségcs csoportthatás

A csoportthatás hűségcs, ha nincs olyan csoportelem a semleges elemen kívül, amely a halmaz összes elemét fixen hagyja.

1.66. Értelmezés

Egy $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás *hűségcs*, ha csak a $g = e$ semleges elem hagyja fixen az \mathcal{X} halmaz összes elemét, vagyis ha minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $g * x = x$, akkor $g = e$.

Ha a $t: \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(g, x) = g * x$ függvénnyel jelöljük a csoportthatást, akkor a hatás pontosan akkor hűségcs, ha minden $g \neq e$ esetén a $t_g = t(g, -): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t_g(x) = t(g, x) = g * x$ függvény nem az identikus függvény, vagyis $t_g \neq 1_{\mathcal{X}}$.

Hűségcs csoportthatásokra a következő jellemezés adható.

1.67. Tulajdonság (Hűségcs hatás jellemzései)

Egy $*$: $\mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ csoportthatás esetén a következők egyenértékűek:

- (i) a csoportthatás hűségcs;
- (ii) a csoportthatáshoz rendel $T: \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{X}}$ csoportmorfizmus magja triviális, vagyis $\ker(T) = \{e\}$;
- (iii) a stabilizátor részcsoportok metszete a triviális részcsoport, vagyis $\bigcap_{x \in \mathcal{X}} \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{e\}$.

Ha a \mathcal{G} csoport hatása az \mathcal{X} halmazon nem triviális, akkor értelmezhető a $\mathcal{G}/\ker(T)$ faktorcsoporthatása az \mathcal{X} -en és ez utóbbi hatás már hűségcs lesz.

1.68. Következmény

- (i) Szabad csoportthatás egyben hűségcs is.
- (ii) Ha egy csoportthatás hűségcs, akkor a részcsoport által származtatott hatás is hűségcs.

Megjegyezzük, hogy nem szabad csoportthatások is lehetnek hűségcsesek.

1.69. Példa

Az 1.7. Példában tekintettük az $(\mathbb{R}, +)$ csoport hatását az intuitív síkon rögzített O pont körüli forgatások által. Ez a hatás nem hűségcs, mert $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatások a sík pontjait fixen hagyják. Az $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ faktorcsoporthatása már hűségcs lesz. \diamond

1.70. Példa

Az 1.9. Példában tekintett S_X szimmetrikus-csoport hatása az X halmazon hűséges, mert ha minden $x \in X$ esetén $ev(f, x) = f(x) = x$, akkor $f = 1_X$. Ez a hatás nem szabad, ha az X halmaznak legalább három eleme van (lásd az 1.49. Példát). \diamond

1.71. Példa

Az 1.6. Példában tekintett csoport hatása önmagán balról való szorzással hűséges hatás, mivel szabad (lásd az 1.51. Példát). \diamond

1.4. Csoporthatások és számlálások

A csoporthatások alkalmazhatók számlálási problémák megoldására. Alapvető eredmények igazolása után megszámoljuk, hogy \mathbb{K} véges test esetén a \mathbb{K} -együtthatós $(n \times n)$ -es invertálható mátrixok $GL_n(\mathbb{K})$ csoportjának hány eleme van, illetve a \mathbb{K}^n n -dimenziós \mathbb{K} test feletti vektortérnek hány eleme van.

Legyen $*$: $\mathcal{G} \times X \rightarrow X$ a \mathcal{G} csoport egy bal oldali hatása az X egy nemüres halmazon.

1.72. Tulajdonság

Ha a \mathcal{G} csoport véges és $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(y)$, vagyis az $x, y \in X$ halmazelemek ugyanahhoz a pályához tartoznak, akkor $|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)| = |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(y)|$, vagyis ezen halmazelemek stabilizátor csoportjainak ugyanannyi eleme van.

Bizonyítás. A $\gamma_g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $\gamma_g(h) = ghg^{-1}$ konjugálás bijektív függvény és az 1.44. Tulajdonság alapján $\gamma_g(\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)) = g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) g^{-1} = \text{Stab}_{\mathcal{G}}(y)$, ahonnan $|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)| = |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(y)|$. \square

1.73. Tétel

Ha a \mathcal{G} csoport véges, akkor

$$|\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)| = \frac{|\mathcal{G}|}{|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|},$$

vagyis az $x \in X$ halmazelem pályájának elemszáma megegyezik a \mathcal{G} csoport elemeinek száma osztva azon csoportelemek számával, amelyek fixen hagyják az x halmazelemet (az x stabilizátor csoportja elemeinek számával).

Bizonyítás. Meg fogjuk számolni, hogy hány olyan csoportelem van, amely az x halmazelemet a pálya egy rögzített $y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$ elemébe képezi. Azt fogjuk belátni, hogy minden $y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$ esetén az ilyen csoportelemek száma $|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|$. Tehát a \mathcal{G} elemeivel hatva az x -re a pályájának minden elemét ugyanannyiszor, $|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|$ -szer kapjuk meg, és innen adódik a keresett formula.

Az $\omega: \mathcal{G} \rightarrow X$, $\omega(g) = g * x$ függvény képe $\text{Im}(\omega) = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) = \{g * x \mid g \in \mathcal{G}\}$. Legyen $g \in \mathcal{G}$ rögzített és $y = g * x$ az x pályájának egy eleme. Jelölje $\omega^{-1}(y) = \{g' \in \mathcal{G} \mid g' * x = y\}$ az y -nak az ω függvény szerinti ősképet, vagyis azon csoportelemek halmazát, amelyekkel x -re hatva y -t kapjuk.

Kétoldali bennfoglalással belátjuk, hogy $\omega^{-1}(y) = g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{gh \mid h \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)\}$. Minden $g' \in \omega^{-1}(y)$ esetén $g' * x = y = g * x$, ahonnan $(g^{-1}g') * x = x$, vagyis $g^{-1}g' = h \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$, ami azt jelenti, hogy $g' = gh \in g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{gh \mid h \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)\}$. Tehát $\omega^{-1}(y) \subseteq g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$. Fordítva, értelmezés szerint minden $g' \in g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ esetén létezik $h \in \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ úgy, hogy

$g' = gh$. Ekkor $g' * x = (gh) * x = g * (h * x) = g * x = y$, ezért $g' \in \omega^{-1}(y)$. Tehát $g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) \subseteq \omega^{-1}(y)$. Ezzel beláttunk, hogy $\omega^{-1}(y) = g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$.

Az $L_g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $L_g(g') = gg'$ függvény bijektív, mert az inverze $L_{g^{-1}}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $L_{g^{-1}}(g') = g^{-1}g'$. Ez a függvény sajátosan a $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)$ halmazt bijektíven a $g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \omega^{-1}(y)$ halmazra képezi, vagyis $L_g(\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)) = g \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \omega^{-1}(y)$, ezért sajátosan $|\omega^{-1}(y)| = |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|$.

Összegezve, eddig beláttuk, hogy minden $y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)$ pályaelem esetén $|\omega^{-1}(y)| = |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|$. Az ω függvény értelmezési tartománya felírható az ősképek diszjunkt uniójaként, ahonnan

$$|\mathcal{G}| = \left| \biguplus_{y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)} \omega^{-1}(y) \right| = \sum_{y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)} |\omega^{-1}(y)| = \sum_{y \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)} |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)| = |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)| \cdot |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|.$$

□

1.74. Tulajdonság

Legyen (\mathcal{G}, \cdot) véges csoport és \mathcal{X} egy nemüres véges halmaz, amelyen a \mathcal{G} csoport szabadon hat.

- (i) Minden $x \in \mathcal{X}$ halmazelem pályája $|\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)| = |\mathcal{G}|$ elemből áll.
- (ii) A hatás pályáinak száma $|\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})| = \frac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{G}|}$.

Bizonyítás.

- (i) Mivel a csoportthatás szabad, ezért $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) = \{e\}$ és az 1.73. Tétel alapján

$$|\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x)| = \frac{|\mathcal{G}|}{|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)|} = |\mathcal{G}|.$$

- (ii) Az 1.36. Tulajdonság alapján az \mathcal{X} halmaz felírható pályák diszjunkt uniójaként, vagyis léteznek $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$ úgy, hogy $\mathcal{X} = \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_1) \uplus \dots \uplus \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_k)$. Következésképpen a pályák halmaza $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \{\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_1), \dots, \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_k)\}$, tehát $|\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})| = k$. Ezek alapján

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}| &= |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_1) \uplus \dots \uplus \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_k)| = |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_1)| + \dots + |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_k)| = \\ &= \underbrace{|\mathcal{G}| + \dots + |\mathcal{G}|}_k = k \cdot |\mathcal{G}| = |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})| \cdot |\mathcal{G}|. \end{aligned}$$

□

1.75. Példa

Az 1.15. Példában tekintettük a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ hatodrendű permutáció által meghatározott $\mathcal{H} = \{e, \sigma, \dots, \sigma^5\}$ csoport hatását az $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. Az 1.35. Példában felsoroltuk ezen hatás pályáit, illetve az 1.42. Példában a stabilizátorait. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ esetén $|\text{Orb}_{\mathcal{H}}(x)| = \frac{|\mathcal{H}|}{|\text{Stab}_{\mathcal{H}}(x)|}$. ◇

1.76. Példa (Egy dimenziós lineáris alterek száma)

Ebben a példában megszámoljuk, hogy egy \mathbb{K} véges test feletti n -dimenziós \mathcal{V} vektortérnek hány 1-dimenziós altere van. Jelölje $q = |\mathbb{K}|$ a véges test elemeinek számát. Előbb meghatározzuk a \mathcal{V} vektorainak számát, amelyre később szükség lesz. A \mathcal{V} és \mathbb{K}^n azonos dimenziós \mathbb{K} -vektorterek, ezért izomorfak, vagyis létezik $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{V}$ bijektív lineáris függvény. Ez alapján

$$|\mathcal{V}| = |\mathbb{K}^n| = \underbrace{|\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}|}_n = \underbrace{|\mathbb{K}| \cdot \dots \cdot |\mathbb{K}|}_n = |\mathbb{K}|^n = q^n.$$

Sajátosan a \mathcal{V} bármely 1-dimenziós alterének $|\mathbb{K}|^1 = q$ vektora van.

Az \mathcal{V} vektortér 1-dimenziós lineáris alterei egyetlen nemnulla vektor által vannak kifeszítve, vagyis minden \mathcal{W} 1-dimenziós lineáris altér esetén létezik $w \neq \vec{0}$ vektor úgy, hogy $\mathcal{W} = \langle w \rangle = \{kw \mid k \in \mathbb{K}\}$. A w vektor a \mathcal{W} 1-dimenziós lineáris altér bázisvektora (1-dimenziós vektorterek bázisai egyetlen bázis vektorból állnak). Megjegyezzük, hogy minden \mathcal{W} -beli nemnulla vektor lehet bázisvektora a \mathcal{W} -nek.

Ha \mathcal{W}_1 és \mathcal{W}_2 a \mathcal{V} vektortér két különböző 1-dimenziós lineáris altere, akkor $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\vec{0}\}$. Valóban, ha létezne $w \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ közös nemnulla vektor, akkor ez a vektor a két 1-dimenziós altér közös bázisvektora lenne, következésképpen $\mathcal{W}_1 = \langle w \rangle = \mathcal{W}_2$, ami ellentmondáshoz vezetne. Összegezve a \mathcal{V} vektortér minden nemnulla vektora pontosan egyetlen 1-dimenziós lineáris alterében van benne. Ez azt jelenti, hogy ha $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k$ a \mathcal{V} vektortér összes 1-dimenziós lineáris altere, akkor $\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\} = (\mathcal{W}_1 \setminus \{\vec{0}\}) \uplus \dots \uplus (\mathcal{W}_k \setminus \{\vec{0}\})$. Ez alapján

$$\begin{aligned} |\mathbb{K}|^n - 1 &= |\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}| = |(\mathcal{W}_1 \setminus \{\vec{0}\}) \uplus \dots \uplus (\mathcal{W}_k \setminus \{\vec{0}\})| \\ &= |\mathcal{W}_1 \setminus \{\vec{0}\}| + \dots + |\mathcal{W}_k \setminus \{\vec{0}\}| \\ &= k \cdot (|\mathbb{K}| - 1), \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy egy n -dimenziós \mathbb{K} -vektortér 1-dimenziós lineáris altereinek száma

$$k = \frac{|\mathbb{K}|^{n-1}}{|\mathbb{K}| - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ugyanezt csoportthatások nyelvén a következőképpen számolhatjuk meg. A \mathcal{V} vektortér minden w nemnulla vektora pontosan egy 1-dimenziós lineáris altér bázis vektora, és pedig $\langle w \rangle = \{kw \mid k \in \mathbb{K}\}$ altérnek. Ha w_1 és w_2 a \mathcal{V} vektortér két nemnulla bázisvektora úgy, hogy $\langle w_1 \rangle = \langle w_2 \rangle$, vagyis ugyanannak az 1-dimenziós lineáris altér bázisvektora, akkor létezik $k \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ skalár úgy, hogy $w_2 = kw_1$. Tekintjük a nemnulla skalárok multiplikatív csoportjának szorzással való hatását a nemnulla vektorokon, vagyis a

$$*: \mathbb{K}^* \times (\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}) \rightarrow (\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}), \quad k * v = kv, \quad \forall k \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \forall v \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\},$$

csoportthatást. Ennek a hatásnak a pályái a lineáris alterek nemnulla vektoraiból (bázisvektoraiból) fognak állni, azaz $\text{Orb}_{\mathbb{K}^*}(w) = \{kw \mid k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} = \langle w \rangle \setminus \{\vec{0}\}$, tehát a pályák száma megegyezik az 1-dimenziós lineáris alterek számával. Ez a hatás szabad. Valóban, a $kv = v$ egyenlőségből következik, hogy $(k - 1)v = \vec{0}$, illetve $k \neq 1$ esetén osztva $(k - 1)$ -gyel $v = \vec{0}$ egyenlőséghez jutunk, ami ellentmondáshoz vezet. Tehát $kv = v$ egyenlőség csak $k = 1$ esetén áll fenn. Az 1.74. Tulajdonság alapján az n -dimenziós \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortér 1-dimenziós lineáris altereinek száma

$$|\text{Orb}_{\mathbb{K}^*}(\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\})| = \frac{|\mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}|}{|\mathbb{K}^*|} = \frac{|\mathbb{K}|^n - 1}{|\mathbb{K}| - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Például $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ véges testnek 5 eleme van és egy 2-dimenziós \mathbb{Z}_5 -feletti vektortérnek (mint például \mathbb{Z}_5^2 vektortérnek) $\frac{5^2-1}{5-1} = \frac{24}{4} = 6$ darab 1-dimenziós lineáris altere van. Egy 3-dimenziós \mathbb{Z}_5 -feletti vektortérnek (mint például \mathbb{Z}_5^3 vektortérnek) $\frac{5^3-1}{5-1} = \frac{124}{4} = 31$ darab 1-dimenziós lineáris altere van. ◇

1.77. Tétel (Burnside)

A \mathcal{G} véges csoport hasson az \mathcal{X} véges halmazon. Jelölje $\mathcal{X}_g = \{x \in \mathcal{X} \mid g * x = x\}$ azon elemek halmazát, amelyeket a g csoportelem fixen hagy (a t_g függvény fixpontjainak halmaza). Ekkor a pályák száma

$$|\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})| = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} |\mathcal{X}_g|.$$

Bizonyítás. Legyen a pályák halmaza $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \{\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_1), \dots, \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_k)\}$, vagyis a hatásnak k darab pályája van. Mivel $|\{g\} \times \mathcal{X}_g| = |\{g\}| \cdot |\mathcal{X}_g| = 1 \cdot |\mathcal{X}_g| = |\mathcal{X}_g|$, minden $g \in \mathcal{G}$ esetén, ezért az $\mathcal{X}_g \subseteq \mathcal{X}$ halmazok helyett a vele megegyező számosságú $\{g\} \times \mathcal{X}_g \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{X}$ halmazokat fogjuk tekinteni, minden $g \in \mathcal{G}$. Ekkor

$$\bigsqcup_{g \in \mathcal{G}} \{g\} \times \mathcal{X}_g = \{(g, x) \in \mathcal{G} \times \mathcal{X} \mid g * x = x\} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{X}} \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) \times \{x\},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{g \in \mathcal{G}} |\mathcal{X}_g| &= \sum_{g \in \mathcal{G}} |\{g\} \times \mathcal{X}_g| = \left| \bigsqcup_{g \in \mathcal{G}} \{g\} \times \mathcal{X}_g \right| = \left| \bigsqcup_{x \in \mathcal{X}} \text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) \times \{x\} \right| = \sum_{x \in \mathcal{X}} |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) \times \{x\}| \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)| \stackrel{(\dagger)}{=} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_i)} |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)| \stackrel{(\ddagger)}{=} \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_i)} |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x_i)| \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^k |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_i)| \cdot |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x_i)| = \sum_{i=1}^k |\mathcal{G}| = k \cdot |\mathcal{G}|, \end{aligned}$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy az \mathcal{X} halmaz felírható pályák diszjunkt uniójaként, a (\ddagger) egyenlőségben minden $x \in \text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_i)$ pályaelem esetén $|\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)| = |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x_i)|$ az 1.72. Tulajdonság alapján, végül pedig $|\mathcal{G}| = |\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x_i)| \cdot |\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x_i)|$ az 1.73. Tétel alapján. A kapott egyenlőségből adódik a tétel állítása. \square

1.4.1. Véges test feletti invertálható mátrixok száma

Legyen \mathbb{K} egy q elemű véges (kommutatív) test. Az olvasó gondolhat a \mathbb{Z}_p maradékosztályok testére, ahol p prím, (a $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \dots$ testekre). A \mathbb{Z}_p testnek p eleme van. Továbbá legyen $GL_n(\mathbb{K})$ a \mathbb{K} -együtthatós $(n \times n)$ -es invertálható mátrixok halmaza. A célunk meghatározni a $GL_n(\mathbb{K})$ elemeinek számát. A kapott eredmény felhasználjuk a n -dimenziós \mathbb{K} -vektorterek k -dimenziós lineáris altereinek megszámlálásánál.

A $GL_n(\mathbb{K})$ csoport a mátrixok szorzására nézve. Ez a $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ csoport hat a \mathbb{K} -együtthatós $(n \times 1)$ -es oszlopmátrixok $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ halmazán balról való szorzással:

$$*: GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad A * b \stackrel{\text{ért.}}{=} Ab, \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \forall b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Jelölje $o = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ a nulla oszlopmátrixot és $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ azt az oszlopmátrixot, amelynek legfelső együtthatója $1 \in \mathbb{K}$ (a test egységelem) és a többi együttható 0. Az $e_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ halmazelem pályája a nemnulla oszlopmátrixok halmaza, vagyis

$$\text{Orb}_{GL_n(\mathbb{K})}(e_1) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{o\},$$

amely azt jelenti, hogy minden $\alpha_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ nemnulla oszlop mátrix esetén létezik olyan $A \in GL_n(\mathbb{K})$, hogy

$$\alpha_1 = Ae_1 \iff \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ egy \mathbb{K} -feletti vektortér és minden $\alpha_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ nemnulla vektor kiegészíthető az $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ egy $\mathbf{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ bázisává. Ezekből az oszlopvektorokból alkotott A mátrix invertálható, vagyis $A \in GL_n(\mathbb{K})$, továbbá teljesíti az $\alpha_1 = Ae_1$ feltételt.

Kiszámoljuk az e_1 halmazelem stabilizátor-csoportját:

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(e_1) &= \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid Ae_1 = e_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \in GL_{n-1}(\mathbb{K}), A_{12}, \dots, A_{1n} \in \mathbb{K} \right\}. \end{aligned}$$

A stabilizátor-csoport elemeinek száma

$$|\text{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(e_1)| = |GL_{n-1}(\mathbb{K})| \cdot |\mathbb{K}|^{n-1} = |GL_{n-1}(\mathbb{K})| \cdot q^{n-1}.$$

Az 1.73. Tétel alapján a következő rekurziót írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} |GL_n(\mathbb{K})| &= |\text{Orb}_{GL_n(\mathbb{K})}(e_1)| \cdot |\text{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(e_1)| \\ &= |\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{o\}| \cdot |GL_{n-1}(\mathbb{K})| \cdot |\mathbb{K}|^{n-1} \\ &= (|\mathbb{K}|^n - 1) \cdot |GL_{n-1}(\mathbb{K})| \cdot |\mathbb{K}|^{n-1} \\ &= |GL_{n-1}(\mathbb{K})| \cdot (q^n - 1) \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

Mivel $GL_1(\mathbb{K}) = \{[A_{11}] \mid A_{11} \in \mathbb{K}^*\}$, ezért $|GL_1(\mathbb{K})| = |\mathbb{K}| - 1 = q - 1$. Megoldva a

$$|GL_1(\mathbb{K})| = q - 1, \quad |GL_n(\mathbb{K})| = |GL_{n-1}(\mathbb{K})| \cdot (q^n - 1) \cdot q^{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

rekurziót kapjuk, hogy a \mathbb{K} -együtthatós invertálható $(n \times n)$ -es mátrixok száma

$$|GL_n(\mathbb{K})| = \prod_{i=1}^n (q^i - 1) \cdot q^{i-1} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^{n-1} - 1), \quad (1.5)$$

minden $n \geq 1$ esetén, és ahol $q^0 = 1$. Megjegyezzük, hogy a \mathbb{K} -együtthatós $(n \times n)$ -es mátrixok száma $|\mathcal{M}_n(\mathbb{K})| = q^{n^2}$. Például

$$\begin{aligned} |GL_2(\mathbb{Z}_2)| &= (2^2 - 1) \cdot 2^{2-1} \cdot (2^1 - 1) = 6, & |\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)| &= 2^{2^2} = 16, \\ |GL_3(\mathbb{Z}_2)| &= (2^3 - 1) \cdot 2^{3-1} \cdot |GL_2(\mathbb{Z}_2)| = 168, & |\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)| &= 2^{3^2} = 512, \\ |GL_n(\mathbb{Z}_2)| &= \prod_{i=1}^n (2^i - 1) \cdot 2^{i-1} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} (2^2 - 1)(2^3 - 1) \dots (2^{n-1} - 1), & |\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_2)| &= 2^{n^2} = 2^{n^2}. \end{aligned}$$

1.4.2. Véges test feletti vektortér lineáris altereinek száma

Ebben az alfejezetben megszámláljuk, hogy egy q elemű \mathbb{K} véges test feletti n -dimenziós vektortérnek hány k -dimenziós lineáris altere van. Ha \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér, akkor jelölje $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ a \mathcal{V} vektortér lineáris altereinek, illetve $\mathcal{L}_k(\mathcal{V})$ a k -dimenziós lineáris altereinek halmazát. Bármely két n -dimenziós \mathbb{K} -vektortér lineárisan izomorf, így mindkettőnek ugyanannyi k -dimenziós lineáris altere van. Emiatt tekintsük a \mathbb{K} együtthatós $(n \times 1)$ -es oszlopmátrixok $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vektortérét. Minden k -dimenziós lineáris alternak van k darab vektorból álló bázisa, a mi esetünkben ezek a bázisvektorok nemnulla oszlopmátrixok. Ezekből az oszlop mátrixokból alkothattunk egy $(n \times k)$ -ás mátrixot. Ugyanakkor minden k rangú \mathbb{K} -együtthatós $(n \times k)$ -ás mátrix oszlopai az $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vektortér egy k -dimenziós lineáris alterének egy bázisát alkotják. Jelölje $\mathcal{N}_{n,k} = \{B \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K}) \mid \text{rang } B = k\}$ a k rangú \mathbb{K} -együtthatós $(n \times k)$ -ás mátrixok halmazát. Az $\mathcal{N}_{n,k}$ elemeire úgy gondolhatunk, mint a k -dimenziós lineáris alterek bázisaira. Csoportthatás segítségével előbb meghatározzuk az $\mathcal{N}_{n,k}$ elemeinek számát, s majd ebből számoljuk ki k -dimenziós lineáris alterek számát.

Tekintsük a $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ multiplikatív csoport hatását az $\mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})$ halmazon balról való szorzással:

$$*: GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}), \quad A * B \stackrel{\text{ért.}}{=} AB, \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}).$$

Megmutatjuk, hogy ez a hatás tranzitív. Legyen $E = [E_{i,j}] \in \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})$ az a mátrix, amelynek a főátlón lévő együtthatói 1-esek és többi együtthatója 0. Tetszőleges $B = [B_{i,j}] \in \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})$ mátrix esetén létezik $A = [A_{i,j}] \in GL_n(\mathbb{K})$ mátrix úgy, hogy

$$B = AE \iff \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kk} \\ B_{k+11} & B_{k+12} & \dots & B_{k+1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \\ A_{k+11} & A_{k+12} & \dots & A_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a szorzást kapjuk, hogy az A mátrix első k oszlopa meg kell egyezzen a B mátrix megfelelő oszlopaival. Mivel a B mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, ezért kiegészíthetők $(n - k)$ darab oszlopmátrix segítségével az $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n -dimenziós vektortér egy bázisává. Ezt az $(n - k)$ oszlopmátrixot írva az A mátrix utolsó $(n - k)$ oszlopába egy $A \in GL_n(\mathbb{K})$ (invertálható) mátrixot kapunk, amely teljesíti a $B = AE$ feltételt, így belátva, hogy a hatásnak egyetlen pályája van. Az 1.73. Tétel alkalmazásához meghatározzuk az E halmazelem stabilizátorát.

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(E) &= \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid AE = E\} = \\ &= \left\{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \\ A_{k+11} & A_{k+12} & \dots & A_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & 0 & A_{1k+1} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & A_{kk+1} & \dots & A_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1k+1} & \dots & A_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{nk+1} & \dots & A_{nn} \end{array} \right] \mid \left[\begin{array}{ccc} A_{1k+1} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{kk+1} & \dots & A_{kn} \\ A_{k+1k+1} & \dots & A_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{nk+1} & \dots & A_{nn} \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K}), \right. \\ \left. \left[\begin{array}{ccc} A_{1k+1} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{kk+1} & \dots & A_{kn} \\ A_{k+1k+1} & \dots & A_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{nk+1} & \dots & A_{nn} \end{array} \right] \in GL_{n-k}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Az (1.5) egyenlőség alapján

$$|\text{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(E)| = |\mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})| \cdot |GL_{n-k}(\mathbb{K})| = q^{k(n-k)} \cdot q^{\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n-k} (q^j - 1).$$

Az 1.73. Tétel alapján a k -dimenziós altereket kifeszítő bázisok száma

$$|\mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})| = |\text{Orb}_{GL_n(\mathbb{K})}(E)| = \frac{|GL_n(\mathbb{K})|}{|\text{Stab}_{GL_n(\mathbb{K})}(E)|} \\ = \frac{q^{\frac{(n+1)n}{2}} \cdot \prod_{i=1}^n (q^i - 1)}{q^{k(n-k)} \cdot q^{\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{n-k} (q^j - 1)} = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \prod_{\ell=n-k+1}^n (q^\ell - 1).$$

Egy rögzített k -dimenziós alternek ugyanannyi bázisa van, mint ahány áttérési mátrix van, vagyis $|GL_k(\mathbb{K})| = q^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \prod_{i=1}^k (q^i - 1)$ darab. A bázisok számát elosztva az ugyanazt az alteret kifeszítő bázisok számával kapjuk a k -dimenziós lineáris alterek számát:

$$|\mathcal{L}_k(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))| = \frac{|\mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})|}{|GL_k(\mathbb{K})|} = \frac{q^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \prod_{\ell=n-k+1}^n (q^\ell - 1)}{q^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \prod_{i=1}^k (q^i - 1)} = \frac{\prod_{\ell=n-k+1}^n (q^\ell - 1)}{\prod_{i=1}^k (q^i - 1)} \\ = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)}.$$

Ezt csoportthatás segítségével a következőképpen számolhatjuk ki. Tekintjük a $(GL_k(\mathbb{K}), \cdot)$ csoport következő hatását az $\mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})$ halmazon:

$$*: GL_k(\mathbb{K}) \times \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}), \quad C * B \stackrel{\text{ért.}}{=} BC^{-1}, \quad \forall C \in GL_k(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}).$$

Ennek a hatásnak a pályái az ugyanazt a k -dimenziós lineáris alteret generáló bázisokból (mátrixokból) állnak. Így a pályák száma adja meg a k -dimenziós lineáris alterek számát. Ez a hatás szabad. Valóban, legyenek $B \in \mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})$ és $C \in GL_k(\mathbb{K})$ úgy, hogy $B = BC^{-1}$. A B mátrix rangja k , ezért létezik egy $(k \times k)$ -ás almátrixa, amely determinánsa nem nulla. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez az almátrix a B első k sorából és oszlopából áll, amelyet B' -vel jelölünk. A $B = BC^{-1}$ összefüggésből kapjuk, hogy $B' = B'C^{-1}$, amelyet balról szorozva B' inverzével adódik, hogy $C^{-1} = I_k$, tehát $C = I_k$. Az 1.74. Tulajdonság alapján a pályák vagyis a k -dimenziós lineáris alterek száma

$$|\mathcal{L}_k(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))| = |\text{Orb}_{GL_k(\mathbb{K})}(\mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K}))| = \frac{|\mathcal{N}_{n,k}(\mathbb{K})|}{|GL_k(\mathbb{K})|} = \frac{q^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \prod_{\ell=n-k+1}^n (q^\ell - 1)}{q^{\frac{(k+1)k}{2}} \cdot \prod_{i=1}^k (q^i - 1)} \\ = \frac{\prod_{\ell=n-k+1}^n (q^\ell - 1)}{\prod_{i=1}^k (q^i - 1)} = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)}.$$

1.78. Tulajdonság (Véges test feletti vektortér k -dimenziós altereinek száma)

Legyen \mathbb{K} egy q elemű véges test és \mathcal{V} egy n -dimenziós \mathbb{K} -feletti vektortér. Ekkor a \mathcal{V} vektortér k -dimenziós lineáris altereinek száma

$$|\mathcal{L}_k(\mathcal{V})| = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Például egy q elemű \mathbb{K} véges test feletti 3-dimenziós vektortérnek $\frac{(q^3-1)(q^2-1)}{(q^2-1)(q-1)} = \frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$ darab 2-dimenziós altere van. A $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ test esetén ez a szám $2^2 + 2 + 1 = 7$.

2. fejezet

Általános affin tér

Ebben a fejezetben értelmezzük az általános affin tér fogalmát. Megszerkesztjük az érintőterét egy pontban, amely által egy vektortér struktúrát tudunk értelmezni az affin téren. Végül értelmezzük az affin kombináció, baricentrum fogalmát, amely hasonló szerepet fog betölteni az affin geometriában, mint a lineáris kombináció a lineáris algebrában.

2.1. Általános affin tér értelmezése

Az analitikus mértanban használtatok az intuitív sík és tér fogalmát. Tudnátok pontos értelmezést, jellemzést adni rájuk? Az intuitív jelző azt jelentette, hogy van egy elképzelésünk a síkról és a térről, de nem tudjuk matematikailag teljesen precízen megfogalmazni őket. A geometriai intuíciónak kiindulva, a szabad vektorok bevezetésével a lineáris algebra nyelvére fordítottátok a geometriai fogalmakat. Megfordítva ezt a szemléletet precízen felépíthetjük és általánosíthatjuk a korábban tanult geometriát.

Az általános affin tér olyan ponthalmaz, amelyen értelmezett a pontok egy adott vektortér vektoraival való eltolása, továbbá bármely két pont esetén egyetlen vektor létezik, amely az első pontot eltolással a másikba képezi. Ezt formálisan a csoporthatások nyelvén úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a vektortér, mint additív csoport szabadon és tranzitívan hat a pontok halmazán.

Legyen \mathbb{K} egy kommutatív test. Emlékeztetünk, hogy ha \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér, akkor sajátosan $(\mathcal{V}, +)$ egy kommutatív csoport, amelynek semleges eleme a $\vec{0}$ -val jelölt nullvektor.

2.1. Értelmezés

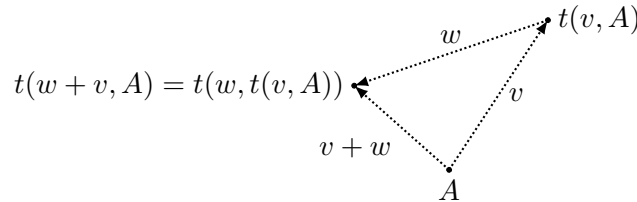
Az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ hármast \mathbb{K} -feletti *általános affin térnek* nevezzük, ha \mathcal{X} egy nemüres halmaz, $\vec{\mathcal{X}}$ egy \mathbb{K} -vektortér és $t : \vec{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy szabad és tranzitív csoporthatás. Az \mathcal{X} halmaz az affin tér *alaptere* és elemei az affin tér *pontjai*, az $\vec{\mathcal{X}}$ vektortér az affin tér *iránytere*, amelyet még $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ -szel is fogunk jelölni. A $t_v = t(v, -) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvényre úgy tekinthetünk, mint az iránytér $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorával való eltolásra.

2.2. Értelmezés

Az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér *dimenziója* alatt az irányterének dimenzióját értjük, vagyis $\dim \mathcal{X} \stackrel{\text{ért.}}{=} \dim_{\mathbb{K}} \vec{\mathcal{X}}$.

A csoporthatás és vele kapcsolatos fogalmak lehetővé tették az affin tér tömör értelmezését. A következőkben ezt az értelmezést fogjuk kibontani. A t csoporthatás lehetővé teszi, hogy az $\vec{\mathcal{X}}$

vektortér vektoraival eltolhassuk az \mathcal{X} alaptér bármely pontját. Affin tér esetén a csoportthatás első tulajdonsága úgy fogalmazható meg, hogy két vektor összegével való eltolás megvalósítható úgy, hogy egymás után hajtuk végre a két vektorral való eltolást, vagyis $t(w+v, A) = t(w, t(v, A))$, minden $v, w \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorok és minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén. A csoportthatás második tulajdonsága azt jelenti, hogy a nullvektorral való eltolás fixen hagy minden pontot, vagyis $t(\vec{0}, A) = A$, minden A pont esetén. A t hatás szabad és tranzitív, ezért tetszőlegesen rögzített A pontot esetén a



2.1. ábra. Eltolás összegvektorral.

$t(-, A) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(-, A)(v) = t(v, A)$ megfeleltetés bijektív (lásd az 1.62. Következmenyt). Sajátosan ez azt jelenti, hogy minden $B \in \mathcal{X}$ pont esetén létezik egyetlen $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor úgy, hogy az A pontot eltolva a v vektorral a B pontot kapjuk, vagyis $B = t(v, A)$. Erre a v vektorra az analitikus mértanban megszokott \overrightarrow{AB} jelölést használjuk. Tehát $v = \overrightarrow{AB}$ pontosan akkor, ha $B = t(v, A)$. Azt a függvényt, amely az $(A, B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ pontpárnak megfeleltetni az \overrightarrow{AB} vektort az affin tér *struktúrafüggvényének* nevezzük:

$$\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}, \quad \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}. \quad (2.1)$$

Az affin geometriában a φ struktúrafüggvény írja le a kötött vektorok (pontpárok) és a szabad vektorok (iránytér vektorai) közötti megfeleltetést.

2.3. Tulajdonság (Struktúrafüggvény jellemzése)

A (2.1) által értelmezett $\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ struktúrafüggvényre teljesülnek a következők:

- (i) minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén a $\varphi(A, -) : \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\varphi(A, -)(B) = \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$ függvények bijektívek;
- (ii) minden $A, B, C \in \mathcal{X}$ pontok esetén $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ (Chales-szabály), vagyis

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad (\text{háromszög-szabály})$$

Megjegyezzük, hogy az általános affin tér értelmezhető csoportthatás helyett struktúrafüggvény segítségével is, azaz olyan φ függvénnyel, amelyre teljesül a 2.3. Tulajdonság. A csoportthatással és struktúrafüggvénnyel megadott affin terek egyenértékűek, egyikből megszerkeszthető a másik és fordítva.

A t hatás és a φ struktúrafüggvény között a következő kapcsolat áll fenn, amelyet a későbbiekben gyakran fogunk használni.

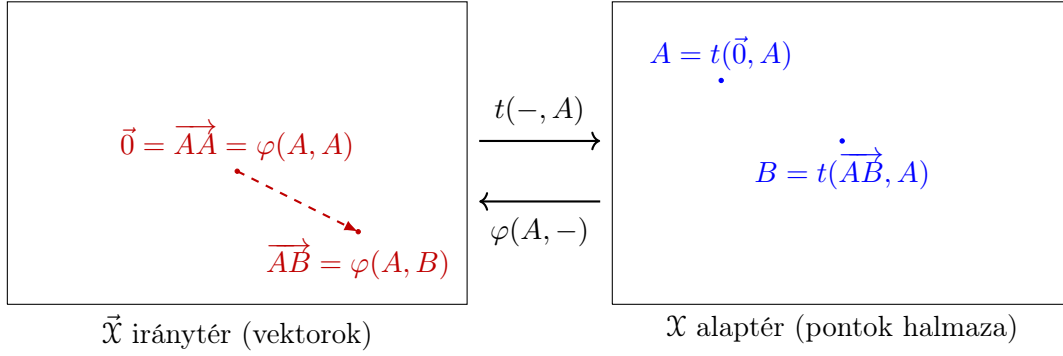
2.4. Lemma (Az eltolás és struktúrafüggvény közötti kapcsolat)

Minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén a $\varphi(A, -) : \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\varphi(A, -)(B) = \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$ függvény a $t(-, A) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(-, A)(v) = t(v, A)$ függvény inverze, azaz $t(A, -)^{-1} = \varphi(A, -)$, minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén.

Bizonyítás. Minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $t(\overrightarrow{AB}, A) = B$, így a $t(-, A)$ függvény bijektivitása miatt

$$t(-, A)^{-1}(B) = \overrightarrow{AB} = \varphi(A, B) = \varphi(A, -)(B),$$

ahonnan következik, hogy minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén a $\varphi(A, -)$ függvény a $t(-, A)$ függvény inverze. \square



2.2. ábra. A $t(-, A)$ és $\varphi(A, -)$ függvények egymás inverzei.

A 2.3. Tulajdonság bizonyítása.

- (i) A 2.4. Lemma alapján a $\varphi(A, -): \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ függvények bijektívek, minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén.
- (ii) Az $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{X}}$ az a vektor, amellyel eltolva az A pontot a B pontot kapjuk, vagyis $B = t(\overrightarrow{AB}, A)$. Hasonlóan, $C = t(\overrightarrow{BC}, B)$ és $C = t(\overrightarrow{AC}, A)$. Mivel t csoportthatás és a vektorok összeadása kommutatív, ezért

$$t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, A) = t(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}, A) = t(\overrightarrow{BC}, t(\overrightarrow{AB}, A)) = t(\overrightarrow{BC}, B) = C.$$

Tehát $t(\overrightarrow{AC}, A) = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, A)$, továbbá a t hatás szabad, így a $t(-, A): \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény injektív, ahonnan következik, hogy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. \square

Az általános affin téren a háromszög-szabályon kívül teljesülnek a következő alapvető összefüggések, amelyeket az analitikus mértanban is gyakran használunk.

2.5. Tulajdonság

Legyen $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ egy általános affin tér.

- (i) Minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, ahol $\vec{0} \in \vec{\mathcal{X}}$ az iránytér nullvektora.
- (ii) Minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Bizonyítás.

- (i) A háromszög-szabályban $A = B = C$ választással kapjuk, hogy $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, ahonnan mindkét oldalból kivonva az \overrightarrow{AA} vektort kapjuk, hogy $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- (ii) A három-szabályban $C = A$ esetén kapjuk, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, ahonnan $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, így $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

\square

2.6. Példa (Intuitív sík)

Legyen \mathcal{S} az intuitív sík és $\mathcal{K}_{\mathcal{S}} = \{(A, B) \mid (A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}\} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ az \mathcal{S} sík kötött vektorainak halmaza. A kötött vektorok $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ halmazán értelmezték az ekvipolencia-relációt: $(A, B) \sim (C, D)$ pontosan akkor, ha az $[AD]$ és $[BC]$ szakaszok felezőpontjai egybeesnek. Az így értelmezett ekvipolencia-reláció egy ekvivalenciareláció. Az (A, B) kötött vektor által meghatározott ekvivalenciaosztály az \overrightarrow{AB} -vel jelölt szabad vektor. Tehát a $\mathcal{V} = \mathcal{K}_{\mathcal{S}} / \sim$ faktorhalmaz a szabad vektorok halmaza, amely egy valós vektortér lesz. A sík pontjai eltolhatók szabad vektorokkal, vagyis tetszőleges A pont és v szabad vektor esetén létezik egyetlen olyan B pont úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = v$. Ez alapján a szabad vektorok $(\mathcal{V}, +)$ additív csoportja hat az \mathcal{S} síkon (lásd az 1.8. Példát). Ez a hatás szabad és tranzitív, mivel rögzített A pontra és tetszőleges B pont esetén létezik egyetlen olyan v szabad vektor, amelyre $\overrightarrow{AB} = v$. Tehát az \mathcal{S} intuitív sík meghatároz egy $(\mathcal{S}, \mathcal{V}, t)$ valós általános affin teret. Ezen általános affin tér struktúrafüggvénye a $\varphi: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$ faktorleképezés a kötött vektorok halmazáról a szabad vektorok halmazára. \diamond

2.7. Példa (Vonalzó és farúd)

A következő hétköznapiabb példával szeretnénk érthetőbbé tenni az általános affin tér értelmezését és alkotó elemei közötti kapcsolatot. Tekintsünk egy végtelen hosszúságú farúdat és egy végtelen hosszúságú vonalzót. A farúd fog megfelelni az \mathcal{X} alaptérnek, a farúd élén ceruzával megjelölhetjük a pontokat. A vonalzó játsza az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér szerepét és ebben az esetben 1-dimenziós valós vektortérként gondolunk rá. A zérus beosztás felel meg a nullvektornak, a többi beosztás mellett álló számokra, mint vektorokra gondolunk. Adott egy A pontunk a farúdon és meg szeretnénk szerkeszteni a farúdon a tőle v irányba lévő pontot. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a farúd mellé helyezzük a vonalzót úgy, hogy az A ponthoz kerüljön a zérus beosztás, majd megjelöljük a farúdon a vonalzó v beosztásának helyét, így kapva a $B = t(v, A)$ pontot a farúdon. A vonalzó farúd mellé helyezése egyértelmű, nem forgatható el, csak csúsztatható a farúd mentén. Ha $v = \vec{0}$, akkor a B pont egybeesik az A -val, tehát teljesül a csoportthatás második feltétele. Ha pedig C egy harmadik pont, amelyet B -től w irányba mértünk fel, akkor C az A ponttól $v + w$ irányba van felmérve, vagyis teljesül a csoportthatás első feltétele. A feltétel, hogy a csoportthatás szabad és tranzitív azt jelenti, hogy a farúd minden pontja egyértelműen felmérhető az A ponthoz viszonyítva a vonalzó segítségével. \diamond

2.1.1. Vektortérhez rendelt affin tér értelmezése

Egy vektortérhez természetes módon hozzárendelhetünk egy affin teret is a következőképpen. Ha \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér, akkor sajátosan $(\mathcal{V}, +)$ egy kommutatív csoport. Az 1.6. Példa alapján

$$t: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad t(u, v) \stackrel{\text{ért.}}{=} u + v$$

egy csoportthatás értelmez, ahol a $(\mathcal{V}, +)$ csoport hat a \mathcal{V} halmazon. Ez a hatás szabad (1.51. Példa) és tranzitív (1.59. Példa). Ez alapján a \mathcal{V} vektortérhez kanonikus módon hozzárendelhető a csoportthatással értelmezett $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, t)$ affin tér, melyet a \mathcal{V} vektortérhez rendelt affin térnek vagy röviden \mathcal{V} affin térnek nevezünk. A \mathcal{V} affin tér alaptere is \mathcal{V} (mint halmaz) és az iránytere is \mathcal{V} (mint vektortér). Tehát a \mathcal{V} vektoraira úgy is tekinthetünk, mint pontokra (vagy helyzetvektorokra) és úgy is, mint vektorokra (szabad vektorokra), de ez általában nem okoz zavart. A vektortérhez rendelt affin tér struktúrafüggvénye

$$\varphi: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \varphi(v, w) = \overrightarrow{vw} = w - v,$$

mivel $w = t(\overrightarrow{v\vec{w}}, v) = \overrightarrow{v\vec{w}} + v$.

Sajátosan a $\mathbb{K}^n = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}\}$ \mathbb{K} -vektortér esetén az eltolás

$$t: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad t((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$

és a struktúrafüggvény

$$\varphi: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \varphi((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) = (w_1 - v_1, \dots, w_n - v_n).$$

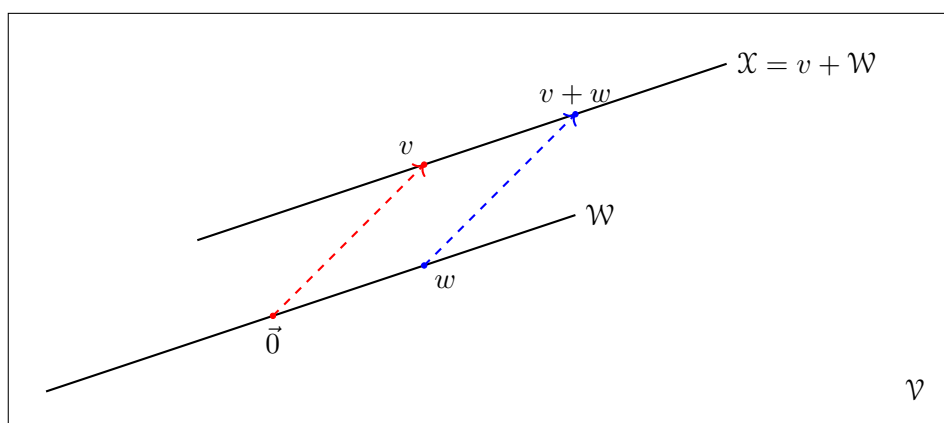
Az általunk használt példákban leggyakrabban az \mathbb{R}^n valós vektortérhez ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), illetve a \mathbb{Z}_p^n vektortérhez ($\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, ahol p prímszám) rendelt affin terekkel dolgozunk.

2.1.2. Lineáris altér eltoltja, mint affin tér

Legyen \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér, amelynek $v \in \mathcal{V}$ egy rögzített vektora és \mathcal{W} a \mathcal{V} egy lineáris altere. Az

$$\mathcal{X} = v + \mathcal{W} = \{v + w \in \mathcal{V} \mid w \in \mathcal{W}\}$$

halmaz a \mathcal{W} lineáris altér eltoltja a v vektorral. Ha $v \notin \mathcal{W}$, akkor \mathcal{X} nem lineáris altere a \mathcal{V}



2.3. ábra. Vektortér lineáris alterének eltoltja.

vektortérnek, ellenben értelmezhető egy t csoporthatás úgy, hogy $(\mathcal{X}, \mathcal{W}, t)$ affin tér legyen:

$$t: \mathcal{W} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad t(w, x) = x + w, \quad \forall w \in \mathcal{W}, \forall x \in \mathcal{X}.$$

A t függvény jól értelmezett, mert az $\mathcal{X} = v + \mathcal{W}$ halmaz értelmezése alapján létezik $w' \in \mathcal{W}$ úgy, hogy $x = v + w'$, ezért

$$t(w, x) = x + w = (v + w') + w = v + (w' + w) \in \mathcal{X} = v + \mathcal{W}.$$

A t függvény valóban egy csoporthatás, mivel

(i) minden $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$t(w_1 + w_2, x) = x + (w_1 + w_2) = (x + w_2) + w_1 = t(w_2, x) + w_1 = t(w_1, t(w_2, x));$$

(ii) minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $t(\vec{0}, x) = \vec{0} + x = x$.

A t csoportthatás szabad, mert minden $x, y \in \mathcal{X}$ esetén

$$t(w, x) = x \iff x + w = x \text{ / } -x \iff w = \vec{0}.$$

A t csoportthatás tranzitív is, mert minden $x_1 = v + w_1, x_2 = v + w_2 \in \mathcal{X} = v + \mathcal{W}$ halmazelemek esetén létezik $w = w_2 - w_1 \in \mathcal{W}$ vektor úgy, hogy $t(w, x_1) = (v + w_1) + (w_2 - w_1) = v + w_2 = x_2$. Ezen affin tér struktúrafüggvénye

$$\varphi: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}, \quad \varphi(x_1, x_2) = x_2 - x_1, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}.$$

Valóban, minden $x_1, x_2 \in \mathcal{X} = x + \mathcal{W}$ esetén létezik $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ úgy, hogy $x_1 = x + w_1$ és $x_2 = x + w_2$, továbbá $x_2 = x + w_2 = (w_2 - w_1) + (x + w_1) = t(w_2 - w_1, x_1)$, ezért $\varphi(x_1, x_2) = \overrightarrow{x_1 x_2} = w_2 - w_1 = (x + w_2) - (x + w_1) = x_2 - x_1 \in \mathcal{W}$.

A $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ esetben sajátosan visszkapjuk a vektortérhez rendelt affin teret.

2.8. Megjegyzés

Az $\mathcal{X} = v + \mathcal{W}$ halmazra úgy gondoltunk, mint a v vektorral eltolt \mathcal{W} lineáris altérre, vagyis a v vektorral toljuk el a \mathcal{W} halmaz elemeit. Ellenben az $\mathcal{X} = v + \mathcal{W}$ halmazra gondolhatunk úgy is, mint arra a halmazra, amelyet úgy kapunk, hogy a v -t toljuk el, mint pontot a \mathcal{W} lineáris altér vektoraival. Ez utóbbi megközelítést fogjuk használni az affin résztereknél. \diamond

Gyakorlatban a \mathcal{V} vektortér \mathcal{W} lineáris altere egy bázissal vagy egy lineáris generátorrendszerrel van megadva, azaz $\mathcal{W} = \langle w_1, \dots, w_n \rangle = \{ \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}$, és ekkor a \mathcal{W} lineáris altér eltoltja a v vektorral

$$\mathcal{X} = v + \mathcal{W} = v + \langle w_1, \dots, w_n \rangle = \{ v + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \} \quad (2.2)$$

alakba írható. Egy \mathcal{V} vektortér (2.2) alakú részhalmazait lineáris varietásnak nevezzük.

2.1.3. Lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, mint affin tér

Tekintsük az következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases},$$

ahol $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, minden $i = 1, \dots, k$ és $j = 1, \dots, n$ esetén. Az egyenletrendszer átírható mátrix alakba

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x^t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}}_{b^t}$$

Legyen $\mathcal{X} = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid Ax^t = b^t \}$ a megadott inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmaza, amelyről feltesszük, hogy nem üres. Jelölje

$$\vec{\mathcal{X}} = \{ v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n \mid Av^t = o_k \}$$

a homogén egyenletrendszer megoldáshalmazát, ahol $o_k = (0 \dots 0)^t \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{K})$ a csupa nulla együtthatós oszlopmátrix. Ekkor $\vec{\mathcal{X}}$ lineáris altere a \mathbb{K}^n \mathbb{K} -vektortérnek, mert $\vec{0} \in \vec{\mathcal{X}}$, ezért

nem üres, illetve minden $v_1, v_2 \in \vec{\mathcal{X}}$ és minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ skalárok esetén $A(k_1v_1 + kv_2)^t = k_1Av_1^t + k_2Av_2^t = k_1o_k + k_2o_k = o_k$, vagyis $k_1v_1 + k_2v_2 \in \vec{\mathcal{X}}$. Legyen

$$t : \vec{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad t(v, x) = v + x, \quad \forall v \in \vec{\mathcal{X}}, \forall x \in \mathcal{X}.$$

Ez a függvény jól értelmezett, mert ha $v \in \vec{\mathcal{X}}$, illetve $x \in \mathcal{X}$, akkor $Av = o_k$ és $Ax = b$, ahonnan $A(v + x)^t = Av^t + Ax^t = o_k + b^t = b^t$, vagyis $v + x \in \mathcal{X}$. Továbbá t az $(\vec{\mathcal{X}}, +)$ csoport hatása az \mathcal{X} halmazon:

- (i) minden $v_1, v_2 \in \vec{\mathcal{X}}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén $t(v_1, t(v_2, x)) = v_1 + (v_2 + x) = (v_1 + v_2) + x = t(v_1 + v_2, x)$;
- (ii) minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $t(\vec{0}, x) = \vec{0} + x = x$.

Ez a hatás szabad és tranzitív, mivel minden $x \in \mathcal{X}$ esetén a $t(-, x) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, $t(-, x)(v) = t(v, x) = v + x$ függvény bijektív (lásd az 1.62. Következmenyt). Valóban, a $t(-, x)$ függvény injektív, mivel ha $t(v_1, x) = t(v_2, x)$, azaz $v_1 + x = v_2 + x$, akkor $v_1 = v_2$. A $t(-, x)$ függvény szürjektív is, mert bármely $y \in \mathcal{X}$ esetén $A(y - x)^t = Ay^t - Ax^t = b^t - b^t = o_k$, így $v = y - x \in \vec{\mathcal{X}}$ és $t(-, x)(v) = t(v, x) = v + x = (y - x) + x = y$. Ezzel beláttuk, hogy $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ egy affin tér.

A $t(-, x)$ függvény szürjektivitása azt is jelenti, hogy

$$\mathcal{X} = t(-, x)(\vec{\mathcal{X}}) = t(\vec{\mathcal{X}}, x) = \{t(v, x) \mid v \in \vec{\mathcal{X}}\} = \{v + x \mid v \in \vec{\mathcal{X}}\} = x + \vec{\mathcal{X}},$$

tehát a lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza sajátosan egy lineáris altér eltoltja. Az inhomogén egyenletrendszer minden megoldása egyértelműen felírható, mint egy rögzített x inhomogén megoldás és valamely $v \in \vec{\mathcal{X}}$ homogén megoldás összege.

2.2. Affin tér érintőtere

Ha egy affin tér alapterén rögzítünk egy O pontot, akkor az affin tér alapterét természetes módon vektortérre alakíthatjuk, amelynek a nullvektora ez az O pont lesz. Ennek a vektortérnek a vektorai az affin tér pontjai lesznek, illetve ebben a vektortérben a vektorok összeadása és skalárral való szorzása függ az O pont megválasztásától. Az így megszerkesztett a vektorteret nevezzük az affin tér érintőterének az O pontban. Ez alapján úgy is gondolhatunk az affin térre, mint egy olyan vektortérre, amelyben elfelejtettük a nullvektor helyét és csak választanunk kell egy pontot nullvektornak, hogy újra vektorteret kapjunk. Ez alapján az affin térben megfogalmazható problémákat vissza lehet vezetni vektorokra. Ez a konstrukció annak az analógja, mikor az intuitív síkban (térben) választunk egy rögzített O pontot és a sík (tér) pontjaihoz hozzárendeljük a rögzített O ponthoz viszonyított helyzetvektorokat.

Az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér \mathcal{X} alapterét (pontok halmazát) elláthatjuk egy vektortér struktúrával úgy, hogy az $\vec{\mathcal{X}}$ \mathbb{K} -vektortérrel átvisszük a műveleteket az \mathcal{X} halmazra a $t(-, O) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ bijekció által, ahol $O \in \mathcal{X}$ a rögzített pont. Az így értelmezett műveletek (vektorok összeadása és skalárral való szorzása) függenek az O pont megválasztásától, mivel ez az O pont lesz az új vektorterünk nullvektora. Emlékeztetünk, hogy azt a $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektort, amelyre $t(v, O) = A$ teljesül \overrightarrow{OA} -val is jelöljük. Tehát a $t(-, O)$ függvény a $v = \overrightarrow{OA}$ vektort az $A \in \mathcal{X}$ pontba képezi, ezért az inverze, $t(-, O)^{-1}$ az A pontot az \overrightarrow{OA} vektorba képezi, vagyis $t(-, O)^{-1}(A) = \overrightarrow{OA} = \varphi(O, -)(A)$, ahol $\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ az affin tér struktúrafüggvénye.

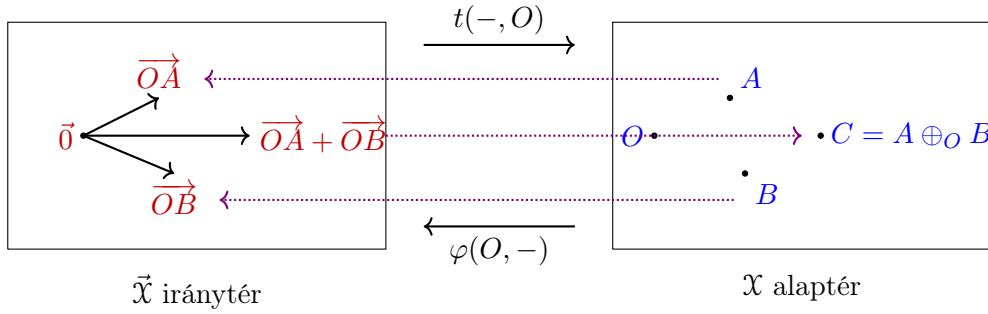
Az \mathcal{X} halmazon a következőképpen értelmezzük az \oplus_O összeadást és \odot_O skalárral való szorzást, amelyekkel \mathcal{X} egy \mathbb{K} -vektorteret alkot. A $\oplus_O : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ összeadást úgy értelmezzük,

hogy az \mathcal{X} elemeit átvisszük a $\varphi(O, -)$ függvénnyel az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérre (amely egy \mathbb{K} -vektortér), ott elvégezzük az összeadást, majd az eredményt visszavisszük a $t(-, O)$ függvény segítségével az \mathcal{X} halmazra (lásd a 2.4. ábrát). Tehát az A és B pontok összeadását az érintőtéren a következőképpen adjuk meg:

$$A \oplus_O B \stackrel{\text{ért.}}{=} t(-, O)(\varphi(O, -)(A) + \varphi(O, -)(B)) = t(-, O)(\vec{OA} + \vec{OB}) = t(\vec{OA} + \vec{OB}, O). \quad (2.3)$$

Erre az összegre a következő jellemzés adható:

$$C = A \oplus_O B \iff \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}. \quad (2.4)$$



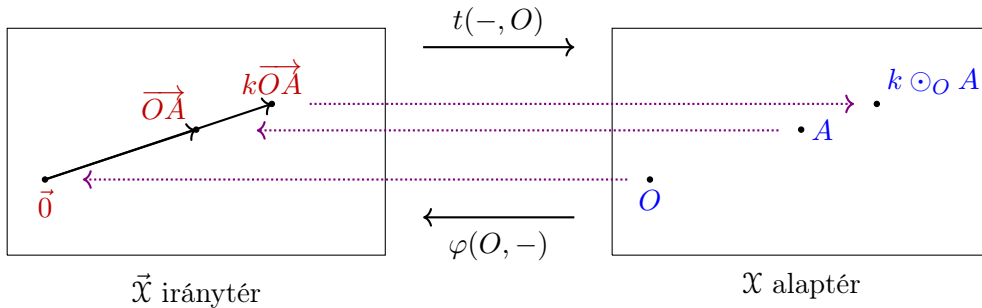
2.4. ábra. Vektorok összeadásának értelmezése az érintőtéren.

A $\odot_O : \mathbb{K} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ skalárral való szorzást úgy értelmezzük, hogy az \mathcal{X} elemeit átvisszük a $\varphi(O, -)$ függvénnyel az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérre (amely egy \mathbb{K} -vektortér), ott elvégezzük a skalárral való szorzást, majd az eredményt visszavisszük a $t(-, O)$ függvény segítségével az \mathcal{X} halmazra (lásd a 2.5. ábrát). Tehát az érintőtéren az A pont szorzását egy $k \in \mathbb{K}$ skalárral a következőképpen adjuk meg:

$$k \odot_O A \stackrel{\text{ért.}}{=} t(-, O)(k \cdot \varphi(O, -)(A)) = t(-, O)(k \cdot \vec{OA}) = t(k \cdot \vec{OA}, O). \quad (2.5)$$

Erre a skalárral való szorzásra a következő jellemzés adható:

$$C = k \odot_O A \iff \vec{OC} = k \cdot \vec{OA}. \quad (2.6)$$



2.5. ábra. Skalárral való szorzás értelmezése az érintőtéren.

Ezekkel a műveletekkel \mathcal{X} egy \mathbb{K} -vektortér lesz, amelynek nullvektora az O pont. Egy $A \in \mathcal{X}$ pont $A' \in \mathcal{X}$ szimmetrikusát (ellentettjét) az $\vec{OA'} = -\vec{OA}$ összefüggéssel jellemezhetjük.

2.9. Értelmezés

Az \mathcal{X} alaptéren (pontok halmazán) a (2.3) és (2.5) műveletekkel értelmezett $(\mathcal{X}, \oplus_O, \odot_O, \mathbb{K})$ vektorteret az \mathcal{X} affin tér O pontjában vett *érintőterének* nevezzük és $T_O\mathcal{X}$ -szel jelöljük.

A $t(-, O)$ függvény segítségével értelmeztük a vektortér struktúráját az \mathcal{X} alaptéren, ezért $t(-, O) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow T_O\mathcal{X}$ lineáris izomorfizmus, amelynek inverze $\varphi(O, -) : T_O\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ szintén lineáris izomorfizmus. Úgy is mondhatjuk, hogy az \mathcal{X} halmazon a műveleteket úgy értelmezzük, hogy $t(-, O) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, mint halmazok közötti bijektív függvényből lineáris izomorfizmus legyen. Tehát az affin tér különböző pontokban vett érintőterei ugyanazon az \mathcal{X} halmazon (az affin tér alapterén) különböző műveletekkel értelmezett vektorterek, amelyek különbözőek, ahogy a 2.11. Példában is látni fogjuk, de bármely pontban vett érintőtér izomorf az iránytérrel, így egymással is izomorfak.

2.10. Példa (Farúd és vonalzó)

A 2.7. Példában tekintetük a farúd és vonalzó példáját. Az adott O pontban vett érintőtér konstrukciója ezen példa esetén úgy értelmezhető, hogy a vonalzó zérus beosztását az O pont mellé helyezzük a $t(O, -)$ függvény által, majd a vonalzó beosztásait átmásoljuk a farúdra, így készítve a farúdból vonalzót. \diamond

2.11. Példa (Vektortérhez rendelt affin tér érintőtere)

Legyen \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér és legyen $o \in \mathcal{V}$ egy rögzített vektor. A \mathcal{V} vektortérhez rendelt $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, t)$ affin tér esetén $t(-, o) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $t(v, o) = o + v$ és $\varphi(v, w) = \overrightarrow{vw} = w - v$. Így az o pontban vett $T_o\mathcal{V}$ érintőtéren a (2.3) összeadás

$$v \oplus_o w = t(-, o)(\overrightarrow{ov} + \overrightarrow{ow}) = t(-, o)((v - o) + (w - o)) = o + ((v - o) + (w - o)) = v + w - o, \quad (2.7)$$

minden $v, w \in \mathcal{V}$ esetén, és a skalárral való szorzás

$$k \odot_o v = t(-, o)(k\overrightarrow{ov}) = t(-, o)(k(v - o)) = o + k(v - o) = kv + (1 - k)o, \quad (2.8)$$

minden $k \in \mathbb{K}$ és $v \in \mathcal{V}$ esetén.

Megjegyezzük, hogy $o = \vec{0}$ esetén $T_{\vec{0}}\mathcal{V} = \mathcal{V}$ (mint vektorterek megegyeznek), azaz $v \oplus_{\vec{0}} w = v + w$ és $k \odot_{\vec{0}} v = kv$, illetve $o \neq \vec{0}$ esetén $T_o\mathcal{V}$ és \mathcal{V} ugyanazon a halmazon értelmezett vektorterek, különböző összeadással és skalárral való szorzással. \diamond

2.12. Példa

A $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ valós vektortérhez rendelt affin térben legyenek $O = (1, -2)$, $A = (4, 5)$, $B = (-1, 4)$. Ekkor a $T_O\mathcal{V} = T_O\mathbb{R}^2$ érintőtéren

$$\begin{aligned} A \oplus_O B &\stackrel{(2.7)}{=} (4, 5) + (-1, 4) - (1, -2) = (2, 11), \\ 2 \odot_O B &\stackrel{(2.8)}{=} 2 \cdot (-1, 4) + (1 - 2) \cdot (1, -2) = (-3, 10), \\ (3 \odot_O A) \oplus_O (-4 \odot_O B) &\stackrel{(2.8)}{=} [3 \cdot (4, 5) + (1 - 3) \cdot (1, -2)] \oplus_O [(-4) \cdot (-1, 4) + (1 + 4) \cdot (1, -2)] \\ &\stackrel{(2.7)}{=} (10, 19) \oplus_O (9, -26) \\ &= (10, 19) + (9, -26) - (1, -2) \\ &= (18, -5). \end{aligned}$$

\diamond

Az érintőtéren vett lineáris kombinációkra a következő jellemzést adhatjuk.

2.13. Tulajdonság (Érintőtéren vett lineáris kombináció jellemzése)

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti affin tér és $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pontja. Minden $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és minden $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok esetén a $T_O\mathcal{X}$ érintőtéren

$$M = (\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n) \iff \overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}. \quad (2.9)$$

Bizonyítás. A pontok száma szerinti indukcióval fogjuk belátni az egyenértékűséget. Az $n = 1$ esetben minden $A_1 \in \mathcal{X}$ pont és $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ skálár esetén az \odot_O skalárral való szorzás a (2.6) jellemzése alapján

$$C = \lambda_1 \odot_O A_1 \iff \overrightarrow{OC} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1}.$$

Feltételezzük, hogy $n = N$ esetén igaz a (2.9) összefüggés és igazoljuk $n = (N + 1)$ -re. Ekkor a (2.4), majd az indukciós feltevés és a (2.6) ekvivalencia alapján

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{(\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_N \odot_O A_N)}_P \oplus_O \underbrace{(\lambda_{N+1} \odot_O A_{N+1})}_Q \iff M = P \oplus_O Q \iff \\ &\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \iff \overrightarrow{OM} = (\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_N \overrightarrow{OA_N} + \lambda_N \overrightarrow{OA_N}) + \lambda_{N+1} \overrightarrow{OA_{N+1}}. \end{aligned}$$

□

2.14. Következmény

A \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortérhez rendelt affin térben legyen $o \in \mathcal{V}$ egy rögzített pont. Minden $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ és minden $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok esetén a $T_o\mathcal{V}$ érintőtéren

$$(\lambda_1 \odot_o v_1) \oplus_o \dots \oplus_o (\lambda_n \odot_o v_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n)o. \quad (2.10)$$

Bizonyítás. Ha $w = (\lambda_1 \odot_o v_1) \oplus_o \dots \oplus_o (\lambda_n \odot_o v_n)$, akkor a 2.13. Tulajdonság alapján

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ow} &= \lambda_1 \overrightarrow{ov_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{ov_n} \iff w - o = \lambda_1(v_1 - o) + \dots + \lambda_n(v_n - o) \iff \\ &\iff w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n)o. \end{aligned}$$

□

2.15. Példa

Visszatérve a 2.12. Példára a $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ affin téren az $O = (1, -2)$, $A = (4, 5)$, $B = (-1, 4)$ pontok esetén a (2.10) alapján

$$\begin{aligned} (3 \odot_O A) \oplus_O (-4 \odot_O B) &= 3 \cdot A + (-4) \cdot B + (1 - 3 - (-4)) \cdot O \\ &= 3 \cdot (4, 5) + (-4) \cdot (-1, 4) + 2 \cdot (1, -2) \\ &= (18, -5). \end{aligned}$$

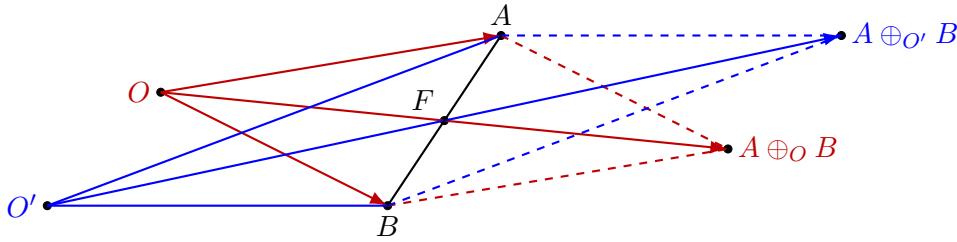
◇

2.3. Baricentrum és affin kombináció

Különböző pontok érintőterében végzett műveletek általában különböző eredményt adnak. A 2.6. ábrán megfigyelhető, hogy az $[AB]$ szakasz felezőpontja nem függ az O vagy O' pontoktól, vagyis $\frac{1}{2} \odot_O (A \oplus_O B) = \frac{1}{2} \odot_{O'} (A \oplus_{O'} B)$. Miért van ez? Ha $F \stackrel{\text{ért.}}{=} \frac{1}{2} \odot_O (A \oplus_O B)$ és $F' \stackrel{\text{ért.}}{=} \frac{1}{2} \odot_{O'} (A \oplus_{O'} B)$, akkor $\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ és $\overrightarrow{O'F'} = \frac{\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B}}{2}$, de

$$\overrightarrow{O'F} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{O'O} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B}}{2} = \overrightarrow{O'F'},$$

ahonnan $F = F'$.



2.6. ábra. Összeadás a $T_O X$ és $T_{O'} X$ érintőterekben.

Feltehetjük a kérdést, hogy a $T_O X$ érintőtérben milyen lineáris kombinációk függetlenek az O pont megválasztásától. Erre a kérdésre ad választ a következő tulajdonság.

2.16. Tulajdonság

Legyenek $A_1, \dots, A_m \in X$ tetszőleges pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalárok úgy, hogy $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Ekkor létezik egyetlen egy olyan $M \in X$ pont úgy, hogy minden $O \in X$ pont esetén

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}. \quad (2.11)$$

Bizonyítás. Ha $O \in X$ egy rögzített pont, akkor ilyen $M \in X$ pont létezik és egyértelmű, mivel

$$M = t(\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}, O) \iff \overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}.$$

Ha $O' \in X$ egy másik pont, akkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M} &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)}_1 \overrightarrow{O'O} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m} \\ &= \lambda_1 (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}) + \dots + \lambda_m (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_m}) \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{O'A_m}. \end{aligned}$$

Tehát az M pont független az O pont megválasztásától. □

A 2.13. és 2.16. Tulajdonság alapján a $T_O X$ érintőtérben az $A_1, \dots, A_m \in X$ tetszőleges pontoknak $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ (affin) súlyokkal vett lineáris kombinációja független az O pont megválasztásától. Ellenben, ha a súlyok összege nem 1, akkor a lineáris kombináció eredménye függ az O pont megválasztásától, ahogy a következő megjegyzésben láthatjuk.

2.17. Megjegyzés

Legyenek $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{X}$ tetszőleges pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalárok úgy, hogy $\lambda_1 + \dots + \lambda_m \neq 1$. Rögzítjük az $O \neq O'$ pontokat. Ha az M egy olyan pont, amelyre $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}$, és M' az a pont, amelyre $\overrightarrow{O'M'} = \lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{O'A_m}$, akkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} \\ &= -(\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}) + \overrightarrow{OO'} + (\lambda_1 \overrightarrow{O'A_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{O'A_m}) \\ &= \overrightarrow{OO'} + \lambda_1 (\overrightarrow{O'A_1} + \overrightarrow{A_1O}) + \dots + \lambda_m (\overrightarrow{O'A_m} + \overrightarrow{A_mO}) \\ &= \overrightarrow{OO'} + \lambda_1 \overrightarrow{O'O} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OO'} \\ &= \underbrace{(1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_m)}_{\neq 0} \overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}, \end{aligned}$$

vagyis $M \neq M'$. Tehát a $\lambda_1 + \dots + \lambda_m \neq 1$ esetben

$$(\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_m \odot_O A_m) = M \neq M' = (\lambda_1 \odot_{O'} A_1) \oplus_{O'} \dots \oplus_{O'} (\lambda_m \odot_{O'} A_m),$$

azaz a $T_O \mathcal{X}$ és $T_{O'} \mathcal{X}$ érintőterekben számított lineáris kombinációk különböző eredményeket adnak. \diamond

2.18. Értelmezés

Az $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{X}$ pontok $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ (affin) súlyokkal vett *affin kombinációjának* (vagy *baricentrumának*) nevezzük azt az $M \stackrel{\text{jel.}}{=} \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \in \mathcal{X}$ pontot, amelyre igaz, hogy $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}$, valamely $O \in \mathcal{X}$ pont esetén.

A 2.16. Tulajdonság alapján egy affin téren tetszőleges pontokra és affin súlyokra létezik a baricentrum, illetve a következőképpen jellemezhető. Ha $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, akkor

$$M = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \iff \overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}, \quad (2.12)$$

minden $O \in \mathcal{X}$ pont esetén.

2.19. Megjegyzés

A $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ jelölés nem azt jelenti, hogy az \mathcal{X} halmazon van egy „+” jelölt összeadás, illetve egy skalárral való szorzás. Bár az \mathcal{X} alaptéren bevezettünk összeadást és skalárral való szorzást, de ezek függnek az O pont választásától, ezért is jelöltük őket \oplus_O -val és \odot_O -val. Az affin kombináció jelölését inkább úgy kell érteni, hogy $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ affin súlyok és A_1, \dots, A_m pontok meghatároznak egy $(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m)$ -mel jelölt pontot, amely a (2.12) összefüggéssel jellemezhető. \diamond

2.20. Példa (Affin kombináció vektortérhez rendelt affin térben)

Vektortérhez rendel affin tér pontjai tulajdonképpen a vektortér vektorai. A lineáris és az affin kombinációra használt megegyező jelölések nem okoznak gondot, mivel ugyanazt az eredményt adják. Valóban, egy \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortérhez rendelt affin téren legyen $o \in \mathcal{V}$ egy tetszőleges rögzített pont. A \mathcal{V} affin téren vett $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin kombináció megegyezik a \mathcal{V} vektortéren vett $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ lineáris kombinációval:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \stackrel{(2.9)}{=} (\lambda_1 \odot_o v_1) \oplus_o \dots \oplus_o (\lambda_n \odot_o v_n)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.10)}{=} \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n + \underbrace{(1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_n)}_0 \cdot o \\
& = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n.
\end{aligned}$$

◇

2.21. Példa

Sík és tér geometriában az $[AB]$ szakasz felezőpontja $M = \frac{A+B}{2}$, mivel $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, tetszőleges $O \in \mathcal{X}$ pont esetén.

Hasonlóan, az $[AB]$ szakaszt k -arányban osztó C pont esetén $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, vagyis $\overrightarrow{OC} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$, így $C = (1-k)A + kB$.

Az ABC háromszög súlypontja a csúcspontok baricentruma $G = \frac{A+B+C}{3}$, mert minden O pontra a síkból vagy térből teljesül, hogy $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$. ◇

A 2.14. Következmény analógja is megfogalmazható affin tereken.

2.22. Tulajdonság (Affin kombináció és érintőtéren vett lineáris kombináció kapcsolata)

Legyen O a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja. A $T_O\mathcal{X}$ érintőtéren tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontoknak és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációja kifejezhető affin kombinációval a következőképpen

$$(\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \cdots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n) = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n + (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_n)O. \quad (2.13)$$

Bizonyítás. Ha tekintjük az $M = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n + (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_n)O$ affin kombinációt, akkor értelmezés szerint $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n} + (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_n)\overrightarrow{OO} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}$, ahonnan a 2.13. Tulajdonság alapján $M = (\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \cdots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n)$. □

Az érintőtér vektorait is tudjuk az affin kombinációhoz hasonlóan prezentálni, annyi a különbség, hogy a súlyok összege 1 helyett 0 kell legyen.

2.23. Tulajdonság

Legyenek $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{X}$ tetszőleges pontok és $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalárok úgy, hogy $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 0$. Ekkor létezik egyetlen $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor úgy, hogy

$$v = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \mu_m \overrightarrow{OA_m},$$

és ez a v vektor független az $O \in \mathcal{X}$ pont választásától. Továbbá, egy A pont eltoltja a v vektorral

$$t(v, A) = t(\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \mu_m \overrightarrow{OA_m}, A) = A + \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_m A_m,$$

az A, A_1, \dots, A_m pontoknak $1, \mu_1, \dots, \mu_m$ súlyokkal vett affin kombinációja.

2.24. Jelölés

Ha $\mu_1 + \cdots + \mu_m = 0$, akkor legyen $\mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{OA_k} \in \vec{\mathcal{X}}$, tetszőleges $O \in \mathcal{X}$ pont esetén.

Bizonyítás. Rögzített $O \in \mathcal{X}$ pont esetén létezik a $v = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{OA_k} \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor. Ha $O' \in \mathcal{X}$ egy másik pont, akkor

$$v = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{OA_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_1}) + \cdots + \mu_k(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_k}) \\
&= \underbrace{(\mu_1 + \cdots + \mu_k)}_0 \overrightarrow{OO'} + \mu_1 \overrightarrow{O'A_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{O'A_k} \\
&= \mu_1 \overrightarrow{O'A_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{O'A_k},
\end{aligned}$$

tehát a v vektor független az $O \in \mathcal{X}$ pont megválasztásától. Mivel $1 + \mu_1 + \cdots + \mu_k = 1 + 0 = 1$, ezért létezik a $B = A + \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k \in \mathcal{X}$ pont és a (2.12) alapján

$$\begin{aligned}
B = A + \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \mu_1 \overrightarrow{AA_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{AA_k} \iff \\
&\iff \overrightarrow{AB} = \mu_1 \overrightarrow{AA_1} + \cdots + \mu_k \overrightarrow{AA_k} \iff \overrightarrow{AB} = \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k = v.
\end{aligned}$$

Az $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorra teljesül, hogy $t(\overrightarrow{AB}, A) = B$, tehát

$$t(v, A) = B \iff t(\mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k, A) = A + \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_k A_k.$$

□

2.25. Példa

Egy tetszőleges affin térben

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + (-1) \cdot \overrightarrow{OA} = B - A,$$

hasonlóan ahhoz, amit a vektortérhez rendelt affin tér esetén láttunk. Ez azzal analóg, hogy analitikus mértanban az \overrightarrow{AB} szabad vektor koordinátáit úgy számoltuk ki, hogy a B végpont koordinátáiból kivontuk az A kezdőpont koordinátáit. ◇

2.26. Példa

Az \mathcal{S} intuitív síkban, ha adottak az A, B, C (nem kollineáris) pontok, akkor egy $ABCD$ paralelogramma negyedik D csúcsát a következőképpen adhatjuk meg. A 2.25. Példa és a 2.23. Tulajdonság alapján

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \iff D = t(\overrightarrow{CD}, C) = t(\overrightarrow{BA}, C) = C + A - B.$$

Tehát D a C pont a \overrightarrow{BA} vektorral való eltoltja.

◇

3. fejezet

Affin részterek

Ebben a fejezetben értelmezzük az affin résztér fogalmát. Az intuitív síkban, mint affin térben az egyenesek, illetve az intuitív térben az egyenesek és a síkok a valódi affin részterek. Tehát az affin részterek az egyenes és sík megfelelői affin terek esetén. Az affin részterek megadhatók egy pont és az iránytér egy lineáris altere segítségével. Ez a megadás analóg az egyenes megadása egy pont és egy irányvektor, illetve a sík megadása egy pont és két független vektor segítségével. Az affin részterekre bizonyítunk három jellemzési tételt. Ezek közül az affin résztér jellemzése affin kombinációval lesz a legfontosabb. Bevezetjük a halmaz által generált affin résztér, vagyis affin burkoló fogalmát. Ez általánosítja a két különböző pont által meghatározott egyenes, illetve három nem kollineáris pont által meghatározott sík fogalmát. Értelmezzük a párhuzamosságot affin részterek esetén. Algoritmusokat mutatunk arra, hogyan dönthető el egy vektortér két lineáris varietásáról, hogy egyenlőek, tartalmazzák-e egymást, párhuzamosak-e, metszik-e egymást, illetve hogyan kell kiszámolni a metszetüket.

3.1. Algebrai kitérő: részstruktúrák az algebrában

Mielőtt rátérnénk az affin résztér értelmezésére átismételjük a részcsoporthoz, illetve a lineáris alter fogalmát. Ezek fognak mintául szolgálni majd az affin résztér értelmezéséhez.

3.1.1. Részcsoporthoz

Legyen (\mathcal{G}, \cdot) egy csoport és legyen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ egy nemüres részhalmaza. Egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ részhalmaz a \mathcal{G} *részcsoporthoz* (jelölés: $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$), ha

- \mathcal{H} zárt a „ \cdot ” műveletre nézve, vagyis minden $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ esetén $h_1 \cdot h_2 \in \mathcal{H}$, tehát a \mathcal{G} csoport „ \cdot ” művelete származtat (indukál) egy műveletet a \mathcal{H} halmazon, amelyre szintén a „ \cdot ” jelölést használjuk;
- (\mathcal{H}, \cdot) csoport a származtatott (indukált) művelettel.

Emlékeztetünk, hogy a „ \cdot ” művelet tulajdonképpen egy $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ függvény. A \mathcal{H} halmaz zárt a „ \cdot ” műveletre nézve azt jelenti, hogy a $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $(h_1, h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2$ függvény jó értelmezett (vagyis a képe a \mathcal{H} halmazban van).

3.1.2. Lineáris altér

Legyen \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér. A $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ részhalmaz *lineáris altere* a \mathcal{V} vektortérnek (jelölés: $\mathcal{W} \leq_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$), ha

- a \mathcal{W} részhalmaz zárt a vektorok összeadására nézve, azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ vektorok esetén $w_1 + w_2 \in \mathcal{W}$, és a skalárral való szorzására nézve, azaz tetszőleges $w \in \mathcal{W}$ vektor és tetszőleges $k \in \mathbb{K}$ skalár esetén $k \cdot w \in \mathcal{W}$;
- \mathcal{W} egy \mathbb{K} -vektortér a származtatott (indukált) műveletekkel.

Összefoglalva, egy részhalmaz egy részstruktúra (részcsoport vagy lineáris altér), ha zárt a műveletekre nézve, így léteznek a származtatott műveletek a részhalmazon, továbbá ezektől a származtatott műveletektől ugyanolyan tulajdonságokat követelünk meg, mint az eredeti műveletektől. Általában a tulajdonságok egy része automatikusan teljesül (öröklődik) a származtatott műveletekre, mint például részcsoportok esetén az asszociativitás vagy lineáris alterek esetén a disztributivitás.

3.2. Affin résztér értelmezése

Legyen $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ egy \mathbb{K} test feletti affin tér. Emlékeztetünk, hogy a 2.1. Értelmezés alapján \mathcal{X} egy nemüres halmaz, $\vec{\mathcal{X}}$ egy \mathbb{K} -vektortér és $t : \vec{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy szabad és tranzitív csoportthatás (az $(\vec{\mathcal{X}}, +)$ Abel-féle csoport hatása az \mathcal{X} halmazon), amely a pontok vektorokkal való eltolását írja le. Ahhoz, hogy az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ hármas egy részstruktúráját értelmezzük szükségünk lesz egy $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ nemüres részhalmazra, az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris alterére. Továbbá az \mathcal{Y} és $\vec{\mathcal{Y}}$ zárt kell legyen a csoportthatásra nézve (a csoportthatást tekintve műveletnek), vagyis minden $w \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor és minden $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén a $t(w, A)$ pont is az \mathcal{Y} részhalmazban kell legyen. Szóban kifejezve az \mathcal{Y} halmaz tetszőleges A pontjának tetszőleges $w \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektorral való eltoltja is az \mathcal{Y} halmazban marad. Ez utóbbi feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy kell létezzen egy $t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, $t'(w, A) = t(w, A)$ származtatott csoportthatás (lásd az 1.2.1. alfejezetet). Tehát az $(\vec{\mathcal{Y}}, +)$ csoport az $(\vec{\mathcal{X}}, +)$ részcsoportjaként hat az \mathcal{X} halmaz \mathcal{Y} részhalmazán. Végül az így kapott $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ hármas egyben affin tér kell legyen, tehát a t' függvény a $(\vec{\mathcal{Y}}, +)$ csoport egy szabad és tranzitív hatása az \mathcal{Y} halmazon. Tömören a következő értelmezést adhatjuk az affin részterre.

3.1. Értelmezés

Az $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ hármas *affin résztere* az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin térnek, ha \mathcal{Y} az \mathcal{X} alaptér részhalmaza, $\vec{\mathcal{Y}}$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér lineáris altere, $t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, $t'(w, A) = t(w, A)$ a t által származtatott csoportthatás, amely szabad és tranzitív. Az \mathcal{Y} az affin résztér alaptere, $\vec{\mathcal{Y}}$ pedig az iránytere. Konvenció szerint az üres halmazt is affin résztérnek tekintjük, amelynek nincs iránytere.

Ha nem okoz félreértést, akkor a származtatott hatást is t -vel jelöljük. A t' jelölést pedig akkor használjuk, ha különbséget akarunk tenni az eredeti t hatás és a származtatott t' hatás között. Egy $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin részterre röviden csak \mathcal{Y} -ként fogunk hivatkozni. Ez nem okoz majd félreértést, ahogyan a 3.4. alfejezetben látni fogjuk.

Az \mathcal{Y} affin részteren a származtatott struktúrafüggvény

$$\varphi' : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}, \quad \varphi'(A, B) = \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}, \quad \forall A, B \in \mathcal{Y},$$

az \mathcal{X} affin tér φ struktúrafüggvényének leszűkítése. A származtatott struktúrafüggvényt is φ -vel szoktuk jelölni, ha nem okoz félreértést.

3.2. Példa

Vektorterek esetén csak a nullvektort tartalmazó egy elemű részhalmaz mindig lineáris altér. Ehhez hasonlóan minden $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér esetén a pontok affin részterek. Ha $A \in \mathcal{X}$ egy pont, akkor legyen $\mathcal{Y} = \{A\}$, $\vec{\mathcal{Y}} = \{\vec{0}\} \leq_{\mathbb{K}} \vec{\mathcal{X}}$ és $t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, $t'(\vec{0}, A) = A$ a származtatott hatás. Tehát $(\{A\}, \{\vec{0}\}, t')$ az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin résztere és minden 0-dimenziós affin résztér ilyen alakú. Ezeket az affin résztereket egyszerűen csak A -val jelöljük. Ahogy a csoport önmagának részcsoportha úgy az affin tér is affin résztere önmagának. \diamond

3.2.1. Affin részterek megnevezései

Az affin részterek önmagukban affin terek is. Emlékeztetünk, hogy a 2.2. Értelmezés alapján az affin tér dimenziója megegyezik az iránytere dimenziójával, vagyis $\dim \mathcal{Y} = \dim_{\mathbb{K}} \vec{\mathcal{Y}}$. A dimenzió függvényében az affin részterekre a következő megnevezéseket használjuk.

- Egy 0-dimenziós affin részteret *pontnak* nevezünk (lásd a 3.2. Példát).
- Egy 1-dimenziós affin részteret *egyenesnek* nevezünk (motivációként lásd a 3.5.1. alfejezet (ii) alpontját).
- Egy 2-dimenziós affin részteret *síknak* nevezünk (motivációként lásd a 3.5.1. alfejezet (iii) alpontját).
- Egy p -dimenziós affin részteret *p -síknak* nevezünk.
- Egy $(\dim \mathcal{X} - 1)$ -dimenziós (vagyis 1-kodimenziós) affin részteret *hipersíknak* nevezünk. Például hipersík az egyenes a síkban, illetve a sík a térben.

A következő jelöléseket használjuk, ha egy \mathcal{X} affin tér résztereiről szeretnénk beszélni:

- $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ az \mathcal{X} összes affin részterének halmaza (az üres halmazzal együtt);
- $\mathcal{A}_k(\mathcal{X})$ az \mathcal{X} összes k -dimenziós affin részterének halmaza ($k \geq 0$);
- $\mathcal{A}_{\geq 0}(\mathcal{X})$ az \mathcal{X} összes nemüres affin részterének halmaza.

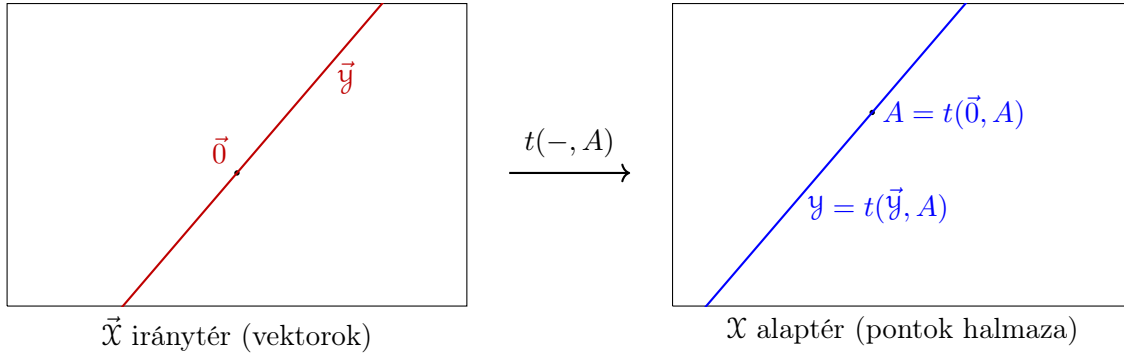
3.3. Affin részterek megadása

Egy $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér esetén legyenek $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ és $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{\mathcal{X}}$ részhalmazok. Ahhoz, hogy $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér legyen ellenőrizni kell a következőket. Az $\vec{\mathcal{Y}}$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér lineáris altere, az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ pedig nemüres halmaz legyen. Léteznie kell a $t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, $t'(w, B) = t(w, B)$ függvénynek, azaz minden $w \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor és minden $B \in \mathcal{Y}$ pont esetén $t(w, B) \in \mathcal{Y}$ kell teljesülnön. Ha a t' függvény értelmezett, akkor az automatikusan az $(\vec{\mathcal{Y}}, +)$ csoport hatása lesz az \mathcal{Y} halmazon, mivel a t' hatást úgy származtatjuk a t hatásból, hogy előbb az $\vec{\mathcal{Y}} \leq \vec{\mathcal{X}}$ részcsoporthal származtatunk (lásd az 1.2.1.1. alfejezetet), majd az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ invariáns részhalmazzal származtatunk (lásd az 1.2.1.3. alfejezetet). A t' hatás szabad, mivel öröklődik a t hatástól az 1.52. Tulajdonság alapján. Végül ellenőrizni kell, hogy a t' hatás tranzitív, azaz létezzen egy $A \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy minden $B \in \mathcal{Y}$ pont esetén létezik egy $v_B \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor úgy, hogy $B = t(v_B, A)$.

Egy pont és az iránytér egy lineáris altere segítségével megadható egy affin résztér. Ez analóg az analitikus térmértanban az egyenes megadása egy pont és egy nemnulla vektor (irányvektor) segítségével, illetve a sík megadása egy pont és két lineárisan független vektor segítségével.

3.3. Tulajdonság (Affin résztér megadása pont és lineáris altér segítségével)

Adott az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér egy $A \in \mathcal{X}$ pontja és az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altere. Ha $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$ és $t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, $t'(w, B) = t(w, B)$, akkor $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin térnek. Minden affin résztér megadható ilyen módon.



3.1. ábra. Affin résztér megadása pont és lineáris altér segítségével.

Bizonyítás. Az \mathcal{Y} halmaz nem üres, mert $A = t(\vec{0}, A) \in \mathcal{Y}$ egy eleme. A t' függvény jól értelmezett, mivel tetszőleges $B \in \mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$ pont esetén létezik egy $v_B \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor úgy, hogy $B = t(v_B, A)$, ezért minden $w \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor és minden $B \in \mathcal{Y}$ pont esetén

$$t'(w, B) = t(w, B) = t(w, t(v_B, A)) = t(w + v_B, A) \in t(\vec{\mathcal{Y}}, A) = \mathcal{Y}.$$

A t' hatást a t csoporthatásból származtatjuk az $(\vec{\mathcal{Y}}, +) \leq (\vec{\mathcal{X}}, +)$ részcsoporthoz és az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ invariáns részhalmaz által (lásd az 1.2.1.1. és az 1.2.1.3. alfejezeteket). A t' hatás szabadsága öröklődik az 1.52. Tulajdonság alapján. A t' hatás tranzitív, mert $t'(\vec{\mathcal{Y}}, A) = t(\vec{\mathcal{Y}}, A) = \mathcal{Y}$, azaz a $t'(-, A) : \vec{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény szürjektív. Ezzel beláttuk, hogy $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ egy affin résztér.

Minden $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér és $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén a $t'(-, A) : \vec{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény szürjektivitása miatt $\mathcal{Y} = t'(\vec{\mathcal{Y}}, A) = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$, tehát minden affin résztér megadható egy pont és egy lineáris altér segítségével. \square

3.4. Példa

Legyen $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ egy \mathbb{K} test feletti affin tér. Egy $A \in \mathcal{X}$ pont és $w_1, \dots, w_k \in \vec{\mathcal{X}}$ lineárisan független vektorok megadnak egy k -síkot (k -dimenziós affin résztér) az \mathcal{X} affin térben a következőképpen. Legyen

$$\vec{\mathcal{Y}} = \langle w_1, \dots, w_k \rangle = \{ \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k \in \vec{\mathcal{X}} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \}$$

a w_1, \dots, w_k vektorok által generált k -dimenziós lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, illetve legyen

$$\mathcal{Y} = t(\langle w_1, \dots, w_k \rangle, A) = \{ t(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k, A) \in \mathcal{X} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \}$$

az A pont w_1, \dots, w_k vektorok lineáris kombinációival való eltoltjainak halmaza. Ekkor $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ egy k -síkja az \mathcal{X} affin térnek, ahol t' a származtatott hatás. Sajátosan egy $A \in \mathcal{X}$ pont és egy

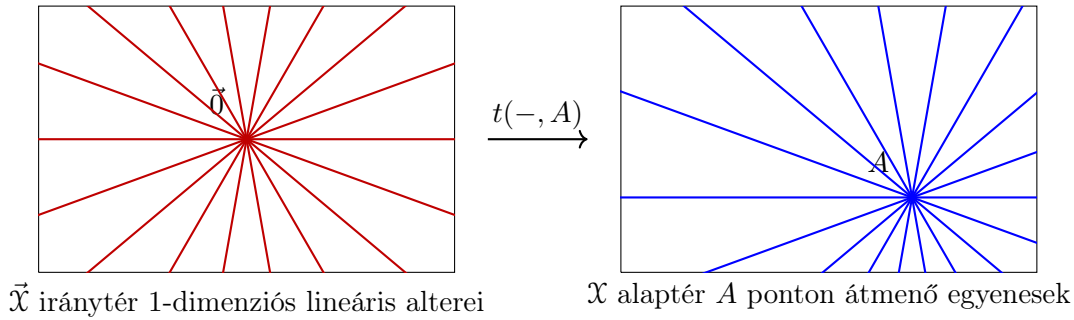
nemnulla $w \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor megad egy $\mathcal{L} = t(\langle w \rangle, A)$ egyenest (1-dimenziós affin részteret) az \mathcal{X} affin térben. Ez analóg azzal, hogy az intuitív síkban (térben) egy egyenes meghatározott egy pontja és az irányvektora által. Hasonlóan egy $A \in \mathcal{X}$ pont és két $w_1, w_2 \in \vec{\mathcal{X}}$ lineárisan független vektor megad egy $\mathcal{S} = t(\langle w_1, w_2 \rangle, A)$ síkot (2-dimenziós affin részteret). Ez analóg azzal, hogy az intuitív térben egy sík meghatározott egy pontja és két nem párhuzamos irány által. \diamond

3.3.1. Iránytér lineáris alterei és az alaptér affin részterei közötti megfeleltetés

Jelölje $\mathcal{A}(\mathcal{X}, A)$ az \mathcal{X} affin tér azon affin részterének halmazát, amelyek átmennek az A ponton, illetve $\mathcal{A}_k(\mathcal{X}, A)$ azon k -dimenziós affin részterek halmazát, amelyek átmennek az A ponton. Jelölje $\mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ vektortér k -dimenziós lineáris altereinek halmazát. A 3.3. Tulajdonság alapján rögzített $A \in \mathcal{X}$ pont esetén a $t(-, A) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény bijektív megfeleltetést származtat az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér k -dimenziós lineáris alterei és az \mathcal{X} alaptér azon k -dimenziós affin részterei között, amelyek átmennek az A ponton, vagyis

$$t(-, A) : \mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{A}_k(\mathcal{X}, A), \quad t(-, A)(\mathcal{W}) = t(\mathcal{W}, A) = \{t(w, A) \in \mathcal{X} \mid w \in \mathcal{W}\}, \quad \forall \mathcal{W} \in \mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}})$$

egy bijekció. Ha például meg szeretnénk kapni az \mathcal{X} affin tér összes A ponton áthaladó egyenesét, akkor a 3.3. Tulajdonság alapján vesszük az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér összes 1-dimenziós $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris alterét és a $t(-, A)$ függvény által „átvisszük az \mathcal{X} alaptérre” (az $\vec{\mathcal{Y}}$ vektoraival eltoljuk az A pontot), így kapva meg az A ponton áthaladó $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$ egyenest.



3.2. ábra. Az iránytér 1-dimenziós lineáris alterei és egy rögzített A ponton átmenő egyenesek közti megfeleltetés.

Ha az \mathcal{X} affin tér összes egyenesét meg szeretnénk kapni, akkor ezt megismételjük az A pont helyett az \mathcal{X} összes pontjára. Hasonlóan járhatunk el a k -dimenziós affin részterek (k -síkok) esetén is.

3.5. Példa

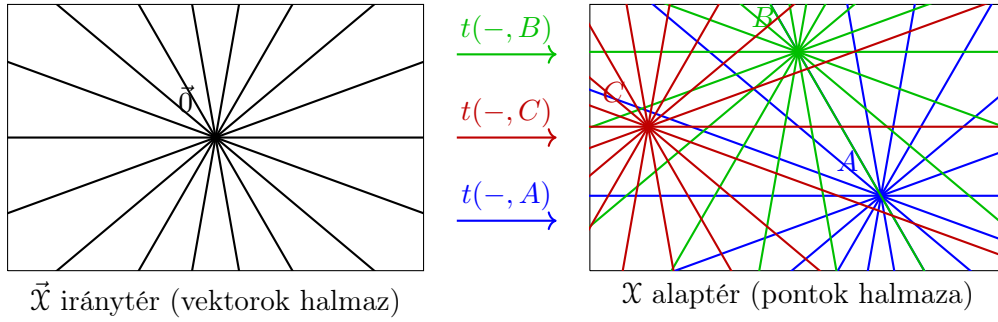
A \mathbb{Z}_3 test feletti \mathbb{Z}_3^2 affin tér $A = (\hat{1}, \hat{2})$ pontján átmenő egyenesek

$$\mathcal{L} = t(\mathcal{W}, A) = \{t(w, A) \mid w \in \mathcal{W}\} = \{w + A \mid w \in \mathcal{W}\}$$

alakúak, ahol \mathcal{W} a \mathbb{Z}_3 test feletti \mathbb{Z}_3^2 vektortér egy 1-dimenziós lineáris altere. Ezért először felsoroljuk a \mathbb{Z}_3^2 1-dimenziós altereit:

$$\mathcal{W}_1 = \langle (\hat{1}, \hat{0}) \rangle = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{2}, \hat{0})\} = \langle (\hat{2}, \hat{0}) \rangle,$$

$$\mathcal{W}_2 = \langle (\hat{0}, \hat{1}) \rangle = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{0}, \hat{2})\} = \langle (\hat{0}, \hat{2}) \rangle,$$



3.3. ábra. Az iránytér 1-dimenziós lineáris alterei és az egyenesek közötti kapcsolat.

$$\mathcal{W}_3 = \langle(\hat{1}, \hat{1})\rangle = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{1}), (\hat{2}, \hat{2})\} = \langle(\hat{2}, \hat{2})\rangle.$$

Tehát a \mathbb{Z}_3^2 2-dimenziós affin tér $A = (\hat{1}, \hat{2})$ pontján átmenő egyenesek:

$$\mathcal{L}_1 = t(\mathcal{W}_1, A) = A + \mathcal{W}_1 = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{2}, \hat{2}), (\hat{0}, \hat{2})\},$$

$$\mathcal{L}_2 = t(\mathcal{W}_2, A) = A + \mathcal{W}_2 = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{1})\},$$

$$\mathcal{L}_3 = t(\mathcal{W}_3, A) = A + \mathcal{W}_3 = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1})\}.$$

◇

3.3.2. Véges affin tér adott ponton átmenő affin résztereinek száma

Legyen \mathbb{K} egy q elemű véges test és \mathcal{X} egy n -dimenziós \mathbb{K} test feletti affin tér. Az 1.78. Tulajdonságban meghatároztuk véges \mathbb{K} test feletti n -dimenziós vektorterek k -dimenziós lineáris altereinek számát, így az n -dimenziós \mathcal{X} affin tér A pontján átmenő affin résztereinek száma

$$|\mathcal{A}_k(\mathcal{X}, A)| = |\mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}})| = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)}. \quad (3.1)$$

A 3.9. alfejezetben meghatározzuk az összes k -dimenziós affin résztér számát, nem csak az adott A ponton átmenőket.

3.4. Affin résztér jellemzése vektorokkal

A 3.3. Tulajdonságban beláttuk, hogy egy affin résztér meghatároz egy pontja és az iránytere. A következőkben azt fogjuk belátni, hogy az $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér már meghatározza az alaptere is, azaz \mathcal{Y} meghatározza az $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris alteret és így a t' származtatott hatást is. Ha például egy 2-dimenziós $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ valós affin teret egy papírlapként képzelünk el, akkor ábrázolhatjuk rajta az $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér azáltal, hogy ábrázoljuk az \mathcal{Y} alaptér pontjait a lapon. Azt fogjuk belátni, hogy a lapon ábrázolt alakzatból felismerhető, hogy egy affin résztér ábrázol vagy sem.

Ha $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér egy résztere, akkor sajátosan egy affin tér, így tetszőlegesen rögzített $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén a $t'(-, A) : \vec{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$, $t'(-, A)(w) = t(w, A)$ függvény bijektív és az inverze a struktúrafüggvényből származó $\varphi'(A, -) : \mathcal{Y} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$, $\varphi'(A, -)(B) = \overrightarrow{AB}$ függvény. Innen következik, hogy

$$\vec{\mathcal{Y}} = \varphi'(A, \mathcal{Y}) = \varphi(A, \mathcal{Y}) = \{\varphi(A, B) \in \vec{\mathcal{X}} \mid B \in \mathcal{Y}\} = \{\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{X}} \mid B \in \mathcal{Y}\}. \quad (3.2)$$

Tehát az $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér \mathcal{Y} alaptere meghatározza az $\vec{\mathcal{Y}}$ irányteret. Emiatt egy $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmaz esetén az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek legfeljebb egy olyan $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altere létezhet, amelyre $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér. Ez alapján a következő értelemben beszélhetünk arról, hogy mikor lesz egy affin tér egy részhalmaza affin résztér.

3.6. Értelmezés

Az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin tér esetén egy $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmaz *affin résztér*, ha létezik az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér olyan $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altere, hogy $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin térnek, ahol $t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ a t által származtatott csoportthatás.

A (3.2) összefüggés alapján, ha létezik a 3.6. Értelmezésben szereplő $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altér, akkor egyértelmű. Tehát az \mathcal{Y} részhalmaz csak egyetlen affin résztérnek lehet az alaptere. Így nem okoz félreértést, ha az $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztérre csak \mathcal{Y} -ként hivatkozunk.

A következő tétel alapján az \mathcal{Y} nemüres részhalmaz az \mathcal{X} affin tér 3.6. Értelmezés szerinti affin résztér, ha egy $P \in \mathcal{Y}$ pontból nézve az \mathcal{Y} pontjai egy lineáris altérként látszanak.

3.7. Tétel (Affin résztér jellemzése vektorokkal)

Legyen $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ egy affin tér és $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ egy nemüres részhalmaz. Ha létezik olyan $P \in \mathcal{Y}$ pont, amelyre $\{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$ lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, akkor \mathcal{Y} résztér az \mathcal{X} affin térnek, továbbá az iránytere $\vec{\mathcal{Y}} = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$.

Bizonyítás. Legyen $\vec{\mathcal{Y}} = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$, amely a feltevés szerint az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris altere. Belátjuk, hogy jól értelmezett a

$$t' : \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad t'(v, A) = t(v, A), \quad \forall v \in \vec{\mathcal{Y}}, \forall A \in \mathcal{Y}$$

függvény. Mivel $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altér, ezért minden $v \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor és minden $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén $v + \overrightarrow{PA} \in \vec{\mathcal{Y}}$, továbbá az $\vec{\mathcal{Y}}$ értelmezése alapján létezik $Q \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy $\overrightarrow{PQ} = v + \overrightarrow{PA}$, így

$$t'(v, A) = t(v, A) = t(v, t(\overrightarrow{PA}, P)) = t(v + \overrightarrow{PA}, P) = t(\overrightarrow{PQ}, P) = Q \in \mathcal{Y}.$$

Tehát a t' függvény jól értelmezett és így csoportthatást származtat (lásd az 1.2.1.1. és 1.2.1.3. alfejezeteket). A t' hatás szabad, mivel a szabadság öröklődik az 1.52. Tulajdonság alapján, illetve tranzitív is, mert minden $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén $A = t(\overrightarrow{PA}, P) = t'(\overrightarrow{PA}, P)$, ahol $P \in \mathcal{Y}$ és $\overrightarrow{PA} \in \vec{\mathcal{Y}}$. Ezzel beláttuk, hogy $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t')$ affin résztér az $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ affin térnek. \square

3.8. Megjegyzés

A 3.7. Tétel a következőképpen is megfogalmazható az érintőtér segítségével. Az $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ nemüres részhalmaz pontosan akkor affin résztér, ha létezik olyan $P \in \mathcal{Y}$ pont, hogy az \mathcal{Y} , mint a $T_P\mathcal{X}$ érintőtér részhalmaza egy lineáris altér. Valóban, a $T_P\mathcal{X}$ vektortér úgy volt megszerkesztve, hogy $\varphi(P, -) : T_P\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ egy lineáris izomorfizmus legyen, így $\mathcal{Y} \subseteq T_P\mathcal{X}$ lineáris altér pontosan akkor, ha $\varphi(P, \mathcal{Y}) = \{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$ az $\vec{\mathcal{X}}$ lineáris altere. \diamond

A gyakorlatban a 3.7. Tételből levezethető alábbi kritériumot szoktuk használni annak eldöntésére, hogy egy részhalmaz affin résztér vagy sem.

3.9. Kritérium

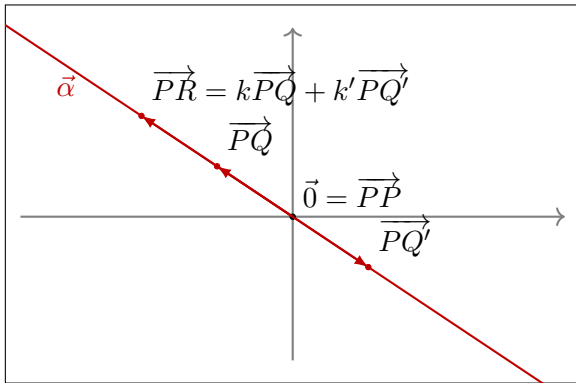
Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} affin tér egy nemüres részhalmaza és legyen $P \in \mathcal{Y}$ egy pont (mi választhatjuk meg).

- (i) Ha $\{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$ lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, akkor \mathcal{Y} affin résztere az \mathcal{X} affin térnek.
- (ii) Ha $\{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$ nem lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, akkor \mathcal{Y} nem affin résztere az \mathcal{X} affin térnek.

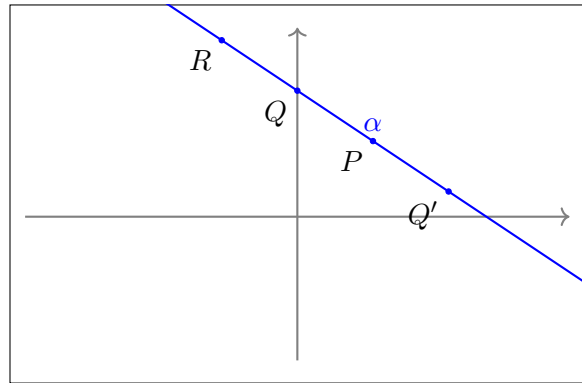
Bizonyítás.

- (i) A 3.7. Tétel alapján.
- (ii) Tegyük fel, hogy \mathcal{Y} affin résztere \mathcal{X} -nek, vagyis létezik $\vec{\mathcal{Y}}'$ lineáris részter úgy, hogy az $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}', t')$ affin részter. A (3.2) összefüggés szerint $\vec{\mathcal{Y}}' = \{\overrightarrow{AQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$, tetszőleges $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén. Sajátosan $A = P$ választásra azt kapjuk, hogy $\vec{\mathcal{Y}} = \vec{\mathcal{Y}}' = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{X}} \mid Q \in \mathcal{Y}\}$ lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát \mathcal{Y} nem lehet affin résztere \mathcal{X} -nek.

□



$\vec{\mathcal{X}} = \mathbb{R}^2$ iránytér



$\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ alaptér

3.4. ábra. A $2x + 3y = 5$ egyenletű egyenes affin részter.

3.10. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^2 valós affin teret, amelynek iránytere az \mathbb{R}^2 valós vektortér és struktúrafüggvénye pedig $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(v, w) = \overrightarrow{vw} = w - v$. A $2x + 3y = 5$ egyenletű \mathcal{Y} részhalmaz az \mathbb{R}^2 egy affin résztere (egyenes). Az \mathcal{Y} részhalmaz nem üres, mert $P = (1, 1) \in \mathcal{Y}$ egy pontja, mivel $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$. Ekkor

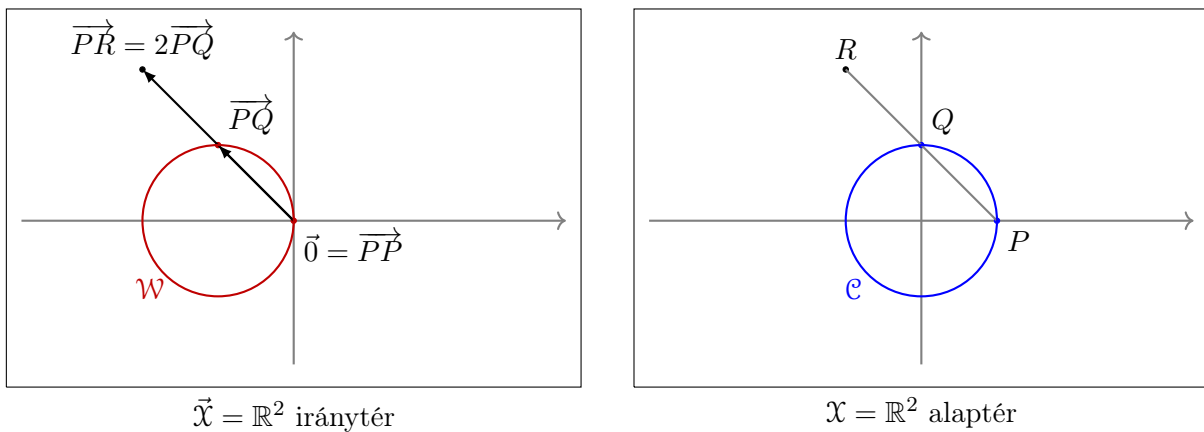
$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{Y}} &= \{\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{R}^2 \mid Q \in \mathcal{Y}\} \\
 &= \{Q - P \in \mathbb{R}^2 \mid Q = (q_1, q_2) \in \mathcal{Y}\} \\
 &= \{(x, y) = (q_1, q_2) - (1, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid (q_1, q_2) \in \mathcal{Y}\} \\
 &= \{(x, y) = (q_1, q_2) - (1, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 2q_1 + 3q_2 = 5\} \\
 &= \{(x, y) = (q_1 - 1, q_2 - 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(q_1 - 1) + 3(q_2 - 1) = 0\}
 \end{aligned}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}.$$

Az $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altere az \mathbb{R}^2 valós vektortérnek, mert nem üres, mivel $(0, 0) \in \vec{\mathcal{Y}}$, továbbá minden $w_1 = (x_1, y_1), w_2 = (x_2, y_2) \in \vec{\mathcal{Y}}$ esetén (vagyis $2x_1 + 3y_1 = 0$ és $2x_2 + 3y_2 = 0$) és minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ esetén $k_1 w_1 + k_2 w_2 = (k_1 x_1 + k_2 x_2, k_1 y_1 + k_2 y_2) \in \vec{\mathcal{Y}}$, mert

$$2(k_1 x_1 + k_2 x_2) + 3(k_1 y_1 + k_2 y_2) = k_1(2x_1 + 3y_1) + k_2(2x_2 + 3y_2) = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0.$$

A 3.9. Kritérium alapján a $2x + 3y = 5$ egyenletű $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^2$ részhalmaz affin résztere az \mathbb{R}^2 valós affin térnek és az \mathcal{Y} iránytere a $2x + 3y = 0$ egyenletű $\vec{\mathcal{Y}}$ lineáris altere az \mathbb{R}^2 valós vektortérnek. ◇



3.5. ábra. A kör nem affin részter.

3.11. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^2 valós affin teret, amelynek iránytere az \mathbb{R}^2 valós vektortér és struktúrafüggvénye pedig $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(v, w) = \overrightarrow{vw} = w - v$. A $\mathcal{Y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ részhalmaz (kör) nem affin résztere az \mathbb{R}^2 affin térnek. Valóban, $P(1, 0) \in \mathcal{Y}$ a kör egy pontja, mivel $1^2 + 0^2 = 1$. Legyen $\vec{\mathcal{Y}} = \{\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{R}^2 \mid Q \in \mathcal{Y}\}$. Belátjuk, hogy $\vec{\mathcal{Y}}$ nem lineáris altere az \mathbb{R}^2 valós vektortérnek, mert nem zárt a skalárral való szorzásra. Tekintjük a \overrightarrow{PQ} vektort, ahol $Q = (0, 1) \in \mathcal{Y}$. Ekkor $2\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{Y}}$ pontosan akkor, ha létezik $R \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} &\iff 2(Q - P) = R - P \iff 2((0, 1) - (1, 0)) = R - (1, 0) \iff \\ &\iff (-2, 2) = R - (1, 0) \iff R = (-1, 2). \end{aligned}$$

Mivel $(-1)^2 + 2^2 = 5 \neq 1$, ezért $R \notin \mathcal{Y}$, tehát $2\overrightarrow{PQ} \notin \vec{\mathcal{Y}}$. Így $\vec{\mathcal{Y}}$ nem lineáris altere az \mathbb{R}^2 valós vektortérnek és a 3.9. Kritérium alapján az \mathcal{Y} részhalmaz nem affin résztere az \mathbb{R}^2 valós affin térnek. ◇

3.5. Lineáris varietások

A vektortérhez rendelt affin tér a leggyakrabban előforduló affin tér, amellyel a gyakorlatban találkozhatunk. A 2.1.1. alfejezetben minden vektortéren értelmeztünk egy affin tér struktúrát. A vektortérhez rendelt affin tér résztereire bevezetjük a *lineáris varietás* elnevezést. Ha \mathcal{V} egy

\mathbb{K} -vektortér, akkor mint $(\mathcal{V}, +)$ Abel-féle csoport hat önmagán és $t : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $t(v, w) = v + w$ a vektorok eltolása egy másik vektorral. Így a \mathcal{V} lineáris varietásai a 3.3. Tulajdonság alapján

$$\mathcal{Y} = t(\mathcal{W}, A) = \{t(w, A) \mid w \in \mathcal{W}\} = \{A + w \mid w \in \mathcal{W}\} = A + \mathcal{W}$$

alakú részhalmazok, ahol \mathcal{W} a \mathcal{V} vektortér egy lineáris altere és $A \in \mathcal{V}$ egy pont. Tehát a \mathcal{V} lineáris varietásai pontosan a 2.1.2. alfejezetben tárgyalt lineáris alterek eltoltjai. A \mathcal{W} lineáris alteret egy bázisa (vagy egy generátorrendszere) segítségével szoktuk megadni. Ha (w_1, \dots, w_k) a \mathcal{W} lineáris alter egy bázisa (vagy generátorrendszere), akkor

$$\mathcal{Y} = A + \langle w_1, \dots, w_k \rangle = \{A + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

3.5.1. Az \mathbb{R}^3 valós affin tér affin részterei (lineáris varietásai)

Ebben az alfejezetben az \mathbb{R}^3 lineáris varietásait fogjuk tárgyalni. Belátjuk, hogy az egyenesek (1-dimenziós affin részterek/lineáris varietások) és síkok (2-dimenziós affin részterek/lineáris varietások) az analitikus geometriából fogalmaknak felelnek meg és a tanult egyenletekkel írhatók le. Ezzel is hangsúlyozzuk, hogy az affin részterek az egyenesek, síkok affin geometriai megfelelői és általánosításai.

Emlékeztetünk, hogy az \mathbb{R}^3 affin tér alaptere az $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$ halmaz (a pontok halmaza), iránytere az $\vec{\mathcal{X}} = \mathbb{R}^3$ valós vektortér (a szabad vektorok vektortere) és a hatás $t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t(v, A) = v + A$, minden $A \in \mathbb{R}^3$ (pont) és minden $v \in \mathbb{R}^3$ (vektor) esetén. Megjegyezzük, hogy a struktúrafüggvény $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(A, B) = B - A$, minden $A, B \in \mathbb{R}^3$ (pontok) esetén.

- (i) A 0-dimenziós affin részterek a pontok. Legyen \mathcal{Y}_0 az \mathbb{R}^3 affin tér egy 0-dimenziós affin résztere. Az $\vec{\mathcal{Y}}_0$ iránytér az \mathbb{R}^3 valós vektortér egy 0-dimenziós lineáris altere, vagyis $\vec{\mathcal{Y}}_0 = \{\vec{0}\}$, ahol $\vec{0} = (0, 0, 0)$ az \mathbb{R}^3 nullvektora. Ha $A \in \mathcal{Y}_0$, akkor a (3.2) összefüggés alapján

$$\mathcal{Y}_0 = t(\{\vec{0}\}, A) = \{t(\vec{0}, A)\} = \{\vec{0} + A\} = \{A\},$$

vagyis az \mathcal{Y}_0 affin résztér csak az A pontból áll.

- (ii) Az 1-dimenziós affin részterek pontosan a térbeli egyenesek. Legyen \mathcal{Y}_1 az \mathbb{R}^3 valós affin tér egy 1-dimenziós résztere. Ekkor az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ iránytér az \mathbb{R}^3 valós vektortér egy 1-dimenziós lineáris altere, s mint ilyent egyetlen bázisvektor feszíti ki. Tehát létezik $v = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$, $v \neq \vec{0}$ úgy, hogy $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \langle v \rangle = \{\lambda v \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ha $A = (a, b, c) \in \mathcal{Y}_1$ az affin résztér egy pontja, akkor a (3.2) összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= t(\vec{\mathcal{Y}}_1, A) = \{t(w, A) \mid w \in \vec{\mathcal{Y}}_1\} = \{t(\lambda v, A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda v + A \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda(p, q, r) + (a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Az $(x, y, z) \in \mathcal{Y}_1$ pontosan akkor, ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$(x, y, z) = \lambda(p, q, r) + (a, b, c) \iff \begin{cases} x = a + \lambda p \\ y = b + \lambda q \\ z = c + \lambda r \end{cases} \iff \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r} = \lambda.$$

Az \mathbb{R}^3 affin tér \mathcal{Y}_1 1-dimenziós affin résztere pontosan az $A = (a, b, c)$ ponton átmenő és $v = (p, q, r)$ irányvektorú egyenes. Az \mathcal{Y}_1 egyenes irányvektorai pontosan az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ iránytér

bázisvektorai. Míg az egyeneshez rendelt irányvektor nem egyértelmű, addig az általuk kifeszített lineáris altér már egyértelmű, s ez az egyenes iránytere. Tehát az \mathbb{R}^3 1-dimenziós affin részterei pont az analitikus geometriából ismert egyeneseknek felelnek meg.

3.12. Példa

Adott az \mathbb{R}^3 valós vektortér $\vec{\mathcal{Y}} = \langle (2, 1, -3) \rangle = \{(2\lambda, \lambda, -3\lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ lineáris altere és az \mathbb{R}^3 valós affin tér $A = (4, 7, -11)$ pontja. Ekkor az $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$ 1-dimenziós résztér egyenlete

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z+11}{-3}.$$

Az $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+6}{-4}$ egyenletű egyenes pedig az \mathbb{R}^3 affin tér azon résztere, amelynek $\mathcal{Y} = \{\lambda(0, 3, -4) + (-3, 2, -6) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ az alaptér és $\vec{\mathcal{Y}} = \langle (0, 3, -4) \rangle = \{\lambda(0, 3, -4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ az iránytere. \diamond

- (iii) A 2-dimenziós affin részterek pontosan a térbeli síkok. Legyen \mathcal{Y}_2 az \mathbb{R}^3 valós affin tér egy 2-dimenziós résztere. Ekkor az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ iránytér az \mathbb{R}^3 valós vektortér egy 2-dimenziós lineáris altere, tehát két bázisvektor feszíti ki. Így léteznek $v_1 = (p_1, q_1, r_1)$ és $v_2 = (p_2, q_2, r_2) \in \mathbb{R}^3$ lineárisan független vektorok úgy, hogy $\vec{\mathcal{Y}}_2 = \langle v_1, v_2 \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$. Ha $A = (a, b, c) \in \mathcal{Y}_2$ az affin résztér egy pontja, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2 &= t(\vec{\mathcal{Y}}_2, A) = \{t(w, A) \mid w \in \vec{\mathcal{Y}}_2\} \\ &= \{t(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, A) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + A \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda_1(p_1, q_1, r_1) + \lambda_2(p_2, q_2, r_2) + (a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Az $(x, y, z) \in \mathcal{Y}_2$ pontosan akkor, ha léteznek $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ skalárok úgy, hogy

$$(x, y, z) = \lambda_1(p_1, q_1, r_1) + \lambda_2(p_2, q_2, r_2) + (a, b, c) \iff \begin{cases} x = a + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \\ y = b + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \\ z = c + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 \end{cases}.$$

Tehát $(x, y, z) \in \mathcal{Y}_2$ pontosan akkor, hogy ha a λ_1, λ_2 ismeretlenekből álló

$$\begin{cases} \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = x - a \\ \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = y - b \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = z - c \end{cases}$$

egyenletrendszernek létezik megoldása, ami egyenértékű a rendszer kompatibilitásával, vagyis

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & x-a \\ q_1 & q_2 & y-b \\ r_1 & r_2 & z-c \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = 2 \iff \begin{vmatrix} x-a & p_1 & p_2 \\ y-b & q_1 & q_2 \\ z-c & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \\ &\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ez pontosan az $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ponton átmenő és a $v_1 = (p_1, q_1, r_1)$, $v_2 = (p_2, q_2, r_2)$ független irányokkal párhuzamos sík egyenlete. Míg azok a lineárisan független (v_1, v_2) vektorpárok, amelyekkel a sík párhuzamos nem egyértelműek, addig az általuk kifeszített lineáris altér egyértelmű lesz, s ez a sík iránytere. Tehát az \mathbb{R}^3 2-dimenziós affin részterei pont az analitikus geometriából ismert síkoknak felelnek meg.

3.13. Példa

Adott az \mathbb{R}^3 valós vektortér

$$\vec{\mathcal{Y}} = \langle (2, 1, -3), (7, 4, 0) \rangle = \{ \lambda_1(2, 1, -3) + \lambda_2(7, 4, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

lineáris altere és az \mathbb{R}^3 valós affin tér $A = (4, 7, -11)$ pontja. Ekkor az $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$ 2-dimenziós résztér egyenlete

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z+11 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff 12x - 21y + z + 110 = 0.$$

Tekintsük a $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ egyenletű síkot. A sík egy pontja $A = (-6, 0, 0)$ és párhuzamos a $v_1 = (2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 4, 3)$ lineárisan független irányokkal. A síknak, mint affin résztérnek az alaptere $\mathcal{Y} = \{ (-6, 0, 0) + \lambda_1(2, 0, 1) + \lambda_2(0, 4, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ (a $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza), az iránytere pedig a v_1, v_2 vektorok által kifeszített $\vec{\mathcal{Y}} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (2, 0, 1), (0, 4, 3) \rangle = \{ \lambda_1(2, 0, 1) + \lambda_2(0, 4, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$ lineáris altér (a $2x + 3y - 4z = 0$ homogén egyenlet megoldáshalmaza). \diamond

- (iv) Az 3-dimenziós affin résztérből egy van és ez maga az \mathbb{R}^3 affin tér. Valóban, az \mathbb{R}^3 valós vektortérnek egyetlen 3-dimenziós lineáris altere van és ez önmaga. Emiatt $\mathbb{R}^3 = t(\mathbb{R}^3, A)$, minden $A \in \mathbb{R}^3$ pont esetén.

3.5.2. Affin részterek és az érintőtér lineáris varietásai

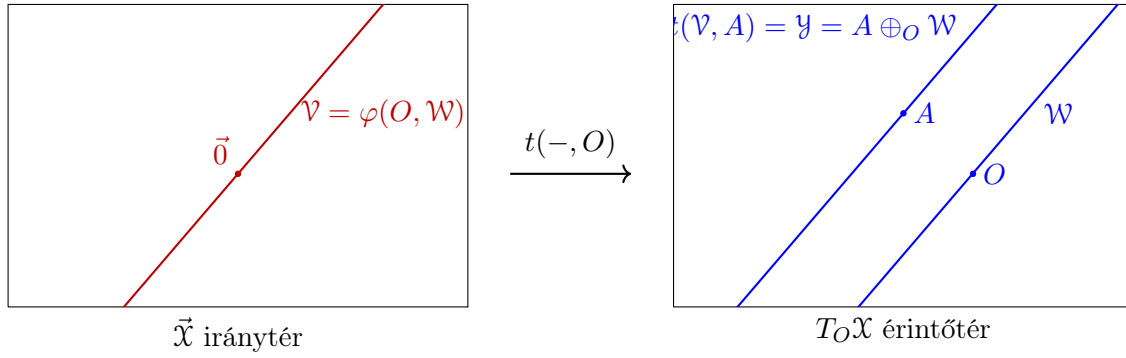
A 2.2. alfejezetben megszerkesztettük az \mathcal{X} affin tér $O \in \mathcal{X}$ pontjában vett $T_O\mathcal{X}$ érintőtérét azáltal, hogy az \mathcal{X} alapterén értelmeztük a \oplus_O összeadást és \odot_O skalárral való szorzást. Az így szerkesztett $(T_O\mathcal{X}, \oplus_O, \odot_O, \mathbb{K})$ vektortér, mint halmaz megegyezik az affin tér \mathcal{X} alapterével, de az értelmezett műveletek függenek az O pont (az érintőtér nullvektorának) megválasztásától. A műveletek megszerkesztése úgy történt, hogy a $t(-, O) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow T_O\mathcal{X}$ függvény lineáris izomorfizmus legyen.

3.14. Tulajdonság

A $T_O\mathcal{X}$ érintőtér lineáris varietásai, mint halmazok megegyeznek az \mathcal{X} affin részterekkel. Sajátosan az $T_O\mathcal{X}$ lineáris alterei megegyeznek az O ponton átmenő affin részterekkel.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{W} a $T_O\mathcal{X}$ vektortér egy lineáris varietása. Ekkor létezik a $T_O\mathcal{X}$ vektortér egy \mathcal{W} lineáris altere és egy $A \in T_O\mathcal{X}$ eleme úgy, hogy $\mathcal{W} = A \oplus_O \mathcal{W} = \{ A \oplus_O B \in T_O\mathcal{X} \mid B \in \mathcal{W} \}$. Mivel $\varphi(O, -) : T_O\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ lineáris izomorfizmus, ezért

$$\mathcal{V} = \varphi(O, -)(\mathcal{W}) = \varphi(O, \mathcal{W}) = \{ \varphi(O, B) = \overrightarrow{OB} \mid B \in \mathcal{W} \} \leq_{\mathbb{K}} \vec{\mathcal{X}}$$



3.6. ábra. Affin részterek és az érintőtér lineáris varietásainak egyenértékűsége.

az iránytér egy lineáris altere. Továbbá tetszőleges $B \in \mathcal{W}$ esetén

$$C = A \oplus_O B \iff \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}.$$

Innen következik, hogy $A \oplus_O B = C = t(\overrightarrow{AC}, A) = t(\overrightarrow{OB}, A)$, minden $B \in \mathcal{W}$ esetén. Tehát

$$\mathcal{Y} = A \oplus_O \mathcal{W} = \{A \oplus_O B \mid B \in \mathcal{W}\} = \{t(\overrightarrow{OB}, A) \mid B \in \mathcal{W}\} = t(\mathcal{V}, A),$$

az \mathcal{X} affin résztere.

Fordítva, legyen $t(A, \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{X}$ egy affin résztér, ahol \mathcal{V} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris altere és $A \in \mathcal{X}$ egy pont. Mivel $t(O, -) : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow T_O\mathcal{X}$ lineáris izomorfizmus, ezért $\mathcal{W} = t(\mathcal{V}, O) = \{t(v, O) \mid v \in \mathcal{V}\}$ a $T_O\mathcal{X}$ érintőtér lineáris altere. Ha tetszőleges $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén $B = t(v, O)$, vagyis $v = \overrightarrow{OB}$, akkor

$$C = t(v, A) = t(\overrightarrow{OB}, A) \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \iff C = A \oplus_O B.$$

Innen következik, hogy $t(\mathcal{V}, A) = \{t(v, A) \mid v \in \mathcal{V}\} = \{A \oplus_O B \mid B \in \mathcal{W}\} = A \oplus_O \mathcal{W}$ a $T_O\mathcal{X}$ érintőtér egy lineáris varietása. \square

3.6. Affin résztér jellemzése affin kombinációval

A következő tétel analóg azzal a lineáris algebrai tulajdonsággal, hogy egy \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortér \mathcal{W} nemüres részhalmaza pontosan akkor lineáris altér, ha \mathcal{W} zárt a lineáris kombinációkra, azaz tetszőleges $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{W}$ vektorok és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok esetén $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in \mathcal{W}$. Gyakorlatban úgy szoktuk igazolni, hogy \mathcal{W} egy lineáris altér, hogy belátjuk, hogy tetszőleges két vektorának tetszőleges lineáris kombinációja is \mathcal{W} -ben van, mivel ebből indukcióval következik, hogy tetszőlegesen sok \mathcal{W} -beli vektor tetszőleges lineáris kombinációja is \mathcal{W} -ben van. Ennek a tulajdonságnak az affin geometriai megfelelője a következő 3.15. Tétel, amely azt mondja, hogy egy \mathcal{X} affin tér egy nemüres \mathcal{S} részhalmaza pontosan akkor affin résztér, ha tetszőleges \mathcal{S} -beli pontoknak a tetszőleges affin kombinációja is \mathcal{S} -ben van.

3.15. Tétel (Affin résztér jellemzése affin kombinációval)

A \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér egy \mathcal{S} nemüres részhalmaza akkor és csakis akkor affin résztér, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$ pontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ affin súlyok esetén $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \in \mathcal{S}$, vagyis az \mathcal{S} részhalmaz zárt az affin kombinációkra nézve.

Bizonyítás.

\Rightarrow Ha \mathcal{S} az \mathcal{X} egy nemüres affin résztere, akkor \mathcal{S} önmagában egy affin tér és tetszőleges $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$ pontjainak tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ affin súlyokkal vett affin kombinációja is \mathcal{S} -ben van, vagyis $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \in \mathcal{S}$.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy az \mathcal{S} nemüres részhalmaz zárt az affin kombinációra nézve. Rögzítünk egy $O \in \mathcal{S}$ pontot és legyen $\mathcal{U} = \{\overrightarrow{OB} \in \vec{\mathcal{X}} \mid B \in \mathcal{S}\}$. Be fogjuk látni, hogy \mathcal{U} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér lineáris altére.

Az \mathcal{U} halmaz nem üres, mert $\vec{0} = \overrightarrow{OO} \in \mathcal{U}$. Legyenek $\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2} \in \mathcal{U}$ tetszőleges vektorok és $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ pedig tetszőleges skalárok. A feltevés szerint az $O, B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ pontok $1 - \mu_1 - \mu_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ affin súlyokkal vett affin kombinációja is \mathcal{S} -ben van, tehát

$$M = (1 - \mu_1 - \mu_2)O + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 \in \mathcal{S},$$

így az \mathcal{U} halmaz értelmezése miatt $\overrightarrow{OM} \in \mathcal{U}$. Az affin kombináció értelmezése miatt

$$\mu_1 \overrightarrow{OB_1} + \mu_2 \overrightarrow{OB_2} = (1 - \mu_1 - \mu_2) \overrightarrow{OO} + \mu_1 \overrightarrow{OB_1} + \mu_2 \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OM} \in \mathcal{U}.$$

Tehát az \mathcal{U} halmaz nem üres és zárt a lineáris kombinációra, ezért \mathcal{U} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris altére, így a 3.7. Tétel alapján \mathcal{S} az \mathcal{X} affin résztere. \square

3.16. Megjegyzés

Ahhoz, hogy \mathcal{S} affin résztér legyen a 3.15. Tétel bizonyítása alapján elég leellenőrizni, hogy \mathcal{S} zárt tetszőleges három pontnak tetszőleges affin kombinációjára. \diamond

3.7. Affin részterek bennfoglalása

Azt vizsgáljuk, hogy egy pont és egy lineáris altér segítségével megadott részterek mikor tartalmazzák egymást. A következő tulajdonság azt mondja, hogy egy affin résztér pontosan akkor van benne egy másikban, ha az egyik iránytere, illetve a két résztér egy-egy pontja által alkotott vektor benne van a másik irányterében.

3.17. Tulajdonság (Affin részterek bennfoglalásának jellemzése)

Legyen \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 az \mathcal{X} affin tér két résztere. Az \mathcal{Y}_1 affin résztér iránytere $\vec{\mathcal{Y}}_1$ és egy pontja $A_1 \in \mathcal{Y}_1$, míg az \mathcal{Y}_2 affin résztér iránytere $\vec{\mathcal{Y}}_2$ és egy pontja $A_2 \in \mathcal{Y}_2$. Ekkor az $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$ bennfoglalás akkor és csakis akkor teljesül, ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2$ és $\overrightarrow{A_2 A_1} \in \vec{\mathcal{Y}}_2$.

Bizonyítás.

\Rightarrow Ha $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$, akkor rögzített $A_1 \in \mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$ pont esetén a (3.2) összefüggés alapján

$$\vec{\mathcal{Y}}_1 = \{\overrightarrow{A_1 B} \in \vec{\mathcal{X}} \mid B \in \mathcal{Y}_1\} \subseteq \{\overrightarrow{A_1 B} \in \vec{\mathcal{X}} \mid B \in \mathcal{Y}_2\} = \vec{\mathcal{Y}}_2,$$

továbbá az $A_1, A_2 \in \mathcal{Y}_2$ reláció miatt $\overrightarrow{A_2 A_1} \in \vec{\mathcal{Y}}_2$.

\Leftarrow Ha $B_1 \in \mathcal{Y}_1$ egy tetszőleges pont, akkor az $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ alapján $\overrightarrow{A_1 B_1} \in \vec{\mathcal{Y}}_1$. A feltevés szerint $\overrightarrow{A_2 A_1} \in \vec{\mathcal{Y}}_2$, és mivel $\vec{\mathcal{Y}}_2$ lineáris altér, ezért $\overrightarrow{A_2 B_1} = \overrightarrow{A_2 A_1} + \overrightarrow{A_1 B_1} \in \vec{\mathcal{Y}}_2$. Innen kapjuk, hogy $B_1 = t(\overrightarrow{A_2 B_1}, A_2) \in t(\vec{\mathcal{Y}}_2, A_2) = \mathcal{Y}_2$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$. \square

Mutatunk két példát arra, hogy gyakorlatban hogyan állapítható meg lineáris varietások bennfoglalása.

3.18. Példa

Az \mathbb{R}^4 affin térben fennáll-e az $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$ bennfoglalás, ha

$$\mathcal{Y}_1 = \underbrace{(0, 1, 2, -4)}_{A_1} + \underbrace{\langle (1, -1, 0, 1), (1, 1, -1, 4) \rangle}_{\vec{y}_1} \quad \text{és}$$

$$\mathcal{Y}_2 = \underbrace{(5, 0, 0, -1)}_{A_2} + \underbrace{\langle (1, 1, -1, 2), (2, 0, -1, 3), (1, -1, 0, -1) \rangle}_{\vec{y}_2}?$$

A 3.17. Tulajdonság alapján $\mathcal{Y}_1 = t(\vec{y}_1, A_1) \subseteq \mathcal{Y}_2 = t(\vec{y}_2, A_2)$ pontosan akkor, ha

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \underbrace{(5, 0, 0, -1)}_{A_2} - \underbrace{(0, 1, 2, -4)}_{A_1} \in \vec{y}_2 \quad \text{és} \quad \vec{y}_1 \subseteq \vec{y}_2$$

$$\iff \underbrace{(5, -1, -2, 3)}_{\overrightarrow{A_1 A_2}}, \underbrace{(1, -1, 0, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, 1, -1, 4)}_{v_2} \in \vec{y}_2 = \langle \underbrace{(1, 1, -1, 2)}_{w_1}, \underbrace{(2, 0, -1, 3)}_{w_2}, \underbrace{(1, -1, 0, -1)}_{w_3} \rangle,$$

vagyis mindhárom $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = v_1, u = v_2, u = \overrightarrow{A_1 A_2}$ esetén az

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = \lambda_1 \underbrace{(1, 1, -1, 2)}_{w_1} + \lambda_2 \underbrace{(2, 0, -1, 3)}_{w_2} + \lambda_3 \underbrace{(1, -1, 0, -1)}_{w_3} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = u_1 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = u_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = u_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = u_4 \end{cases}$$

egyenletrendszernek létezik megoldása. A táblázat első felének oszlopaiba az \vec{y}_2 irányteret generáló w_1, w_2, w_3 vektorok (az egyenletrendszer mátrixának oszlopai), míg a második felének oszlopaiba az \vec{y}_1 irányteret generáló v_1, v_2 vektorok és az $\overrightarrow{A_1 A_2}$ vektor kerül (a rendszer(ek) szabadtagjai). Így egyetlen táblázattal vizsgáljuk egyszerre három egyenletrendszer (amelyeknek szabadtagjai rendre $v_1, v_2, \overrightarrow{A_1 A_2}$) megoldásainak létezését.

	w_1	w_2	w_3	v_1	v_2	$\overrightarrow{A_1 A_2}$	
w_3	1	2	1	1	1	5	
	1	0	-1	-1	1	-1	$S_2 + S_1$
	-1	-1	0	0	-1	-2	
	2	3	-1	1	4	3	$S_4 + S_1$
w_3	1	2	1	1	1	5	$S_1 + S_3$
	2	2	0	0	2	4	$S_2 + 2S_3$
w_1	-1	-1	0	0	-1	-2	$-S_3$
	3	5	0	2	5	8	$S_4 + 3S_3$
w_3	0	1	1	1	0	3	$S_1 - S_4/2$
	0	0	0	0	0	0	
w_1	1	1	0	0	1	2	$S_3 - S_4/2$
w_2	0	2	0	2	2	2	$S_4/2$
w_3	0	0	1	0	-1	2	
	0	0	0	0	0	0	
w_1	1	0	0	-1	0	1	
w_2	0	1	0	1	1	1	

Az egyenletrendszerek kompatibilisek mindhárom szabadtagra, mivel a táblázat második sora (amelyikből nem lehet pivotot választani) csupa nulla, így \mathcal{Y}_1 benne van a \mathcal{Y}_2 -ben. \diamond

3.19. Példa

Az \mathbb{R}^4 affin térben fennáll-e az $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$ bennfoglalás, ha

$$\mathcal{Y}_1 = \underbrace{(0, 1, 2, -4)}_{A_1} + \underbrace{\langle (2, 0, 0, 1), (1, 2, -1, 4) \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_1} \quad \text{és}$$

$$\mathcal{Y}_2 = \underbrace{(5, 0, 0, -1)}_{A_2} + \underbrace{\langle (1, 1, -1, 2), (2, 0, -1, 3), (1, -1, 0, -1) \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_2}?$$

A 3.17. Tulajdonság alapján $\mathcal{Y}_1 = t(\vec{\mathcal{Y}}_1, A_1) \subseteq \mathcal{Y}_2 = t(\vec{\mathcal{Y}}_2, A_2)$ pontosan akkor, ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 A_2} &= \underbrace{(5, 0, 0, -1)}_{A_2} - \underbrace{(0, 1, 2, -4)}_{A_1} \in \vec{\mathcal{Y}}_2 \quad \text{és} \quad \vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2 \\ \iff \underbrace{(5, -1, -2, 3)}_{\overrightarrow{A_1 A_2}}, \underbrace{(2, 0, 0, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, 2, -1, 4)}_{v_2} &\in \vec{\mathcal{Y}}_2 = \langle \underbrace{(1, 1, -1, 2)}_{w_1}, \underbrace{(2, 0, -1, 3)}_{w_2}, \underbrace{(1, -1, 0, -1)}_{w_3} \rangle, \end{aligned}$$

vagyis mindhárom $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) = v_1, u = v_2, u = \overrightarrow{A_1 A_2}$ esetén az

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = \lambda_1 \underbrace{(1, 1, -1, 2)}_{w_1} + \lambda_2 \underbrace{(2, 0, -1, 3)}_{w_2} + \lambda_3 \underbrace{(1, -1, 0, -1)}_{w_3} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = u_1 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = u_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = u_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = u_4 \end{cases}$$

egyenletrendszernek létezik megoldása. A táblázat első felének oszlopaiba az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ irányteret generáló w_1, w_2, w_3 vektorok (az egyenletrendszer mátrixának oszlopai), míg a második felének oszlopaiba az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ irányteret generáló v_1, v_2 vektorok és az $\overrightarrow{A_1 A_2}$ vektor kerül (a rendszer(ek) szabadtagjai):

	w_1	w_2	w_3	v_1	v_2	$\overrightarrow{A_1 A_2}$	
w_3	1	2	1	2	1	5	
	1	0	-1	0	2	-1	$S_2 + S_1$
	-1	-1	0	0	-1	-2	
	2	3	-1	1	4	3	$S_4 + S_1$
w_3	1	2	1	2	1	5	$S_1 + S_3$
	2	2	0	2	3	4	$S_2 + 2S_3$
w_1	-1	-1	0	0	-1	-2	
	3	5	0	3	5	8	$S_4 + 3S_3$
w_3	0	1	1	2	0	3	
	0	0	0	2	1	0	
w_1	-1	-1	0	0	-1	-2	
	0	2	0	3	2	2	

Az egyenletrendszerek nem kompatibilisek mindhárom szabadtagra (az $u = v_1$ és $u = v_2$ esetén), mivel a táblázat második sora (amelyikből nem lehet pivotot választani) nem csupa nulla, így \mathcal{Y}_1 nincs benne a \mathcal{Y}_2 -ben. \diamond

3.8. Affin részterek egyenlősége

Azt vizsgáljuk, hogy egy pont és egy lineáris altér segítségével adott affin részterek mikor egyenlők. A következő tulajdonság azt mondja, hogy két affin részter pontosan akkor egyenlő, ha az irányterük megegyezik, illetve egy-egy pontjuk által alkotott vektor benne van a közös irányterben.

3.20. Tulajdonság (Affin részterek egyenlőségének jellemzése)

Legyen \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 az \mathcal{X} affin tér két résztere. Az \mathcal{Y}_1 affin részter iránytere $\vec{\mathcal{Y}}_1$ és egy pontja $A_1 \in \mathcal{Y}_1$, míg az \mathcal{Y}_2 affin részter iránytere $\vec{\mathcal{Y}}_2$ és egy pontja $A_2 \in \mathcal{Y}_2$. Az $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$ és $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$.

Bizonyítás. A 3.17. Tulajdonság alapján következik két oldali bennfoglalással. \square

3.21. Megjegyzés

Ha \mathcal{W}_1 és \mathcal{W}_2 egy \mathbb{K} -feletti \mathcal{V} vektortér két azonos dimenziós lineáris altere úgy, hogy $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, akkor $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2$. Hasonló állítás igaz affin részterek esetén is. Ha \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 egy \mathcal{X} affin tér két nemüres, azonos dimenziós affin résztere úgy, hogy $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$, akkor $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$. Valóban, az irányterük azonos dimenziósak, továbbá a 3.17. Tulajdonság alapján $\vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2$, így $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$. Végül egy $A \in \mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$ pont esetén $\mathcal{Y}_1 = t(\vec{\mathcal{Y}}_1, A) = t(\vec{\mathcal{Y}}_2, A) = \mathcal{Y}_2$. \diamond

3.22. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós affin tér

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= \underbrace{(0, 1, 2, -3)}_{A_1} + \underbrace{\langle (5, -5, -11, 2), (-6, 13, 9, -1) \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_1} \quad \text{és} \\ \mathcal{Y}_2 &= \underbrace{(-2, 2, 7, -4)}_{A_2} + \underbrace{\langle (1, 2, -4, 1), (-1, 3, 1, 0) \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_2} \end{aligned}$$

lineáris varietásai (affin részterei) egyenlők. Valóban, a 3.20. Tulajdonság alapján $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ pontosan akkor, ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$ és $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$. Az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ és $\vec{\mathcal{Y}}_2$ azonos dimenziós lineáris alterek (két lineárisan független vektor feszíti ki mindkettőt), ezért az egyenlőségükhöz elég belátni, hogy az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ lineáris altér $v_1 = (5, -5, -11, 2)$, $v_2 = (-6, 13, 9, -1)$ generátorai benne vannak az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ lineáris altérben. Ezenkívül be kell látni, hogy $\overrightarrow{A_1 A_2} = (-2, 2, 7, -4) - (0, 1, 2, -3) = (-2, 1, 5, -1) \in \vec{\mathcal{Y}}_2$. Összegezve az $u = v_1$, $u = v_2$ és $u = \overrightarrow{A_1 A_2}$ vektorok esetén be kell látni, hogy $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \vec{\mathcal{Y}}_2$, vagyis létezik $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = \lambda_1 \underbrace{(1, 2, -4, 1)}_{w_1} + \lambda_2 \underbrace{(-1, 3, 1, 0)}_{w_2} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = u_1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = u_2 \\ -4\lambda_1 + \lambda_2 = u_3 \\ \lambda_1 = u_4 \end{cases}. \quad (3.3)$$

Ehhez három egyenletrendszer megoldhatóságát kell belátni, amelyet a táblázatos módszerrel akár egyszerre is megtehetünk. A táblázat első felének oszlopaiba kerülnek az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ alteret generáló vektorok (az egyenletrendszerünk mátrixának oszlopai), míg a jobb oldalára a v_1, v_2 vektorok (az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ generátorai) és az $\overrightarrow{A_1 A_2}$ vektor (ezek játszik az egyenletrendszer szabadtagjainak szerepét):

	w_1	w_2	v_1	v_2	$\overrightarrow{A_1 A_2}$	
	1	-1	5	-6	-2	$S_1 - S_4$
	2	3	-5	13	1	$S_2 - 2S_4$
	-4	1	-11	9	5	$S_3 + 4S_4$
w_1	1	0	2	-1	-1	
	0	-1	3	-5	-1	$S_1 + S_3$
	0	3	-9	15	3	$S_2 - 3S_3$
w_2	0	1	-3	5	1	
w_1	1	0	2	-1	-1	
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	
w_2	0	1	-3	5	1	
w_1	1	0	2	-1	-1	

Mivel az első és második sor (ahonnan nem lehet pivotot választani) csupa nulla, ezért a (3.3) jobb oldalán álló egyenletrendszer kompatibilis mindhárom $u = v_1$, $u = v_2$ és $u = \overrightarrow{A_1 A_2}$ esetén, így $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$. ◇

3.23. Példa

Az \mathbb{R}^4 affin tér

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= \underbrace{(1, 2, 3, 0)}_{A_1} + \underbrace{\langle (5, -5, -11, 2), (-6, 13, 9, -1) \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_1} \quad \text{és} \\ \mathcal{Y}_2 &= \underbrace{(1, 1, 1, 1)}_{A_2} + \underbrace{\langle (1, 2, -4, 1), (-1, 3, 1, 0) \rangle}_{\vec{\mathcal{Y}}_2} \end{aligned}$$

lineáris varietásai (affin részterei) nem egyenlőek. Valóban, a 3.20. Tulajdonság alapján $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$ pontosan akkor, ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$ és $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$. Az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ és $\vec{\mathcal{Y}}_2$ azonos dimenziós lineáris alterek (két lineárisan független vektor feszíti ki mindkettőt), ezért az egyenlőségükhöz elég belátni, hogy az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ lineáris altér $v_1 = (5, -5, -11, 2)$, $v_2 = (-6, 13, 9, -1)$ generátorai benne vannak az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ lineáris altérben. Ezenkívül be kell látni, hogy $\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, 2, 3, 0) - (1, 1, 1, 1) = (0, 1, 2, -1) \in \vec{\mathcal{Y}}_2$. Összegezve az $u = v_1$, $u = v_2$ és $u = \overrightarrow{A_1 A_2}$ vektorok esetén be kell látni, hogy $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \vec{\mathcal{Y}}_2$, vagyis létezik $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = \lambda_1 \underbrace{(1, 2, -4, 1)}_{w_1} + \lambda_2 \underbrace{(-1, 3, 1, 0)}_{w_2} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = u_1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = u_2 \\ -4\lambda_1 + \lambda_2 = u_3 \\ \lambda_1 = u_4 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Ehhez három egyenletrendszer megoldhatóságát kell belátni, amelyet a táblázatos módszerrel akár egyszerre is megtehetünk. A táblázat első felének oszlopaiba kerülnek az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ alteret generáló vektorok (az egyenletrendszerünk mátrixának oszlopai), míg a jobb oldalára a v_1, v_2 vektorok (az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ generátorai) és az $\overrightarrow{A_1 A_2}$ vektor (ezek játszik az egyenletrendszer szabadtagjainak szerepét):

	w_1	w_2	v_1	v_2	$\overrightarrow{A_1 A_2}$	
	1	-1	5	-6	0	$S_1 - S_4$
	2	3	-5	13	1	$S_2 - 2S_4$
	-4	1	-11	9	2	$S_3 + 4S_4$
w_1	1	0	2	-1	-1	
	0	-1	3	-5	1	$S_1 + S_3$
	0	3	-9	15	3	$S_2 - 3S_3$
w_2	0	1	-3	5	-2	
w_1	1	0	2	-1	-1	
	0	0	0	0	-1	
	0	0	0	0	9	
w_2	0	1	-3	5	-2	
w_1	1	0	2	-1	-1	

Az első két sorban (ahonnan nem lehet pivotot választani) nem csupa nulla szerepel, ezért a (3.4) jobboldalán álló egyenletrendszer nem kompatibilis mindhárom $u = v_1$, $u = v_2$ és $u = \overrightarrow{A_1 A_2}$ esetén, így $\mathcal{Y}_1 \neq \mathcal{Y}_2$. (A táblázatból az is látható, hogy $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$, de $\overrightarrow{A_1 A_2} \notin \vec{\mathcal{Y}}_2$.) \diamond

3.9. Véges affin tér affin résztereinek száma

Legyen \mathbb{K} egy q elemű véges test és legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti n -dimenziós affin tér. A következőkben meghatározzuk az \mathcal{X} affin tér k -dimenziós affin résztereinek számát, ahol $k = 1, \dots, n$. A 3.3. Tulajdonság alapján minden $(\vec{\mathcal{Y}}, A) \in \mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}}) \times \mathcal{X}$ pár meghatározza az $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$ k -dimenziós affin részteret, ahol $\vec{\mathcal{Y}}$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy k -dimenziós lineáris altere és $A \in \mathcal{X}$ az affin tér egy pontja. Minden affin részter ilyen alakban áll elő. A 3.20. Tulajdonság alapján az $(\vec{\mathcal{Y}}_1, A_1), (\vec{\mathcal{Y}}_2, A_2) \in \mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}}) \times \mathcal{X}$ párok ugyanazt a k -dimenziós affin részteret határozzák meg, ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$ és $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 = \vec{\mathcal{Y}}_2$. Az 1.78. Tulajdonság alapján összesen

$$|\mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}}) \times \mathcal{X}| = |\mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}})| \cdot |\mathcal{X}| = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^n$$

altér-pont pár van és egy adott affin részteret ezek közül pontosan $|\vec{\mathcal{Y}}_1| = |\mathbb{K}^k| = q^k$ pár (az $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1$ vektorok száma) határoz meg. Tehát a \mathbb{K} -feletti n -dimenziós \mathcal{X} affin tér k -dimenziós affin résztereinek száma

$$|\mathcal{A}_k(\mathcal{X})| = \frac{|\mathcal{L}_k(\vec{\mathcal{X}}) \times \mathcal{X}|}{q^k} = \frac{(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^{n-k}, \quad (3.5)$$

ahol $k = 1, \dots, n$.

3.24. Példa

A \mathbb{Z}_5^2 2-dimenziós ($n = 2$) \mathbb{Z}_5 test feletti ($q = 5$) affin térben az egyenesek ($k = 1$) száma $|\mathcal{A}_1(\mathbb{Z}_5^2)| = \frac{(5^2-1)5}{5-1} = 30$. A \mathbb{Z}_5^3 3-dimenziós ($n = 3$) \mathbb{Z}_5 test feletti ($q = 5$) affin térben az egyenesek ($k = 1$) száma $|\mathcal{A}_1(\mathbb{Z}_5^3)| = \frac{(5^3-1)5^2}{5-1} = 775$, míg a síkok ($k = 2$) száma $|\mathcal{A}_2(\mathbb{Z}_5^3)| = \frac{(5^3-1)}{5-1} \cdot 5 = 155$. \diamond

3.10. Affin részterek metszete

A csoportelméletből és lineáris algebrából már tanultatok, hogy egy csoport részcsoportjainak tetszőleges metszete részcsoport, illetve egy vektortér lineáris altereinek tetszőleges metszete is lineáris altér. Ezekhez a példákhoz képest az affin részterek esetén a metszet lehet üres halmaz is, míg részcsoportok, illetve részterek esetén a metszet nem üres, mert mindig tartalmazza a semleges elemet, illetve a nullvektort.

Igazolni fogjuk, hogy egy affin tér résztereinek tetszőleges metszete is affin résztér, továbbá ha a metszet nem üres, akkor a metszet iránytere megegyezik az irányterek metszetével. Végül adunk egy jellemzést arra, hogy két affin résztér metszete mikor nem üres.

3.25. Tulajdonság (Affin részterek metszete affin résztér)

Legyen \mathcal{X} egy affin tér. Minden $i \in I$ index esetén legyen \mathcal{Y}_i az \mathcal{X} affin tér egy nemüres résztere, és amelynek iránytere $\vec{\mathcal{Y}}_i$.

- (i) Az \mathcal{Y}_i , $i \in I$ affin részterek $\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i$ metszete is résztere \mathcal{X} -nek.
- (ii) Ha a $\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i$ metszet nem üres, akkor az iránytere egyenlő az irányterek $\cap_{i \in I} \vec{\mathcal{Y}}_i$ metszetével, azaz $\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i \neq \emptyset$ esetén $\overrightarrow{\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i} = \cap_{i \in I} \vec{\mathcal{Y}}_i$.

Bizonyítás. Ha a $\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i$ metszet üres, akkor nincs mit bizonyítani, mert konvenció szerint az üres halmaz minden affin térnek résztere. Ha a $\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i$ metszet nem üres, akkor létezik $A \in \cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i$ pont, tehát minden $i \in I$ index esetén egy $A \in \mathcal{Y}_i$. Ez alapján minden $i \in I$ index esetén az affin részterek felírhatók $\mathcal{Y}_i = t(\vec{\mathcal{Y}}_i, A)$ alakba. A metszet is felírható hasonló alakba:

$$\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i = \cap_{i \in I} t(\vec{\mathcal{Y}}_i, A) \stackrel{(\dagger)}{=} t(\cap_{i \in I} \vec{\mathcal{Y}}_i, A) = t(\cap_{i \in I} \vec{\mathcal{Y}}_i, A), \quad (3.6)$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy a $t(-, A)$ függvény bijektív, így részhalmazok metszetének képe egyenlő a képek metszetével. Az affin részterek $\vec{\mathcal{Y}}_i$, $i \in I$ irányterei az affin tér $\vec{\mathcal{X}}$ irányterének lineáris alterei, így az affin részterek iránytereinek $\cap_{i \in I} \vec{\mathcal{Y}}_i$ metszete is a $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér lineáris altere, ezért a 3.3. Tulajdonság alapján a $\cap_{i \in I} \mathcal{Y}_i$ metszet is affin résztér, amelynek iránytere $\cap_{i \in I} \vec{\mathcal{Y}}_i$. \square

A következő lemmában egy jellemzést adunk arra, hogy két affin résztér mikor metszi egymást. Egy \mathcal{V} vektortér \mathcal{P} és \mathcal{Q} nemüres részhalmazai esetén $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \{p + q \mid p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}\}$, lásd a B. Függelék.

3.26. Lemma

Legyen \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 az \mathcal{X} affin tér két nemüres affin résztere.

- (i) Ha az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterek metszete nem üres, akkor tetszőleges $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ pontok esetén $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$.
- (ii) Ha léteznek olyan $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ pontok, hogy $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$, akkor az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterek metszete nem üres.

Bizonyítás.

- (i) Ha az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterek metszete nem üres, akkor van közös pontjuk, vagyis létezik egy $B \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ pont. Mivel $A_1, B \in \mathcal{Y}_1$, illetve $B, A_2 \in \mathcal{Y}_2$, ezért $\overrightarrow{A_1 B} \in \vec{\mathcal{Y}}_1$ és $\overrightarrow{B A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_2$, ahonnan $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 B} + \overrightarrow{B A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$.

- (ii) Legyenek $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ olyan pontok, amelyekre $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$. Ekkor léteznek $v_1 \in \vec{\mathcal{Y}}_1$ és $v_2 \in \vec{\mathcal{Y}}_2$ vektorok úgy, hogy $\overrightarrow{A_1 A_2} = v_1 + v_2$, ahonnan $v_1 = \overrightarrow{A_1 A_2} - v_2$. Az $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ pont $v_1 \in \vec{\mathcal{Y}}_1$ vektorral való eltoltja is az \mathcal{Y}_1 affin résztérben van, azaz $B_1 = t(v_1, A_1) \in \mathcal{Y}_1$. Hasonlóan az $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ pont $-v_2 \in \vec{\mathcal{Y}}_2$ vektorral való eltoltja is az \mathcal{Y}_2 affin résztérben van, azaz $B_2 = t(-v_2, A_2) \in \mathcal{Y}_2$. Ekkor a B_1 és B_2 pontok egybeesnek, mert

$$B_1 = t(v_1, A_1) = t(-v_2 + \overrightarrow{A_1 A_2}, A_1) = t(-v_2, t(\overrightarrow{A_1 A_2}, A_1)) = t(-v_2, A_2) = B_2.$$

Tehát $B_1 = B_2$ az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterek közös pontja, így a metszetük nem üres. \square

3.27. Következmény

Ha az \mathcal{X} affin tér \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterei esetén teljesül, hogy $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$, akkor \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 metszik egymást.

Bizonyítás. Minden $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ pontok esetén $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$, így a 3.26. Lemma (ii) alpontja alapján \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 metszik egymást. \square

3.28. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortérben adottak az

$$\mathcal{Y}_1 = (1, 2, 3, 4) + \langle (2, 1, 0, -2), (1, 1, -1, 1) \rangle \quad \text{és} \quad \mathcal{Y}_2 = (0, 1, 3, 3) + \langle (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -3) \rangle.$$

lineáris varietások. A metszetüket a következőképpen számolhatjuk ki. Az \mathcal{Y}_1 elemei

$$(1, 2, 3, 4) + \lambda_1(2, 1, 0, -2) + \lambda_2(1, 1, -1, 1)$$

alakúak, ahol $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, míg az \mathcal{Y}_2 elemei

$$(0, 1, 3, 3) + \mu_1(1, 1, 0, 1) + \mu_2(1, 0, 1, -3)$$

alakúak, ahol $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ minden elemére felírhatjuk, hogy \mathcal{Y}_1 -nek és \mathcal{Y}_2 -nek is eleme, vagyis

$$(1, 2, 3, 4) + \lambda_1(2, 1, 0, -2) + \lambda_2(1, 1, -1, 1) = (0, 1, 3, 3) + \mu_1(1, 1, 0, 1) + \mu_2(1, 0, 1, -3) \quad (3.7)$$

alakúak, valamely $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ esetén. A (3.7) összefüggés egy egyenletrendszert ad $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ismeretlenekben:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = & \mu_1 + \mu_2 \\ 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + \mu_1 \\ 3 & - \lambda_2 = 3 & + \mu_2 \\ 4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3 + \mu_1 - 3\mu_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

A második és harmadik egyenletből $\mu_2 = -\lambda_2$ és $\mu_1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2$. Ezeket visszahelyettesítve az első és az utolsó egyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Innen $\lambda_1 = -\lambda_2$. Tehát, ha μ_1, μ_2, λ_1 a főismeretlenek és $\lambda_2 = s \in \mathbb{R}$ a mellékismeretlen, akkor $\mu_1 = 1, \mu_2 = -s, \lambda_1 = -s$ és $\lambda_2 = s$ a (3.8) egyenletrendszer megoldásai, ahol $s \in \mathbb{R}$. Ha visszahelyettesítjük a $\lambda_1 = -s$ -t és $\lambda_2 = s$ -t a (3.7) bal oldalába, akkor azt kapjuk, hogy az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ metszet pontjai $(1, 2, 3, 4) - s(2, 1, 0, -2) + s(1, 1, -1, 1) = (1, 2, 3, 4) + s(-1, 0, -1, 3)$, $s \in \mathbb{R}$ alakúak, tehát $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = (1, 2, 3, 4) + \langle (-1, 0, -1, 3) \rangle$. Ezt a metszetet úgy is kiszámolhatjuk, hogy a $\mu_1 = 1$ és $\mu_2 = -s$ -t helyettesítjük be a (3.7) jobb oldalába. Ekkor azt kapjuk, hogy az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ pontjai $(0, 1, 3, 3) + (1, 1, 0, 1) - s(1, 0, 1, -3) = (1, 2, 3, 4) + s(-1, 0, -1, 3)$, $s \in \mathbb{R}$ alakúak, ahonnan szintén $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = (1, 2, 3, 4) + \langle (-1, 0, -1, 3) \rangle$ adódik. \diamond

3.29. Példa

A 3.28. Példa megoldható táblázatos módszerrel is. Az \mathbb{R}^4 vektortér következő két lineáris varietásának metszetét szeretnénk kiszámolni:

$$\mathcal{Y}_1 = \underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{A_1} + \underbrace{\langle (2, 1, 0, -2) \rangle}_{v_1} + \underbrace{\langle (1, 1, -1, 1) \rangle}_{v_2}, \quad \mathcal{Y}_2 = \underbrace{(0, 1, 3, 3)}_{A_2} + \underbrace{\langle (1, 1, 0, 1) \rangle}_{w_1} + \underbrace{\langle (1, 0, 1, -3) \rangle}_{w_2}.$$

A feladat visszavezetődött az

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{A_1} + \lambda_1 \underbrace{(2, 1, 0, -2)}_{v_1} + \lambda_2 \underbrace{(1, 1, -1, 1)}_{v_2} = \underbrace{(0, 1, 3, 3)}_{A_2} + \mu_1 \underbrace{(1, 1, 0, 1)}_{w_1} + \mu_2 \underbrace{(1, 0, 1, -3)}_{w_2} \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 \underbrace{(2, 1, 0, -2)}_{v_1} + \lambda_2 \underbrace{(1, 1, -1, 1)}_{v_2} + \mu_1 \underbrace{(-1, -1, 0, -1)}_{-w_1} + \mu_2 \underbrace{(-1, 0, -1, 3)}_{-w_2} = \underbrace{(-1, -1, 0, -1)}_{\overrightarrow{A_1 A_2}} \end{aligned}$$

egyenletre, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ismeretlenek. Ezt fel lehet írni egy egyenletrendszer alakjában:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 = -1 \\ -\lambda_2 - \mu_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 + 3\mu_2 = -1 \end{cases}.$$

Ehhez a következő táblázat tartozik:

	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	$\overrightarrow{A_1 A_2}$
λ_2	2	1	-1	-1	-1
	1	1	-1	0	-1
	0	-1	0	-1	0
	-2	1	-1	3	-1
λ_1 λ_2	2	0	-1	-2	-1
	1	0	-1	-1	-1
	0	1	0	1	0
	-2	0	-1	2	-1
μ_1 λ_1 λ_2	0	0	1	0	1
	1	0	-1	-1	-1
	0	1	0	1	0
	0	0	-3	0	-3
μ_1 λ_1 λ_2	0	0	1	0	1
	1	0	0	-1	0
	0	1	0	1	0
	0	0	0	0	0

A rendszernek van megoldása, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ főismeretlenek és $\mu_2 = s$ mellékismeretlen:

$$\begin{cases} \lambda_1 = s \\ \lambda_2 = -s \\ \mu_1 = 1 \\ \mu_2 = s \end{cases}, s \in \mathbb{R},$$

ahonnan a metszet

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 &= \{ \underbrace{(1, 2, 3, 4)}_{A_1} + \underbrace{s}_{\lambda_1} \underbrace{(2, 1, 0, -2)}_{v_1} - \underbrace{s}_{\lambda_2} \underbrace{(1, 1, -1, 1)}_{v_2} \mid s \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (1, 2, 3, 4) + s(1, 0, 1, -3) \mid s \in \mathbb{R} \} \\ &= (1, 2, 3, 4) + \langle (1, 0, 1, -3) \rangle. \end{aligned}$$

◇

3.11. Affin burkoló

3.11.1. Lineáris algebrai kitérő: halmaz által generált lineáris altér

Lineáris algebraiban egy \mathbb{K} test feletti \mathcal{V} vektortér \mathcal{P} részhalmaza által generált $\langle \mathcal{P} \rangle$ lineáris altér a legkisebb olyan lineáris altere \mathcal{V} -nek, amely tartalmazza a \mathcal{P} részhalmazt. Továbbá a generált lineáris altér előállítható, mint az adott halmazt tartalmazó lineáris alterek metszete, azaz

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathbb{K}\mathcal{V}} \mathcal{W}.$$

Az is igazolható, hogy adott halmaz által generált lineáris altér pontosan a halmaz vektoraiból képezhető összes lineáris kombinációkból áll, vagyis

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \mid m \in \mathbb{N}^*, v_1, \dots, v_m \in \mathcal{P}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \right\}. \quad (3.9)$$

Használni fogjuk, hogy ha \mathcal{P} és \mathcal{Q} a \mathcal{V} vektortér két nemüres részhalmaza, akkor

$$\langle \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle + \langle \mathcal{Q} \rangle. \quad (3.10)$$

3.11.2. Affin burkoló értelmezése

Ellentétben a metszettel egy affin tér esetén a részterek egyesítése általában nem lesz résztér. Így például két különböző pontból álló halmaz már nem affin résztér, de hasznos fogalom a rájuk illeszkedő egyenes. Hasonlóan használjuk a három nem kollineáris ponton, illetve egy egyenesen és egy rajta kívül fekvő ponton átmenő sík fogalmát is. Tehát hasznos beszélni egy halmaz által kifeszített affin résztéréről. Ez alatt a legkisebb olyan affin résztérét értjük, amely tartalmazza az adott halmazt. Ezt fogjuk hívni az részhalmaz affin burkának.

3.30. Értelmezés

Az \mathcal{X} affin tér egy $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazának *affin burkolója* vagy *affin burka* (jelölés: $\text{af}(\mathcal{P})$) az \mathcal{X} tér (bennfoglalásra nézve) legkisebb affin résztere, amely tartalmazza a \mathcal{P} részhalmazt.

3.31. Megjegyzés

Az affin burkoló értelmezése egyenértékű azzal, hogy az \mathcal{X} affin tér minden \mathcal{Y} résztere esetén, ha $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y}$, akkor $\text{af}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{Y}$. \diamond

Az affin burkoló értelmezése nem állítja, hogy egy affin tér minden részhalmazának létezik affin burka, ezért kell igazolni a létezését, illetve az egyértelműségét is.

3.32. Tulajdonság (Affin burkoló létezése és egyértelműsége)

Az \mathcal{X} affin tér $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmazának az affin burka megegyezik az \mathcal{X} tér összes olyan affin részterének metszetével, amely tartalmazza a \mathcal{P} részhalmazt, azaz $\text{af}(\mathcal{P}) = \bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})} \mathcal{Y}$.

Bizonyítás. Mivel minden \mathcal{P} részhalmaz esetén $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})$, ezért a $\bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})} \mathcal{Y}$ metszet létezik és belátjuk, hogy teljesíti az affin burkolóra megkövetelt feltételeket.

- Mivel affin részterek metszete affin résztér (3.25. Tulajdonság), ezért a $\bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})} \mathcal{Y}$ metszet is affin résztér.
- A $\bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})} \mathcal{Y}$ metszetben vett minden \mathcal{Y} affin résztér tartalmazza a \mathcal{P} halmazt, ezért a metszet is tartalmazza a \mathcal{P} halmazt.
- Minden \mathcal{Y}' affin résztér esetén, amelyre $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y}'$ fennáll, hogy $\bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})} \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}'$, mivel az \mathcal{Y}' is szerepel azok az affin részterek között, amelyek metszetét vesszük.

Ezzel beláttuk, hogy a $\bigcap_{\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y} \in \mathcal{A}(\mathcal{X})} \mathcal{Y}$ metszet a legkisebb olyan affin résztér, amely tartalmazza a \mathcal{P} halmazt. \square

Megemlítjük az affin burkoló következő tulajdonságait.

3.33. Tulajdonság

Ha \mathcal{P} és \mathcal{Q} az \mathcal{X} affin tér két részhalmaza, akkor

- $\mathcal{P} \subseteq \text{af}(\mathcal{P})$;
- $\mathcal{P} = \text{af}(\mathcal{P})$ pontosan akkor, ha \mathcal{P} affin résztere \mathcal{X} affin térnek;
- $\text{af}(\emptyset) = \emptyset$;
- az affin burkoló rendezéstartó, vagyis ha $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, akkor $\text{af}(\mathcal{P}) \subseteq \text{af}(\mathcal{Q})$.

Bizonyítás.

- Az affin burkoló értelmezése alapján.
- Ha $\mathcal{P} = \text{af}(\mathcal{P})$, akkor \mathcal{P} affin résztere \mathcal{X} -nek, mert az affin burkoló értelmezése alapján $\text{af}(\mathcal{P})$ affin résztér. Fordítva, ha \mathcal{P} affin résztér, akkor $\text{af}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, mivel a \mathcal{P} a legkisebb affin résztér, amely tartalmazza önmagát.

- (iii) Mivel az üres halmaz affin résztere az \mathcal{X} -nek, ezért következik az előző alpontból.
- (iv) Ha $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, akkor a $\mathcal{Q} \subseteq \text{af}(\mathcal{Q})$ reláció alapján $\mathcal{P} \subseteq \text{af}(\mathcal{Q})$, tehát az $\text{af}(\mathcal{Q})$ affin résztér tartalmazza a \mathcal{P} halmazt, ezért az affin burkoló tulajdonsága alapján $\text{af}(\mathcal{P})$ kisebb résztér, mint $\text{af}(\mathcal{Q})$, vagyis $\text{af}(\mathcal{P}) \subseteq \text{af}(\mathcal{Q})$. \square

3.11.3. Affin burkoló jellemzése affin kombinációval

A (3.9) egyenlőséggel analóg jellemzés adható részhalmaz affin burkolójára affin kombináció segítségével.

3.34. Tétel (Affin burkoló jellemzése affin kombinációval)

Ha \mathcal{P} az \mathcal{X} affin tér egy nemüres részhalmaza, akkor az $\text{af}(\mathcal{P})$ affin burkoló a \mathcal{P} halmaz pontjainak affin kombinációjából áll, azaz

$$\text{af}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i \mid m \in \mathbb{N}^*, \quad A_1, \dots, A_m \in \mathcal{P}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}. \quad (3.11)$$

Bizonyítás. A (3.11) egyenlőség jobb oldalán álló halmazra bevezetjük a \mathcal{Z} jelölést.

\subseteq A \mathcal{Z} halmazról először belátjuk, hogy zárt az affin kombinációra. Valóban, legyenek $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{Z}$ tetszőleges pontok és $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ tetszőleges affin súlyok. A \mathcal{Z} halmaz értelmezése szerint mindegyik $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{Z}$ pont \mathcal{P} -beli pontok affin kombinációja. Feltehető, hogy mindegyik B_1, \dots, B_k pont ugyanazon \mathcal{P} -beli pontok affin kombinációjaként írható fel (természetesen különböző súlyokkal), mert tetszőleges \mathcal{P} -beli pont hozzávehető a B_i affin kombinációjához 0 súllyal (együtthatóval). Ez alapján léteznek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ pontok, amelyekre minden $j = 1, \dots, k$ esetén $B_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} A_i$, ahol $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn} \in \mathbb{K}$ és $\sum_{i=1}^n \lambda_{ji} = 1$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^k \mu_j B_j = \sum_{j=1}^k \mu_j \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} A_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \mu_j \lambda_{ji} \right) A_i \in \mathcal{Z},$$

mert az $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ pontok együtthatóinak összege

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \mu_j \lambda_{ji} \right) = \sum_{j=1}^k \mu_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{ji} \right) = \sum_{j=1}^k \mu_j \cdot 1 = \sum_{j=1}^k \mu_j = 1.$$

Tehát $\sum_{j=1}^k \mu_j B_j$ az $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ pontok egy affin kombinációja, így benne van a \mathcal{Z} halmazban. A 3.15. Tétel alapján \mathcal{Z} affin résztere \mathcal{X} -nek. Sajátosan \mathcal{Z} olyan affin résztér, amely tartalmazza a \mathcal{P} halmazt, ezért az affin burkoló tulajdonsága alapján következik, hogy $\text{af}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{Z}$.

\supseteq Fordítva, az $\text{af}(\mathcal{P})$ affin résztere \mathcal{X} -nek, ezért a 3.15. Tétel alapján zárt az affin kombinációra. Továbbá $\mathcal{P} \subseteq \text{af}(\mathcal{P})$, így $\mathcal{Z} \subseteq \text{af}(\mathcal{P})$, mert \mathcal{Z} a \mathcal{P} -beli pontok affin kombinációinak halmaza.

A két oldali bennfoglalásból következik a (3.11) egyenlőség. \square

3.11.4. Affin burkoló irányterének jellemzése

Emlékeztetünk, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_n = 0$ skalárok esetén a 2.3. alfejezetben bevezettük a $\mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OA_n}$ jelölést, ahol $O \in \mathcal{X}$ egy tetszőlegesen rögzített pont.

3.35. Tulajdonság (Affin burkoló iránytere)

Legyen \mathcal{P} az \mathcal{X} affin tér egy nemüres részhalmaza és legyen $O \in \mathcal{P}$ egy rögzített pont. A \mathcal{P} halmaz affin burkának iránytere

$$\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})} = \langle \overrightarrow{OA} \mid A \in \mathcal{P} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i A_i \mid m \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{P}, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^m \mu_i = 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Bizonyítás. Bevezetjük a $\mathcal{W} = \langle \overrightarrow{OA} \mid A \in \mathcal{P} \rangle$ jelölést és előbb igazoljuk az $\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})} = \mathcal{W}$ egyenlőséget.

\supseteq Mivel $O, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{P} \subseteq \text{af}(\mathcal{P})$ és $\text{af}(\mathcal{P})$ az \mathcal{X} affin résztere, ezért $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_m} \in \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})}$. Továbbá $\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})}$ az $\tilde{\mathcal{X}}$ \mathbb{K} -vektortér egy lineáris altere, ezért bármely $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ skalárok esetén $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m} \in \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})}$, ezért a (3.9) alapján $\mathcal{W} \subseteq \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})}$.

\subseteq Fordítva, tetszőleges $v \in \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})}$ vektor esetén létezik olyan $B \in \text{af}(\mathcal{P})$ pont, amelyre $v = \overrightarrow{OB}$. Mivel $B \in \text{af}(\mathcal{P})$, ezért a 3.34. Tétel alapján léteznek $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{P}$ pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ affin súlyok úgy, hogy $B = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$, így

$$v = \overrightarrow{OB} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m} \in \mathcal{W},$$

tehát $\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{P})} \subseteq \mathcal{W}$.

A két oldali bennfoglalásból következik a (3.12) első egyenlősége. Végül a (3.9) egyenlőség és a 2.24. Jelölés alapján

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OA} \mid A \in \mathcal{P} \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i \overrightarrow{OA_i} \mid m \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{P}, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^m \mu_i = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i A_i \mid m \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{P}, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^m \mu_i = 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

3.11.5. n pont affin burka

Az $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ (különböző) pontok affin burkát kétféleképpen is kifejezhetjük. A 3.38. Tulajdonság alapján az $\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$ affin burok iránytere

$$\overrightarrow{\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}} = \langle \overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n} \rangle, \quad (3.13)$$

ahonnan

$$\text{af}\{A_1, \dots, A_n\} = t(\langle \overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n} \rangle, A_1) = \{t(\lambda_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_1 A_n}, A_1) \mid \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}. \quad (3.14)$$

Másrészt a 3.34. Tétel alapján az A_1, \dots, A_n pontok affin burka az affin tér azon pontjait tartalmazza, amelyek felírhatók ezen pont affin kombinációiként, azaz

$$\text{af}\{A_1, \dots, A_n\} = \{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}. \quad (3.15)$$

3.36. Példa (Két különböző pont által meghatározott egyenes)

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti affin tér. Az \mathcal{X} affin tér bármely két A és B különböző pontja egyértelműen meghatároz egy egyenest, amelyet AB -vel jelölünk. Valóban, a (3.13) összefüggés alapján az A és B pontok affin burka 1-dimenziós affin résztér (egyenes), amelynek az iránytere

$$\mathcal{D}(AB) = \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \{\lambda \overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{X}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Az affin burok tulajdonsága miatt az $\text{af}\{A, B\} = AB$ egyenes tartalmazza az A és B pontokat (azaz áthalad az A és B pontokon), továbbá ez az egyetlen egyenes, amely áthalad ezen a két ponton.

A (3.15) összefüggés alapján az AB egyenes minden pontja felírható az A és B pontok affin kombinációiként, azaz $AB = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ (ez a felírás egyértelmű). \diamond

3.37. Példa (Három nem kollineáris pont által meghatározott sík)

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti affin tér. Az \mathcal{X} affin tér bármely három A, B, C nem kollineáris (nem egy egyenesen lévő) pontja meghatároz egy 2-dimenziós affin részteret (síkot). Valóban, az $(ABC) = \text{af}\{A, B, C\}$ affin burkoló a legkisebb affin résztér, amely tartalmazza az A, B, C pontokat. A nem kollinearitás miatt az affin burkoló legalább 2-dimenziós. A (3.13) összefüggés alapján az affin burok iránytere $\overrightarrow{(ABC)} = \overrightarrow{\text{af}\{A, B, C\}} = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$, így (ABC) legfeljebb 2-dimenziós. Tehát (ABC) egy sík és a (3.15) összefüggés alapján sík minden pontja felírható az A, B, C pontok affin kombinációjaként $(ABC) = \{\alpha A + \beta B + \gamma C \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$. \diamond

3.11.6. Két affin résztér egyesítésének affin burka

Két affin résztér egyesítésének affin burka a következőképpen számolható ki. Megjegyezzük, hogy egy affin részteret meghatároz egy pontja és az iránytere a 3.3. Tulajdonság alapján.

3.38. Tulajdonság

Legyenek \mathcal{Y}_1 az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ irányterű és az $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ ponton átmenő, illetve \mathcal{Y}_2 az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ irányterű és az $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ ponton átmenő affin részterei az \mathcal{X} affin térnek. Ekkor az $\mathcal{Y}_1 = t(\vec{\mathcal{Y}}_1, A_1)$ és $\mathcal{Y}_2 = t(\vec{\mathcal{Y}}_2, A_2)$ affin részterek egyesítésének affin burka

$$\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) = t(\langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2, A_1) = t(\langle \overrightarrow{A_2 A_1} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2, A_2),$$

amelynek iránytere

$$\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2. \quad (3.16)$$

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$.

\square A 3.35. Tulajdonság és a (3.10) egyenlőség alapján

$$\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} = \langle \overrightarrow{A_1 B} \mid B \in \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{A_1 B} \mid B \in \mathcal{Y}_1 \rangle + \langle \overrightarrow{A_1 B} \mid B \in \mathcal{Y}_2 \rangle.$$

Mivel \mathcal{Y}_1 affin résztér és $A_1 \in \mathcal{Y}_1$, ezért $\langle \overrightarrow{A_1 B} \mid B \in \mathcal{Y}_1 \rangle = \{ \overrightarrow{A_1 B} \mid B \in \mathcal{Y}_1 \} = \vec{\mathcal{Y}}_1$. Másrészt

$$\langle \overrightarrow{A_1 B} \mid B \in \mathcal{Y}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 B} \mid B \in \mathcal{Y}_2 \rangle \subseteq \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \langle \overrightarrow{A_2 B} \mid B \in \mathcal{Y}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_2.$$

Tehát $\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_1 + \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_2$.

$\boxed{\supseteq}$ Mivel $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subseteq \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$, ezért $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subseteq \text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)$, ahonnan következik, hogy $\vec{\mathcal{Y}}_1, \vec{\mathcal{Y}}_2 \subseteq \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)}$. Hasonlóan, $A_1, A_2 \in \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$, ezért $A_1 A_2 = \text{af}\{A_1, A_2\} \subseteq \text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)$, ahonnan következik, hogy $\langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle = \mathcal{D}(A_1 A_2) \subseteq \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)}$. Végül $\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)$ egy vektortér, ezért

$$\langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2 \subseteq \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)}.$$

A kétoldali bennfoglalás alapján kapjuk, hogy $\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$. \square

3.39. Példa (Egyenes és rajta kívül fekvő pont által meghatározott sík)

Az \mathcal{X} affin térben legyen \mathcal{L} egy egyenes és $A \in \mathcal{X}$ egy pont, amely az \mathcal{L} egyenesen kívül fekszik, azaz $A \notin \mathcal{L}$. Az $\text{af}(\{A\} \cup \mathcal{L})$ affin burok a legkisebb affin résztér, amely tartalmazza az \mathcal{L} egyenest és az A pontot, továbbá a (3.16) összefüggés alapján az iránytere $\overrightarrow{\text{af}(\{A\} \cup \mathcal{L})} = \vec{\mathcal{L}} + \langle \overrightarrow{BA} \rangle$, ahol $B \in \mathcal{L}$ az egyenes egy pontja. A $\overrightarrow{BA} \notin \vec{\mathcal{L}}$, különben $A = t(\overrightarrow{BA}, B) \in \mathcal{L}$. Tehát $\dim \text{af}(\{A\} \cup \mathcal{L}) = \dim \vec{\mathcal{L}} + 1 = 2$, vagyis $\text{af}(\{A\} \cup \mathcal{L})$ egy sík. \diamond

3.40. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortérben tekintsük a következő lineáris varietásokat:

$$P = (3, 2, \frac{3}{2}, 1), \quad \mathcal{L} = (4, 2, 1, 0) + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle, \quad \mathcal{Y} = (2, 1, 0, -2) + \langle (1, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 1) \rangle.$$

Ekkor

$$\text{af}(\{P\} \cup \mathcal{L}) = (3, 2, \frac{3}{2}, 1) + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle + \langle (1, 0, -\frac{1}{2}, -1) \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, -\frac{1}{2}, -1) \rangle,$$

mivel $(1, 1, 1, 1), (1, 0, -\frac{1}{2}, -1)$ lineárisan függetlenek és $(3, 2, \frac{3}{2}, 1) = 2(1, 1, 1, 1) + (1, 0, -\frac{1}{2}, -1)$. (Ez utóbbi alapján $\text{af}(\{A\} \cup \mathcal{L})$ lineáris altere is lesz az \mathbb{R}^4 vektortérnek.) Hasonlóan

$$\begin{aligned} \text{af}(\mathcal{L} \cup \mathcal{Y}) &= (2, 1, 0, -2) + \langle (1, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 1) \rangle + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle + \langle (2, 1, 1, 2) \rangle \\ &= (2, 1, 0, -2) + \langle (1, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 2) \rangle \\ &= (2, 1, 0, -2) + \langle (1, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1) \rangle \\ &= (2, 1, 0, -2) + \langle (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle, \end{aligned}$$

tehát 3-dimenziós. Megjegyezzük, hogy ez utóbbi esetben $(4, 2, 1, 0) - (2, 1, 0, -2) = (2, 1, 1, 2) \in \vec{\mathcal{L}} + \vec{\mathcal{Y}}$, vagyis $\mathcal{L} \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$. \diamond

3.12. Dimenzióra vonatkozó tételek

3.12.1. Lineáris algebrai kitérő

Ha \mathcal{V}_1 és \mathcal{V}_2 egy \mathbb{K} -feletti \mathcal{V} vektortér két véges dimenziós lineáris altere, akkor a lineáris algebrából ismert a következő dimenzió-képlet:

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \rangle = \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2 - \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2). \quad (3.17)$$

Ha egy \mathbb{K} -feletti \mathcal{V} vektortér \mathcal{V}_1 és \mathcal{V}_2 lineáris alterére teljesülnek, hogy

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\vec{0}\} \quad \text{és} \quad \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V},$$

akkor a \mathcal{V} vektortér a \mathcal{V}_1 és \mathcal{V}_2 lineáris alterek *direkt összege*, amelyre a $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$ jelölést használjuk. A $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ vektortér minden vektora egyértelműen felírható, mint egy \mathcal{V}_1 , illetve egy \mathcal{V}_2 -beli vektor összegeként, vagyis minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén létezik egyetlen $v_1 \in \mathcal{V}_1$ és egyetlen $v_2 \in \mathcal{V}_2$ úgy, hogy $v = v_1 + v_2$.

Megjegyezzük, hogy ha (u_1, \dots, u_m) a \mathcal{V}_1 , illetve (w_1, \dots, w_n) a \mathcal{V}_2 lineáris alterek egy-egy bázisa, továbbá $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, akkor $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ a \mathcal{V} vektortér egy bázisa. Fordítva, ha (v_1, \dots, v_{m+n}) a \mathcal{V} vektortér egy bázisa, akkor $\mathcal{V}_1 = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ és $\mathcal{V}_2 = \langle v_{m+1}, \dots, v_{m+n} \rangle$ lineáris alterekre teljesül, hogy $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$.

3.12.2. Affin részterek metszetének dimenziója

A következőben feltételeket adunk arra, hogy két affin résztér messe egymást.

3.41. Tulajdonság

Legyen \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 az \mathcal{Y} affin tér két nemüres résztere.

- (i) Ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 \cap \vec{\mathcal{Y}}_2 = \{\vec{0}\}$, akkor $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset$ vagy $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ egyetlen pontból áll.
- (ii) Ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2 = \vec{\mathcal{X}}$, akkor $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset$ és $\dim(\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2) = \dim \mathcal{Y}_1 + \dim \mathcal{Y}_2 - \dim \mathcal{X}$.
- (iii) Ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 \oplus \vec{\mathcal{Y}}_2 = \vec{\mathcal{X}}$, vagyis $\vec{\mathcal{X}}$ az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ és $\vec{\mathcal{Y}}_2$ direktösszege, akkor a $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ metszet egyetlen pontból áll.

Bizonyítás.

- (i) Ha $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset$, akkor a 3.25. Tulajdonság és a feltevés alapján $\overrightarrow{\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2} = \vec{\mathcal{Y}}_1 \cap \vec{\mathcal{Y}}_2 = \{\vec{0}\}$, tehát a metszet 0-dimenziós affin résztér, ezért $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ egyetlen pontból áll.
- (ii) A feltevés és a 3.27. Következmény alapján $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset$, ezért

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2) &= \dim(\overrightarrow{\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2}) = \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 \cap \vec{\mathcal{Y}}_2) \\ &\stackrel{(3.17)}{=} \dim \vec{\mathcal{Y}}_1 + \dim \vec{\mathcal{Y}}_2 - \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2) \\ &= \dim \vec{\mathcal{Y}}_1 + \dim \vec{\mathcal{Y}}_2 - \dim \vec{\mathcal{X}} \\ &= \dim \mathcal{Y}_1 + \dim \mathcal{Y}_2 - \dim \mathcal{X}. \end{aligned}$$

- (iii) Az (i) és (ii) alapján. □

3.12.3. Affin burkoló dimenziója

Adunk egy képletet két affin résztér affin burkának dimenziójára.

3.42. Lemma

Legyen \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 az \mathcal{X} affin tér két nemüres affin résztere. Ekkor az affin burkolójuk dimenziója

$$\dim \text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) = \begin{cases} \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2), & \text{ha } \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 \neq \emptyset, \\ \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2) + 1, & \text{ha } \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterek metszik egymást, akkor létezik egy $A \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ közös pontjuk, és a 3.38. Tulajdonság alapján az egyesítésük affin burkának iránytere

$$\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} = \langle \overrightarrow{AA} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2 = \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2,$$

innen kapjuk, hogy $\dim \text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) = \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2)$.

Ha az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 részterek nem metszik egymást, akkor szintén a 3.38. Tulajdonság segítségével felírhatjuk az egyesítésük affin burkának irányterét

$$\overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2,$$

ahol $A_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $A_2 \in \mathcal{Y}_2$ tetszőlegesen rögzített pontok. Mivel a két affin részter nem metszi egymást, ezért a 3.26. Lemma alapján $\overrightarrow{A_1 A_2} \notin \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2$, így

$$\begin{aligned} \dim \overrightarrow{\text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)} &= \dim(\langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2) \\ &\stackrel{(3.17)}{=} \dim \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2) - \dim(\langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle \cap (\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2)) \\ &= 1 + \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2) - \dim\{\vec{0}\} \\ &= 1 + \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2). \end{aligned}$$

□

Ha egy affin tér két affin résztere metszi egymást, akkor az affin burok dimenziója kifejezhető csak az affin részterek, illetve a metszetük dimenzióinak függvényében.

3.43. Tulajdonság (Affin burkoló dimenziója)

Ha egy affin tér \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin részterei metszi egymást, akkor

$$\dim \text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) = \dim \mathcal{Y}_1 + \dim \mathcal{Y}_2 - \dim(\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2). \quad (3.18)$$

Bizonyítás. A 3.25. Tulajdonság alapján a két affin tér metszetének iránytere egyenlő az irányterek metszetével, azaz $\overrightarrow{\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2} = \vec{\mathcal{Y}}_1 \cap \vec{\mathcal{Y}}_2$. A 3.42. Lemma és a (3.17) dimenzió-képlet alapján

$$\begin{aligned} \dim \text{af}(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) &= \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 + \vec{\mathcal{Y}}_2) = \dim \vec{\mathcal{Y}}_1 + \dim \vec{\mathcal{Y}}_2 - \dim(\vec{\mathcal{Y}}_1 \cap \vec{\mathcal{Y}}_2) = \\ &= \dim \vec{\mathcal{Y}}_1 + \dim \vec{\mathcal{Y}}_2 - \dim(\overrightarrow{\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2}) = \dim \mathcal{Y}_1 + \dim \mathcal{Y}_2 - \dim(\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2). \end{aligned}$$

□

3.44. Példa

Legyen \mathcal{L}_1 és \mathcal{L}_2 két különböző egyenes a térben. Ha $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, akkor egy síkban vannak és $\text{af}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$ egy sík, mivel

$$\dim \text{af}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \dim \mathcal{L}_1 + \dim \mathcal{L}_2 - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Ha $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$, akkor $\text{af}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$ szintén egy sík, mivel a párhuzamosság alapján $\vec{\mathcal{L}}_1 = \vec{\mathcal{L}}_2$ és

$$\dim \text{af}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \dim(\vec{\mathcal{L}}_1 + \vec{\mathcal{L}}_2) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Ha $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$ és nem párhuzamosak, akkor nincsenek egy síkban és $\text{af}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$ maga a tér, mivel

$$\dim \text{af}(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) = \dim(\vec{\mathcal{L}}_1 + \vec{\mathcal{L}}_2) + 1 = \dim \vec{\mathcal{L}}_1 + \dim \vec{\mathcal{L}}_2 + 1 = 3.$$

◇

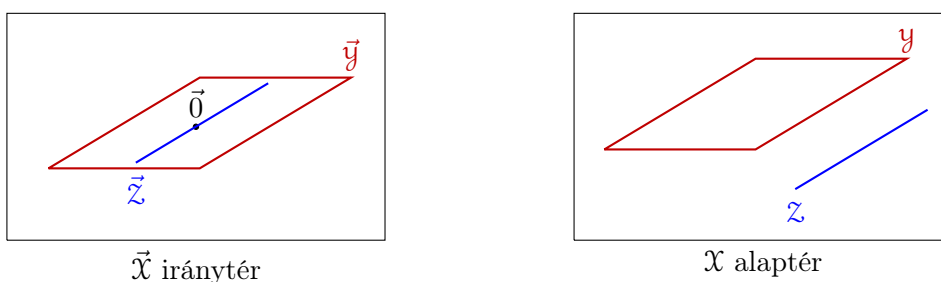
3.13. Affin részterek párhuzamossága

Ebben az alfejezetben értelmezzük két affin részter párhuzamosságát. Mutatunk egy módszert annak megállapítására, hogy két affin részter párhuzamos-e. Megszámoljuk, hogy véges test feletti affin tér esetén egy adott affin részterrel hány párhuzamos részter van. Az alfejezet végén pedig affin részterek párhuzamosságával kapcsolatos tulajdonságokat igazolunk.

3.45. Értelmezés

Az \mathcal{X} affin tér \mathcal{Y} és \mathcal{Z} nemüres affin részterei *párhuzamosak* (jelölés: $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{Z}$), ha az iránytereikre fennáll az $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{\mathcal{Z}}$ vagy $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$ bennfoglalás, ahol $\vec{\mathcal{Y}}$ az \mathcal{Y} és $\vec{\mathcal{Z}}$ a \mathcal{Z} iránytere.

Megjegyezzük, hogy egy vektortér \mathcal{W}_1 és \mathcal{W}_2 lineáris alterei esetén a $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ bennfoglalás szükséges feltétele, hogy $\dim \mathcal{W}_1 \leq \dim \mathcal{W}_2$ legyen.



3.7. ábra. Párhuzamos részterek.

Az affin részterek párhuzamosságának értelmezése megengedi, hogy a párhuzamos affin részterek egybeessenek. Megjegyezzük azt is, hogy tetszőleges pont (mint 0-dimenziós affin részterek) és a teljes affin tér párhuzamosak minden affin részterrel.

3.46. Megjegyzés

Ha egy vektortér két azonos dimenziós lineáris altere közül az egyik tartalmazza a másikat, akkor a két lineáris altér megegyezik. Emiatt azonos dimenziós \mathcal{Y} és \mathcal{Z} affin részterek esetén $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{Z}$ pontosan akkor, ha $\vec{\mathcal{Y}} = \vec{\mathcal{Z}}$. \diamond

3.47. Példa

Analitikus mértanban tanultátok, hogy két ℓ_1 és ℓ_2 egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik \vec{d}_1 , illetve \vec{d}_2 párhuzamosak. Tehát létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\vec{d}_1 = \lambda \vec{d}_2$, ahonnan következik, hogy $\langle \vec{d}_1 \rangle = \langle \vec{d}_2 \rangle$, ami az affin geometria nyelvén azt jelenti, hogy az ℓ_1 és ℓ_2 egyenesek irányterei megegyeznek.

Egy pont és két független v_1 és v_2 vektor segítségével megadott β sík párhuzamos egy ℓ egyenessel, ha az egyenes \vec{d} irányvektora benne van a $\langle v_1, v_2 \rangle$ lineáris altérben, vagyis $\langle \vec{d} \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$, ami az affin geometria nyelvén azt jelenti, hogy az ℓ egyenes iránytere benne van a β sík irányterében. \diamond

A következő példában egy módszert mutatunk két lineáris varietás párhuzamosságának eldöntésére.

3.48. Példa

Párhuzamosak-e az \mathbb{R}^4 valós vektortér

$$\mathcal{Y} = (-2, 4, -7, 9) + \langle \underbrace{(1, -2, 3, -1)}_{v_1}, \underbrace{(4, 6, -2, 3)}_{v_2} \rangle \text{ és } \mathcal{Z} = (1, 3, 0, -6) + \langle \underbrace{(2, 10, -8, 5)}_{w_1}, \underbrace{(6, 2, 4, 1)}_{w_2} \rangle$$

lineáris varietásai?

Az $\vec{\mathcal{Y}} = \langle (1, -2, 3, -1), (4, 6, -2, 3) \rangle$ és $\vec{\mathcal{Z}} = \langle (2, 10, -8, 5), (6, 2, 4, 1) \rangle$ irányterekre ellenőrizni kell, hogy $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{\mathcal{Z}}$ vagy $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$. Mivel \mathcal{Y} és \mathcal{Z} azonos dimenziósak, ezért a két bennfoglalás közül elég az egyiket leellenőrizni. Mi a $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$ relációt fogjuk ellenőrizni. Elég megnézni, hogy a $\vec{\mathcal{Z}}$ bázisvektorai benne vannak-e az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytérben. Ehhez meg kell oldani a $\lambda_1(1, -2, 3, -1) + \lambda_2(4, 6, -2, 3) = (2, 10, -8, 5)$, illetve a $\lambda_1(1, -2, 3, -1) + \lambda_2(4, 6, -2, 3) = (6, 2, 4, 1)$ egyenleteket, amelyek a

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 2 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 10 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = -8 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5 \end{cases}, \text{ illetve } \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 6 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 2 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 4 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszerekkel egyenértékűek. A táblázatos módszerrel egyszerre megoldható a két rendszer, mivel csak a szabadtagokban térnek el. A rendszer mátrixának az oszlopait (a v_1 és v_2 együtthatóit) bemásoljuk a táblázat bal oldalába és a szabadtagok oszlopait (a w_1 és w_2 együtthatóit) pedig a táblázat jobb oldalába.

	v_1	v_2	w_1	w_2	
v_1	1	4	2	6	
	-2	6	10	2	$S_2 + 2S_1$
	3	-2	-8	4	$S_3 - 3S_1$
	-1	3	5	1	$S_4 + S_1$
v_1	1	4	2	6	$S_1 - 4/7 S_4$
	0	14	14	14	$S_2 - 2S_4$
	0	-14	-14	-14	$S_1 + 2S_4$
v_2	0	7	7	7	$S_4/7$
v_1	1	0	-2	2	
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
v_2	0	1	1	1	

Mindkét rendszer megoldható, tehát $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$, és ezért $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{Z}$. ◇

3.49. Példa

Párhuzamosak-e az \mathbb{R}^4 valós vektortér

$$\mathcal{Y} = (-2, 4, -7, 9) + \langle \underbrace{(1, -2, 3, -1)}_{v_1}, \underbrace{(2, -3, -2, -1)}_{v_2}, \underbrace{(-4, 4, 1, 1)}_{v_3} \rangle \text{ és } \mathcal{Z} = (1, 3, 0, -6) + \langle \underbrace{(2, -7, 3, -1)}_{w_1}, \underbrace{(-1, 5, 3, 1)}_{w_2} \rangle$$

lineáris varietásai?

Mivel a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\dim \mathcal{Y} = 3$, illetve $\dim \mathcal{Z} = 2$, mert a w_1 és w_2 vektorok lineárisan függetlenek. Így elég megnézni, hogy $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$. Ehhez ellenőrizni kell, hogy a $\vec{\mathcal{Z}}$ iránytér w_1, w_2 bázisvektorai benne vannak-e az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytérben. A v_1, v_2, v_3 , illetve a w_1, w_2 vektorok komponenseit bemásoljuk a táblázat bal, illetve jobb felébe.

	v_1	v_2	v_3	w_1	w_2	
v_1	1	2	-4	2	-1	
	-2	-3	4	-7	5	$S_2 + 2S_1$
	3	-2	1	3	3	$S_3 - 3S_1$
	-1	-1	1	-1	1	$S_4 + S_1$
v_1	1	2	-4	2	-1	$S_1 - 2S_4$
	0	1	-4	-3	3	$S_2 - S_4$
	0	-8	13	-3	6	$S_3 + 8S_4$
v_2	0	1	-3	1	0	
v_1	1	0	2	0	-1	$S_1 + 2S_2$
v_3	0	0	-1	-4	3	$-S_2$
	0	0	-11	5	6	$S_3 - 11S_2$
v_2	0	1	-3	1	0	$S_4 - 3S_2$
v_1	1	0	0	-8	-5	
v_3	0	0	1	4	-3	
	0	0	0	49	-27	
v_2	0	1	0	13	-9	

A rendszernek nincs megoldása, mivel a táblázat harmadik sorának a bal oldalán csupa nulla szerepel, míg a jobb oldalán van nemnulla elem (49 és -27), tehát $\mathcal{Y} \not\parallel \mathcal{Z}$. ◇

3.13.1. Véges affin tér párhuzamos affin résztereinek száma

Legyen \mathbb{K} egy q elemű véges test és \mathcal{X} egy \mathbb{K} -feletti n -dimenziós affin tér. Meghatározzuk egy adott, k -dimenziós \mathcal{Y} affin résztérrel párhuzamos ℓ -dimenziós \mathcal{Z} affin részterek számát. Legyen $\vec{\mathcal{Y}}$ az \mathcal{Y} iránytere, továbbá legyen a \mathcal{Z} iránytere $\vec{\mathcal{Z}}$. Két esetet fogunk megkülönböztetni.

A $0 < \ell \leq k$ esetben \mathcal{Z} pontosan akkor párhuzamos az \mathcal{Y} affin résztérrel, ha $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$. Tehát meg kell határoznunk azon különböző $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Z}}, A)$ alakú affin részterek számát, ahol $\vec{\mathcal{Z}} \in \mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{Y}})$ egy ℓ -dimenziós lineáris résztere az $\vec{\mathcal{Y}}$ -nak és $A \in \mathcal{X}$ egy pont. A $(\vec{\mathcal{Z}}, A) \in \mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{Y}}) \times \mathcal{X}$ párok száma az 1.78. Tulajdonság alapján

$$|\mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{Y}}) \times \mathcal{X}| = |\mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{Y}})| \cdot |\mathcal{X}| = \frac{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{k-\ell+1} - 1)}{(q^\ell - 1) \cdot (q^{\ell-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^n.$$

A 3.20. Tulajdonság alapján két $(\vec{\mathcal{Z}}_1, A_1)$ és $(\vec{\mathcal{Z}}_2, A_2)$ pár pontosan akkor határozza meg ugyanazt az affin résztérrel, ha $\vec{\mathcal{Z}}_1 = \vec{\mathcal{Z}}_2$ és $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Z}}_1 = \vec{\mathcal{Z}}_2$. Tehát ugyanazt az affin résztérrel meghatározó párok száma pontosan az $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{\mathcal{Z}}_1$ vektorok száma, vagyis $|\vec{\mathcal{Z}}_1| = |\mathbb{K}|^\ell = q^\ell$. Így $\ell \leq k$ esetén a k -dimenziós \mathcal{Y} affin résztérrel párhuzamos ℓ -dimenziós \mathcal{Z} affin részterek száma

$$\frac{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{k-\ell+1} - 1)}{(q^\ell - 1) \cdot (q^{\ell-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^{n-\ell}. \quad (3.19)$$

A $k < \ell < n$ esetben \mathcal{Z} pontosan akkor párhuzamos az \mathcal{Y} affin résztérrel, ha $\vec{\mathcal{Y}} \subset \vec{\mathcal{Z}}$. Meg kell határozni a különböző $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Z}}, A)$ alakú affin részterek számát, ahol $\vec{\mathcal{Z}} \in \{\mathcal{W} \in \mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{X}}) \mid \vec{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{W}\}$

és $A \in \mathcal{X}$ egy pont. Az olyan $\vec{Z} \in \mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{X}})$ lineáris alterek, amelyekre $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{Z}$, pontosan az $\vec{\mathcal{X}}/\vec{\mathcal{Y}}$ faktortér $(\ell - k)$ -dimenziós lineáris altereinek felelnek meg. A $(\vec{Z}, A) \in \{\mathcal{W} \in \mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{X}}) \mid \vec{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{W}\} \times \mathcal{X}$ párok száma az 1.78. Tulajdonság alapján

$$|\{\vec{Z} \in \mathcal{L}_\ell(\vec{\mathcal{X}}) \mid \vec{\mathcal{Y}} \subset \vec{Z}\} \times \mathcal{X}| = |\mathcal{L}_{\ell-k}(\vec{\mathcal{X}}/\vec{\mathcal{Y}})| \cdot |\mathcal{X}| = \frac{(q^{n-k} - 1) \cdot (q^{n-k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-\ell+1} - 1)}{(q^{\ell-k} - 1) \cdot (q^{\ell-k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^n.$$

A 3.20. Tulajdonság alapján két (\vec{Z}_1, A_1) és (\vec{Z}_2, A_2) pár pontosan akkor határozza meg ugyanazt az affin részteret, ha $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2$ és $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{Z}_1 = \vec{Z}_2$. Tehát ugyanazt az affin részteret pontosan $|\vec{Z}_1| = |\mathbb{K}|^\ell = q^\ell$ pár határozza meg, így $k \leq \ell$ esetén a k -dimenziós \mathcal{Y} affin résztérrel párhuzamos ℓ -dimenziós affin részterek száma

$$\frac{(q^{n-k} - 1) \cdot (q^{n-k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-\ell+1} - 1)}{(q^{\ell-k} - 1) \cdot (q^{\ell-k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^{n-\ell}. \quad (3.20)$$

Összegezve, a (3.19) és (3.20) alapján kijelenthetjük a következő eredményt.

3.50. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} egy n -dimenziós affin tér egy q elemű \mathbb{K} véges test felett. Egy k -dimenziós \mathcal{Y} affin résztérrel párhuzamos ℓ -dimenziós affin részterek száma

$$\begin{aligned} & \frac{(q^k - 1) \cdot (q^{k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{k-\ell+1} - 1)}{(q^\ell - 1) \cdot (q^{\ell-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^{n-\ell}, \quad \text{ha } 1 \leq \ell \leq k \quad \text{és} \\ & \frac{(q^{n-k} - 1) \cdot (q^{n-k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q^{n-\ell+1} - 1)}{(q^{\ell-k} - 1) \cdot (q^{\ell-k-1} - 1) \cdot \dots \cdot (q - 1)} \cdot q^{n-\ell}, \quad \text{ha } k < \ell < n. \end{aligned}$$

3.51. Példa

A \mathbb{Z}_5^3 3-dimenziós ($n = 3$) \mathbb{Z}_5 -feletti ($q = 5$) affin térben egy adott egyenessel ($k = 1$) párhuzamos egyenesek ($\ell = 1$) száma 25, míg a párhuzamos síkok ($\ell = 2$) száma 30.

A \mathbb{Z}_5^4 4-dimenziós ($n = 4$) \mathbb{Z}_5 -feletti ($q = 5$) affin térben egy adott síkkal ($k = 2$) párhuzamos egyenesek ($\ell = 1$) száma 750, a párhuzamos síkok ($\ell = 2$) száma 25, míg a párhuzamos 3-síkok ($\ell = 3$) száma 30. \diamond

3.13.2. Affin részterek párhuzamosságával kapcsolatos tulajdonságok

A síkban egy adott egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton keresztül egyetlen párhuzamos egyenes húzható. Az alábbi tulajdonság ennek az affin geometriai megfelelője.

3.52. Tulajdonság

Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} affin tér egy k -dimenziós affin résztere és legyen $A \in \mathcal{X}$ egy pont. Ekkor egyetlen olyan k -dimenziós \mathcal{Z} affin résztér létezik, amely átmegy az A ponton és párhuzamos \mathcal{Y} -nal, azaz $A \in \mathcal{Z}$ és $\mathcal{Z} \parallel \mathcal{Y}$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$, akkor a \mathcal{Z} affin résztér átmegy az A ponton, mivel $A = t(\vec{0}, A) \in t(\vec{\mathcal{Y}}, A) = \mathcal{Z}$. Továbbá a \mathcal{Z} irányterére teljesül, hogy $\vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{Y}}$, tehát $\dim \mathcal{Z} = \dim_{\mathbb{K}} \vec{\mathcal{Z}} = \dim_{\mathbb{K}} \vec{\mathcal{Y}} = \dim \mathcal{Y} = k$ és $\mathcal{Z} \parallel \mathcal{Y}$. \square

A következő tulajdonság bizonyítását az olvasóra bízunk.

3.53. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{A}_k(\mathcal{X})$ az \mathcal{X} affin tér k -dimenziós ($k \geq 0$) affin résztereinek halmaza. Ekkor az affin részterek párhuzamossága egy ekvivalenciareláció az $\mathcal{A}_k(\mathcal{X})$ halmazon, de nem ekvivalencia reláció az \mathcal{X} nemüres affin résztereinek $\mathcal{A}_{\geq 0}(\mathcal{X})$ halmazán, ha $\dim \mathcal{X} \geq 2$.

3.54. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} -feletti affin tér, amelynek $A \in \mathcal{X}$ egy rögzített pontja és \mathcal{Y} egy rögzített nemüres affin résztere. Ha \mathcal{U} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy olyan lineáris altere, amelyre $\mathcal{U} \oplus \vec{\mathcal{Y}} = \vec{\mathcal{X}}$, akkor az \mathcal{Y} affin résztérrel párhuzamos, ugyanolyan dimenziós és páronként különböző részterek $t(\vec{\mathcal{Y}}, B)$ alakúak, ahol $B \in t(\mathcal{U}, A)$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{Y}_B = t(\vec{\mathcal{Y}}, B)$ alakú részterek párhuzamosak és azonos dimenziósak \mathcal{Y} -nal, mert $\vec{\mathcal{Y}}_B = \vec{\mathcal{Y}}$.

Előbb igazoljuk, hogy $B \in t(\mathcal{U}, A)$ esetén az \mathcal{Y}_B részterek páronként különbözőek. A 3.20. Tulajdonság alapján $\mathcal{Y}_B = t(\vec{\mathcal{Y}}, B) = t(\vec{\mathcal{Y}}, C) = \mathcal{Y}_C$ akkor és csakis akkor, ha $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{Y}}$. Egyértelműen léteznek $u_B, u_C \in \mathcal{U}$ vektorok, amelyekre $B = t(u_B, A)$ és $C = t(u_C, A)$, ahonnan $u_B = \overrightarrow{AB}$ és $u_C = \overrightarrow{AC}$. Tehát $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = u_C - u_B \in \mathcal{U}$. Az $\vec{\mathcal{X}} = \mathcal{U} \oplus \vec{\mathcal{Y}}$ feltétel miatt $\mathcal{U} \cap \vec{\mathcal{Y}} = \{\vec{0}\}$, ezért $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, vagyis $B = C$.

Ha egy \mathcal{Z} affin résztér párhuzamos és azonos dimenziós \mathcal{Y} -nal, akkor az iránytereik megegyeznek, és $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Y}}, P)$ alakú, valamilyen $P \in \mathcal{X}$ pontra. Az $\vec{\mathcal{X}} = \mathcal{U} \oplus \vec{\mathcal{Y}}$ feltétel miatt $\overrightarrow{AP} = u + v$, $u \in \mathcal{U}$, $v \in \vec{\mathcal{Y}}$ egyértelmű felbontás. Legyen $Q = t(u, A)$. Ekkor a 3.20. Tulajdonság alapján a $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Y}}, P)$ és $t(\vec{\mathcal{Y}}, Q)$ affin részterek megegyeznek, mert $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AP} = -u + (u + v) = v \in \vec{\mathcal{Y}}$. Tehát $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Y}}, Q)$, ahol $Q \in t(\mathcal{U}, A)$. Ezzel beláttuk, hogy minden \mathcal{Y} -nal párhuzamos és azonos dimenziós affin résztér szerepel a felsoroltak között. \square

3.55. Példa

A 3.5. Példában felsoroltuk a \mathbb{Z}_3^2 affin tér $A = (\hat{1}, \hat{2})$ pontján átmenő egyeneseit. Ezek között szerepelt az $\mathcal{L}_1 = t(\mathcal{W}_1, A) = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{2}, \hat{2}), (\hat{0}, \hat{2})\}$ egyenes, amelynek iránytere $\vec{\mathcal{L}}_1 = \mathcal{W}_1 = \langle (\hat{1}, \hat{0}) \rangle = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{2}, \hat{0})\}$. Felsoroljuk a \mathbb{Z}_3^2 affin tér \mathcal{L}_1 egyenessel párhuzamos egyeneseit. Ha $\mathcal{U} = \langle (\hat{0}, \hat{1}) \rangle = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{0}, \hat{2})\}$, akkor $((\hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}))$ a \mathbb{Z}_3^2 vektortér egy bázisa, ezért $\mathbb{Z}_3^2 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}_1$. Legyen $\mathcal{Z} = t(\mathcal{U}, A) = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{1}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{1})\}$. A 3.54. Tulajdonság alapján a \mathcal{L}_1 egyenessel párhuzamos egyenesek

- a $B_1 = (\hat{1}, \hat{2}) \in \mathcal{Z}$ pont esetén $\mathcal{L}_{B_1} = t(\mathcal{W}_1, B_1) = \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{2}, \hat{2}), (\hat{0}, \hat{2})\} = \mathcal{L}_1$;
- a $B_2 = (\hat{1}, \hat{0}) \in \mathcal{Z}$ pont esetén $\mathcal{L}_{B_2} = t(\mathcal{W}_1, B_2) = \{(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{2}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{0})\}$;
- a $B_3 = (\hat{1}, \hat{1}) \in \mathcal{Z}$ pont esetén $\mathcal{L}_{B_3} = t(\mathcal{W}_1, B_3) = \{(\hat{1}, \hat{1}), (\hat{2}, \hat{1}), (\hat{0}, \hat{1})\}$.

◇

3.56. Tulajdonság

Ha \mathcal{Y} és \mathcal{Z} az \mathcal{X} affin tér két nemüres, párhuzamos affin résztere, akkor $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ vagy $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ vagy $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, akkor nincs mit bizonyítani. Ezért feltehető, hogy $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$, vagyis létezik $A \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$ közös pontjuk, és ekkor $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A)$, illetve $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Z}}, A)$. Mivel $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{Z}$, ezért $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{\mathcal{Z}}$ vagy $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$. Ha $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{\mathcal{Z}}$, akkor $\mathcal{Y} = \{t(v, A) \mid v \in \vec{\mathcal{Y}}\} \subseteq \{t(v, A) \mid v \in \vec{\mathcal{Z}}\} = \mathcal{Z}$, vagyis $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$. Hasonlóan, ha $\vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$, akkor $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Z}}, A) \subseteq t(\vec{\mathcal{Y}}, A) = \mathcal{Y}$, vagyis $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$. \square

3.57. Tulajdonság (Párhuzamosság hipersíkkal)

Legyen \mathcal{X} az \mathcal{X} véges dimenziós affin tér egy hipersíkja. Ha az \mathcal{X} affin tér \mathcal{Z} nemüres résztere nem metszi a \mathcal{H} hipersíkot, akkor párhuzamos a \mathcal{H} hipersíkkal.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy a \mathcal{Z} affin résztér nem párhuzamos a \mathcal{H} hipersíkkal, és belátjuk, hogy metszik egymást, így jutva ellentmondáshoz. Feltehetjük, hogy $\mathcal{Z} \neq \mathcal{X}$, különben $\mathcal{Z} \parallel \mathcal{H}$. Ha \mathcal{Z} nem párhuzamos \mathcal{H} -val, akkor $\vec{\mathcal{Z}} \not\subseteq \vec{\mathcal{H}}$, ezért $\vec{\mathcal{H}} \subset \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{Z}} \subseteq \vec{\mathcal{X}}$, ahonnan

$$\dim \mathcal{X} - 1 = \dim \vec{\mathcal{H}} < \dim(\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{Z}}) \leq \dim \mathcal{X}.$$

Tehát az $\vec{\mathcal{X}}$ vektortér $\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{Z}}$ lineáris altere ugyanolyan dimenziós, ezért $\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}}$ és a 3.41. Tulajdonság (ii) alpontja alapján \mathcal{Z} és \mathcal{H} metszik egymást. \square

3.58. Példa

Az \mathbb{R}^3 affin tér hipersíkjai a síkok, és ebben az esetben a 3.57. Tulajdonság azt mondja, hogy ha egy egyenes és egy sík nem metszi egymást, akkor párhuzamosak. Lényeges a feltétel, hogy a két nem metsző résztér közül az egyik hipersík legyen, mivel például két egyenes a térben lehet kitérő (nem párhuzamosak és nem metszik egymást). \diamond

Az euklideszi síkgeometriában két különböző egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha nem metszik egymást. Az affin geometriában hasonló kijelentés igaz hipersíkokra.

3.59. Tulajdonság (Hipersíkok párhuzamossága)

Legyen \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 az \mathcal{X} véges dimenziós affin tér két különböző hipersíkja. A \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 hipersíkok akkor és csakis akkor párhuzamosak, ha nem metszik egymást.

Bizonyítás.

\Rightarrow A \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 párhuzamos hipersíkok azonos dimenziósak, ezért a 3.46. Megjegyzés alapján az iránytereik megegyeznek, $\vec{\mathcal{H}}_1 = \vec{\mathcal{H}}_2$. Ha a két hipersíknak van egy $A \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ közös pontja, akkor $\mathcal{H}_1 = t(\vec{\mathcal{H}}_1, A) = t(\vec{\mathcal{H}}_2, A) = \mathcal{H}_2$, azaz a két hipersík egybeesik, amely ellentmond feltevésnek, hogy különbözőek.

\Leftarrow Ha a \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 hipersíkok nem metszik egymást, akkor a 3.57. Tulajdonság alapján párhuzamosak egymással. \square

3.14. Affin részterek jellemzése egyenesekkel

Már igazoltunk két tételt arra vonatkozóan, hogy egy affin tér részhalmaza mikor affin résztér. A következőben igazolunk egy harmadikat is, amely egyenesek segítségével jellemzi, hogy egy részhalmaz mikor affin résztér.

A 3.36. Példában két különböző A és B ponton átmenő AB egyenest ezen két pont affin burkaként értelmeztük, azaz $AB = \text{af}\{A, B\}$. Az affin burkoló tulajdonsága alapján beláttuk,

hogy két különböző ponton egyetlen egy egyenes halad át, illetve ha az egyenes két különböző pontja benne van egy affin részterben, akkor a teljes egyenes is benne van az adott affin részterben. Beláttuk azt is, hogy az AB egyenes pontjai az A és B pontok affin kombinációiként állnak elő, azaz $AB = \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

3.60. Tétel (Affin részter jellemzése egyenesekkel)

Legyen \mathbb{K} egy legalább három elemet tartalmazó test, azaz $|\mathbb{K}| > 2$, és legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} feletti affin tér. Az \mathcal{X} affin tér egy \mathcal{S} nemüres részhalmaza akkor és csakis akkor affin részter, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{S}$ különböző pontok esetén az AB egyenes benne van az \mathcal{S} halmazban, vagyis $AB \subseteq \mathcal{S}$.

Bizonyítás. Ha \mathcal{S} az \mathcal{X} egy nemüres affin résztere, akkor minden $A, B \in \mathcal{S}$ különböző pontok esetén minden $(1 - \lambda)A + \lambda B$ affin kombináció is az \mathcal{S} halmazban található, ezért

$$AB = \{(1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Fordítva, legyen $O \in \mathcal{S}$ egy rögzített pont. Belátjuk, hogy az $\mathcal{U} = \{\overrightarrow{OA} \in \vec{\mathcal{X}} \mid A \in \mathcal{S}\}$ halmaz lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, így a 3.7. Tétel alapján \mathcal{S} az \mathcal{X} affin résztere. Megjegyezzük, hogy \mathcal{U} egy nemüres halmaz, mert $\vec{0} = \overrightarrow{OO} \in \mathcal{U}$.

Először belátjuk, hogy az \mathcal{U} halmaz zárt a skalárral való szorzásra nézve, vagyis tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár és tetszőleges $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{U}$ vektor esetén $\lambda \cdot \overrightarrow{OA} \in \mathcal{U}$. Feltehetjük, hogy $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$, vagyis $A \neq O$, különben $\lambda \cdot \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} = \overrightarrow{OA} \in \mathcal{U}$. A $B = (1 - \lambda)O + \lambda A$ pont rajta van az OA egyenesen, ami a feltevés szerint benne van az \mathcal{S} halmazban, mert $O, A \in \mathcal{S}$ és $O \neq A$. Tehát a B pont is az \mathcal{S} -ben van, így az \mathcal{U} halmaz értelmezése szerint

$$\lambda \overrightarrow{OA} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OO} + \lambda \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \in \mathcal{U}.$$

Végül belátjuk, hogy az \mathcal{U} halmaz zárt az összeadásra nézve. Legyen $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \mathcal{U}$ két tetszőleges vektor, tehát $A, B \in \mathcal{S}$. Mivel a \mathbb{K} testnek több mint két eleme van, ezért létezik $\lambda \in \mathbb{K}$ elem, ami különbözik a semleges elemtől és az egységelemtől, azaz $\lambda \neq 0$ és $\lambda \neq 1$. Mivel $\lambda \neq 0$, ezért létezik $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ skalár, illetve $\lambda \neq 1$ feltétel miatt $1 - \lambda \neq 0$, ezért létezik a $(1 - \lambda)^{-1} \in \mathbb{K}$ skalár is. Mivel az előbb igazoltuk, hogy \mathcal{U} zárt a skalárral való szorzásra, ezért $\lambda^{-1}\overrightarrow{OA}, (1 - \lambda)^{-1}\overrightarrow{OB} \in \mathcal{U}$. Tehát az \mathcal{U} értelmezése alapján léteznek $A', B' \in \mathcal{S}$ pontok úgy, hogy $\overrightarrow{OA'} = \lambda^{-1}\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB'} = (1 - \lambda)^{-1}\overrightarrow{OB}$. Vegyük a $C' = \lambda A' + (1 - \lambda)B'$ pontot. Ha $A' = B'$, akkor $C' = A' = B' \in \mathcal{S}$. Ha $A' \neq B'$, akkor $C' \in A'B'$, és a feltevés miatt $A'B' \subseteq \mathcal{S}$, mert $A', B' \in \mathcal{S}$. Tehát ebben az esetben is $C' \in \mathcal{S}$. Végül

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= 1 \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \lambda \lambda^{-1} \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)(1 - \lambda)^{-1} \overrightarrow{OB} \\ &= \lambda \overrightarrow{OA'} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB'} \\ &= \overrightarrow{OC'} \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

mert $C' \in \mathcal{S}$. Ezzel igazoltuk, hogy az \mathcal{U} halmaz lineáris résztere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, ezért a 3.7. Tétel alapján \mathcal{S} halmaz résztere az \mathcal{X} affin térnek. \square

Mutatunk egy olyan példát, ahol a \mathbb{K} testnek két eleme van és a tétel fordított irányú állítása nem teljesül.

3.61. Példa

Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ két elemű test és legyen $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ \mathbb{Z}_2 test feletti (2-dimenziós) affin tér. Mivel bijektív megfeleltetés van az affin (rész)tér és az iránytere között és az egyenes iránytere 1-dimenziós vektortér (elemeit egy koordinátával írhatjuk le), ezért az \mathcal{X} minden egyenese két pontból áll. Emiatt minden $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ nemüres részhalmaz esetén automatikusan teljesül, hogy minden $A, B \in \mathcal{S}$ különböző pontok esetén az $AB = \{A, B\}$ egyenes benne van az \mathcal{S} halmazban, vagyis $AB \subseteq \mathcal{S}$. Sajátosan az $\mathcal{S} = \{(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{1})\}$ halmaz nem affin résztér, mivel nem egyenes (mert nem két pontból áll) és \mathcal{S} nem a teljes \mathcal{X} affin tér, mivel $(\hat{0}, \hat{0}) \notin \mathcal{S}$. \diamond

4. fejezet

Koordináta-rendszerek affin térben

Ebben a fejezetben bevezetjük a Descartes-féle, illetve affin koordináta-rendszereket affin tereken. Legyakrabban a Descartes-féle koordináta-rendszert szoktuk használni, de bizonyos feladatok megoldásában egyszerűbb az affin koordináta-rendszer használata, továbbá ez utóbbi analóg a bázis fogalmával vektortereken. A két koordináta-rendszer között van átjárás. Minden Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelhetünk affin koordináta-rendszert és fordítva, továbbá a koordináták is átírhatók egyikből a másikba. A Descartes-féle koordináták bevezetésével beszélhetünk affin részterek egyenleteiről, amelyre a következő fejezetben kerül majd sor.

4.1. Descartes-féle koordináta-rendszer

4.1.1. Lineáris algebrai kitérő: bázis és koordináták

Legyen \mathcal{V} egy \mathbb{K} test feletti vektortér. A $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ vektorrendszer a \mathcal{V} vektortér *bázisa*, ha a vektorrendszer vektorai lineárisan függetlenek és generátorrendszert alkotnak. Megjegyezzük, hogy \mathbf{B} pontosan akkor bázisa a \mathcal{V} vektortérnek, akkor minden vektor egyértelműen felírható a β_1, \dots, β_n vektorok lineáris kombinációjaként, azaz minden $v \in \mathcal{V}$ esetén egyértelműen léteznek $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy $v = k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n$. Az együtthatókból alkotott $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ n -est a v vektor \mathbf{B} bázis szerinti *koordinátáinak* nevezzük és $v(k_1, \dots, k_n)_{\mathbf{B}}$ jelölést használjuk.

A \mathcal{V} vektortérben egy $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ bázis meghatároz egy

$$\phi_{\mathbf{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{V}, \quad \phi_{\mathbf{B}}(a_1, \dots, a_n) = a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n$$

lineáris izomorfizmust. Valóban, a $\phi_{\mathbf{B}}$ kompatibilis a vektorok összeadásával és skalárral való szorzásával, tehát egy lineáris függvény. Továbbá, injektív, mert a bázisvektorok lineárisan függetlenek, illetve szürjektív, mert a bázisvektorok generátorrendszert alkotnak. A $\phi_{\mathbf{B}}^{-1}$ inverz függvény adja meg a vektorok \mathbf{B} bázis szerinti koordinátáit, vagyis $\phi_{\mathbf{B}}^{-1}(a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n) = (a_1, \dots, a_n)$. Mivel $\phi_{\mathbf{B}}^{-1}$ lineáris izomorfizmus, ezért a koordináták kompatibilisek az összeadásra és skalárral való szorzásra nézve. Megjegyezzük, hogy a $\phi_{\mathbf{B}}$ pontosan az a lineáris függvény, amely a \mathbb{K}^n vektortér kanonikus bázisának elemeit a \mathbf{B} bázis megfelelő elemeibe képezi, azaz ha

$$\mathbf{E} = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1))$$

a \mathbb{K}^n vektortér kanonikus bázisa, akkor $\phi_{\mathbf{B}}(\beta_i) = e_i$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Fordítva, egy $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus meghatározza a \mathcal{V} vektortér egy $\mathbf{B}_\phi = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ bázisát, ahol $\beta_i = \phi(e_i)$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén és $\mathbf{E} = (e_1, \dots, e_n)$ a \mathbb{K}^n vektortér kanonikus bázisa. A $\mathbf{B} \mapsto \phi_{\mathbf{B}}$ és $\phi \mapsto \mathbf{B}_\phi$ megfeleltetések egymás inverzei.

4.1.2. Descartes-féle koordináta-rendszer

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti n -dimenziós affin tér. Célunk, hogy minden $A \in \mathcal{X}$ ponthoz egyértelműen hozzárendeljünk egy $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ szám n -est, amely kompatibilis lesz az affin kombinációval. Ezt két lépésben tesszük meg.

- Rögzített $O \in \mathcal{X}$ pont esetén a $T_O\mathcal{X}$ érintőtér lineárisan izomorf az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérrel a

$$\varphi(O, -) : T_O\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}, \quad \varphi(-, O)(A) = \overrightarrow{OA}$$

lineáris izomorfizmus által.

- Az n -dimenziós \mathcal{X} affin tér $\vec{\mathcal{X}}$ iránytere egy n -dimenziós \mathbb{K} -vektortér. Egy $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ bázis választása az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytéren megad egy $\phi_{\mathbf{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ lineáris izomorfizmust. A $\varphi(O, -)$ és $\phi_{\mathbf{B}}^{-1}$ bijektív leképezések $\phi_{\mathbf{B}}^{-1} \circ \varphi(O, -)$ összetétele pedig egy bijektív függvényt ad az \mathcal{X} affin térről a \mathbb{K}^n Descartes-szorozatra:

$$\phi_{\mathbf{B}}^{-1} \circ \varphi(O, -) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad A \mapsto (a_1, \dots, a_n), \text{ ahol } \overrightarrow{OA} = a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n. \quad (4.1)$$

Ezen függvény segítségével rendeljük hozzá az affin tér pontjaihoz a koordinátákat.

4.1. Értelmezés

Az \mathcal{X} affin tér *Descartes-féle koordináta-rendszere* egy olyan $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \dots, \beta_n)$ rendszer, ahol $O \in \mathcal{X}$ az affin tér egy rögzített pontja és $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Az O pontot az \mathcal{R} koordináta-rendszer *origójának* nevezzük. Egy $A \in \mathcal{X}$ pont *Descartes-féle koordinátái* az \mathcal{R} koordináta-rendszerhez viszonyítva $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, ha $\overrightarrow{OA} = a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n$. Ezt röviden az $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ jelöléssel fejezzük ki. Az $A \in \mathcal{X}$ pont *koordináta-mátrixa* az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$[A]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

A $\phi_{\mathbf{B}}^{-1} \circ \varphi(O, -)$ függvény bijektivitása azt jelenti, hogy ha két pont koordinátái megegyeznek, akkor a két pont is meg kell egyezzen. Értelmezés szerint minden $A \in \mathcal{X}$ pont \mathcal{R} koordináta-rendszer szerinti koordinátái megegyeznek az $\overrightarrow{OA} \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor \mathbf{B} bázis szerinti koordinátaival, vagyis $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ egyenértékű az $\overrightarrow{OA}(a_1, \dots, a_n)_{\mathbf{B}}$ -vel. Koordináta-mátrixok esetén ezt a következő egyenlőséggel írhatjuk le:

$$[A]_{\mathcal{R}} = [\overrightarrow{OA}]_{\mathbf{B}}, \quad \forall A \in \mathcal{X}. \quad (4.2)$$

Minden $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \dots, \beta_n)$ Descartes-féle koordináta-rendszer O origójának koordinátái $(0, \dots, 0)$, mivel $\overrightarrow{OO} = \vec{0} = 0 \cdot \beta_1 + \dots + 0 \cdot \beta_n$.

A 2.24. Jelölésben bevezetett $\overrightarrow{AB} = B - A$ felírás kompatibilis a koordinátákkal, pontosabban az affin tér pontjainak \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti koordinátái és az iránytér vektorainak a \mathbf{B} bázis szerinti koordinátái között a következő kapcsolat áll fenn.

4.2. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol $O \in \mathcal{X}$ a koordináta-rendszer origója és \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén az \overrightarrow{AB} vektor koordinátái a következőképpen számolhatók ki az A és B pontok Descartes-féle koordinátái segítségével:

$$[\overrightarrow{AB}]_{\mathbf{B}} = [B]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}. \quad (4.3)$$

Továbbá egy $A \in \mathcal{X}$ pont $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorral való $B = t(v, A)$ eltoltjának koordinátái

$$[B]_{\mathcal{R}} = [t(v, A)]_{\mathcal{R}} = [A]_{\mathcal{R}} + [v]_{\mathbf{B}}. \quad (4.4)$$

Bizonyítás. A (4.2) összefüggés alapján

$$[\overrightarrow{AB}]_{\mathbf{B}} = [\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}]_{\mathbf{B}} = [\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]_{\mathbf{B}} = [\overrightarrow{OB}]_{\mathbf{B}} - [\overrightarrow{OA}]_{\mathbf{B}} = [B]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}.$$

Ha $B = t(v, A)$, akkor $v = \overrightarrow{AB}$ és a (4.3) összefüggés alapján $[v]_{\mathbf{B}} = [\overrightarrow{AB}]_{\mathbf{B}} = [B]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}$, ahonnan kapjuk, hogy $[B]_{\mathcal{R}} = [A]_{\mathcal{R}} + [v]_{\mathbf{B}}$. \square

Ahogy lineáris algebrában a vektorok rögzített bázisbeli koordinátái kompatibilisek a lineáris kombinációval úgy az affin geometriában a pontok Descartes-féle koordinátái kompatibilisek az affin kombinációval.

4.3. Tulajdonság (Descartes-féle koordináták kompatibilitása az affin kombinációval)

Ha $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, akkor bármely $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{X}$ pontok és bármely $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ affin súlyok esetén

$$[\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k]_{\mathcal{R}} = \lambda_1 [M_1]_{\mathcal{R}} + \dots + \lambda_k [M_k]_{\mathcal{R}}.$$

Bizonyítás. Az affin kombinációra bevezetjük az $M = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k$ jelölést. Ekkor a Descartes-féle koordináták és az affin kombináció értelmezése szerint

$$\begin{aligned} [\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k]_{\mathcal{R}} &= [M]_{\mathcal{R}} = [\overrightarrow{OM}]_{\mathbf{B}} \\ &= [\lambda_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OM_k}]_{\mathbf{B}} \\ &= \lambda_1 [\overrightarrow{OM_1}]_{\mathbf{B}} + \dots + \lambda_k [\overrightarrow{OM_k}]_{\mathbf{B}} \\ &= \lambda_1 [M_1]_{\mathcal{R}} + \dots + \lambda_k [M_k]_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

\square

A 4.3. Tulajdonság azt jelenti, hogy a $\phi_{\mathbf{B}}^{-1} \circ \varphi(O, -) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}^n$ egy bijektív affin függvény a \mathbb{K} -feletti \mathcal{X} és \mathbb{K}^n affin terek között.

4.1.3. Koordináta-rendszerek vektorterekhez rendelt affin terekben

A 2.1.1. alfejezetben egy vektortérhez természetes módon hozzárendeltük egy affin teret. A \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortérhez rendelt \mathcal{V} affin tér alaptere a \mathcal{V} halmaz és iránytere a \mathcal{V} vektortér. Ha $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ a \mathcal{V} vektortér egy bázisa, akkor origónak az $O = \vec{0}$ nullvektort választva $\mathcal{R} =$

$(\vec{0}; \beta_1, \dots, \beta_n)$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer a \mathcal{V} affin téren. Ekkor a \mathcal{V} vektortér minden v vektorának a \mathbf{B} bázis szerinti koordinátái megegyeznek a \mathcal{V} affin tér v pontjának az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti koordinátaival, mivel

$$[v]_{\mathcal{R}} = [\vec{Ov}]_{\mathbf{B}} = [v - \vec{0}]_{\mathbf{B}} = [v]_{\mathbf{B}}.$$

Ezen Descartes-féle koordináta-rendszer választása esetén nem okoz félreértést, hogy a \mathcal{V} egy elemére, mint pontra (az alaptér elemére) vagy mint vektorra (az iránytér egy elemére) gondolunk. Ha $v(k_1, \dots, k_n)_{\mathbf{B}}$ egy v vektor koordinátái a \mathbf{B} bázisban, akkor $v(k_1, \dots, k_n)_{\mathcal{R}}$ a v pont koordinátái az \mathcal{R} koordináta-rendszerben. A jelölésből el szoktuk hagyni a \mathbf{B} bázisra és \mathcal{R} koordináta-rendszerre vonatkozó betűket, mivel hiányuk nem okoz gondot.

A \mathbb{K} -feletti \mathbb{K}^n vektortéren van egy kanonikus bázis $\mathbf{E} = (e_1, \dots, e_n)$, illetve van egy kitüntetett elem, a nullvektor. Így a \mathbb{K}^n affin téren is létezik egy kanonikus Descartes-féle koordináta-rendszer $\mathcal{E} = (\vec{0}; e_1, \dots, e_n)$, amelynek origója a nullvektor. Ekkor a $v = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ koordinátái $v(k_1, \dots, k_n)_{\mathcal{E}}$, ha pontként tekintjük és $v(k_1, \dots, k_n)_{\mathbf{E}}$, ha vektorként tekintjük, ezért általában el szoktuk hagyni \mathbf{E} -t, illetve \mathcal{E} -t a jelölésből.

4.2. Descartes-féle koordináta-transzformáció

Megvizsgáljuk, hogy az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontjának két különböző Descartes-féle koordináta-rendszerében felírt koordinátái közötti kapcsolatot.

4.2.1. Lineáris algebrai kitérő: báziscsere és koordináta-transzformáció

Először a vektorokra tanult koordináta-transzformációt ismételjük át lineáris algebrából. Tekintsük a \mathbb{K} test feletti n -dimenziós $\vec{\mathcal{X}}$ vektorteret, amelynek két bázisa $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ és $\mathbf{B}' = (\beta'_1, \dots, \beta'_n)$. Ha a \mathbf{B} bázis vektorait fel tudjuk írni a \mathbf{B}' bázis vektorainak függvényében, vagyis minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\beta_i = b_{i1}\beta'_1 + \dots + b_{in}\beta'_n$, akkor a β_i vektor koordináta-mátrixa a \mathbf{B}' bázisban

$$[\beta_i]_{\mathbf{B}'} = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{in} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

és képezhetjük a \mathbf{B} bázisról a \mathbf{B}' bázisra való áttérési mátrixot

$$T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\beta_1]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\beta_n]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad (4.5)$$

(a \mathbf{B} bázis β_1, \dots, β_n bázisvektorainak \mathbf{B}' bázis szerinti koordinátáit rendre beírjuk a mátrix oszlopaiba).

Minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor felírható $v = v_1\beta_1 + \dots + v_n\beta_n$, illetve $v = v'_1\beta'_1 + \dots + v'_n\beta'_n$ alakba, ahonnan a v vektor \mathbf{B} , illetve \mathbf{B}' bázisok szerinti koordináta-mátrixai

$$[v]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad [v]_{\mathbf{B}'} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}.$$

Ezek a koordináta-mátrixok között pedig a következő kapcsolat áll fenn:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{vagy röviden} \quad [v]_{\mathbf{B}'} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot [v]_{\mathbf{B}}. \quad (4.6)$$

Ezt a koordináta-cserét a \mathbf{B} -koordinátákról a \mathbf{B}' -koordinátákra való áttérésnek nevezzük. Ilyenkor a \mathbf{B} bázisra úgy gondolunk, mint régi bázisra, amelyben ismerjük a v vektor koordinátáit, és a \mathbf{B}' bázisra úgy gondolunk, mint új bázisra, amelyben szeretnénk felírni a v vektor koordinátáit.

A $T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}$ mátrixszal való szorzás a \mathbf{B} -koordinátákat alakítja \mathbf{B}' -koordinátákra. A $[v]_{\mathbf{B}'} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot [v]_{\mathbf{B}}$ koordinátacsere képletet jobbról balra olvasva $[v]_{\mathbf{B}}$ \mathbf{B} -koordinátákat a $T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}$ mátrixszal szorozva áttérünk \mathbf{B}' -koordinátákra és megkapjuk $[v]_{\mathbf{B}'}$ -t, a v vektor \mathbf{B}' szerinti koordinátáit. Megjegyezzük, hogy

$$T_{\mathbf{B}\mathbf{B}} = I_n \quad \text{és} \quad T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = (T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}})^{-1}.$$

Az áttérési mátrixok között a következő összefüggés írható fel. Ha \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} három bázisa az $\vec{\mathcal{X}}$ vektortérnek, akkor

$$T_{\mathbf{A}\mathbf{C}} = T_{\mathbf{A}\mathbf{B}} \cdot T_{\mathbf{B}\mathbf{C}},$$

vagyis jobbról balra olvasva a $T_{\mathbf{B}\mathbf{C}}$ mátrixszal a \mathbf{C} -koordinátákról áttérünk a \mathbf{B} -koordinátákra, majd a $T_{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ mátrixszal áttérünk a \mathbf{B} -koordinátákról az \mathbf{A} -koordinátákra, s ami megegyezik azzal, hogy a $T_{\mathbf{A}\mathbf{C}}$ mátrixszal a \mathbf{C} -koordinátákról egyből áttérnénk az \mathbf{A} -koordinátákra.

4.4. Példa

Legyen \mathcal{V} egy 2-dimenziós valós vektortér, amelynek \mathbf{B} egy bázisa. Legyen $v(3, 2)_{\mathbf{B}} \in \mathcal{V}$ egy vektor és $\mathbf{B}' = (\beta'_1(2, -1)_{\mathbf{B}}, \beta'_2(-5, 3)_{\mathbf{B}})$ egy másik bázis. Ekkor a v vektor koordinátái a \mathbf{B}' bázisban a következőképpen számolhatjuk ki a (4.6) áttérési képlet segítségével:

$$[v]_{\mathbf{B}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}}_{T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 7 \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathbf{B}'}}.$$

◇

4.2.2. Descartes-féle koordináta-transzformáció

Adunk egy képletet, amely kapcsolatot teremt két Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti koordináták között.

4.5. Tulajdonság (Descartes-féle koordináta-transzformáció képlete)

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ és $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ két Descartes-féle koordináta-rendszere az \mathcal{X} affin térnek, ahol \mathbf{B} és \mathbf{B}' az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér bázisai. Ekkor minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$[A]_{\mathcal{R}'} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot [A]_{\mathcal{R}} + [O]_{\mathcal{R}'}. \quad (4.7)$$

Bizonyítás.

$$[A]_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{[O'A]}_{\mathbf{B}'} \quad (4.8)$$

$$= [\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}]_{\mathbf{B}'} = [\overrightarrow{O'O}]_{\mathbf{B}'} + [\overrightarrow{OA}]_{\mathbf{B}'} \quad (4.9)$$

$$= [\overrightarrow{O'O}]_{\mathbf{B}'} + T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot [\overrightarrow{OA}]_{\mathbf{B}} \quad (4.10)$$

$$= [O]_{\mathcal{R}'} + T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot [A]_{\mathcal{R}}, \quad (4.11)$$

ahol a (4.8) egyenlőségben felhasználtuk a (4.2) relációt az \mathcal{R}' koordináta-rendszerre vonatkozóan, a (4.9) egyenlőségben felbontottuk az $\overrightarrow{O'A}$ vektort, hogy behozzuk az \mathcal{R} koordináta-rendszer O origóját, a (4.10) egyenlőségben koordináta-transzformációt hajtottunk végre az \overrightarrow{OA} vektorra, végül a (4.11) egyenlőségben vektorok koordináta-mátrixait visszaírtuk pontok Descartes-féle koordináta-mátrixaira. \square

4.6. Megjegyzés (Két koordináta-rendszer origója közötti kapcsolat)

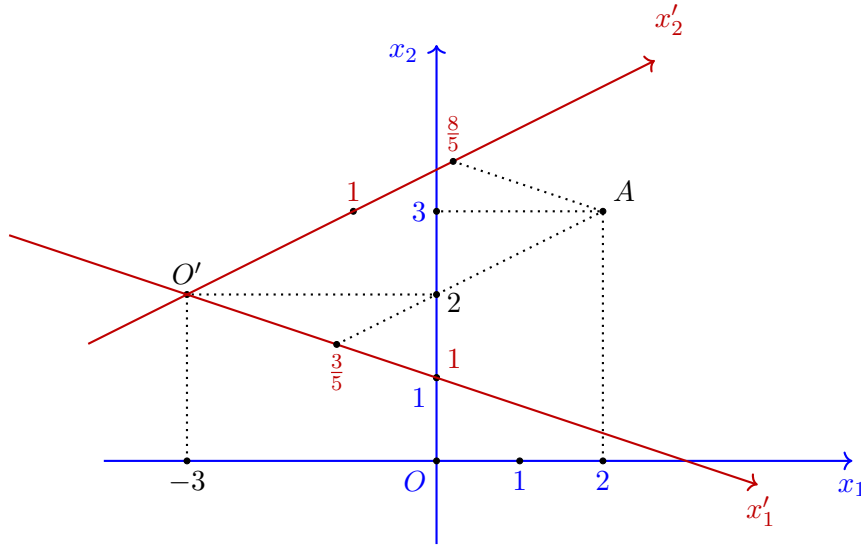
Legtöbbször az \mathcal{R}' új koordináta-rendszer O' origójának koordinátái ismertek a régi \mathcal{R} koordináta-rendszerben. A (4.7) összefüggésben $A = O'$ helyettesítéssel az origók koordinátái között az

$$[O]_{\mathcal{R}'} = -T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot [O']_{\mathcal{R}} \quad (4.12)$$

relációt kapjuk felhasználva, hogy $[O']_{\mathcal{R}'}$ a nullmátrix. A (4.7) reláció átírható az

$$\begin{aligned} [A]_{\mathcal{R}'} &= T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot ([A]_{\mathcal{R}} - [O']_{\mathcal{R}}) = T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}^{-1} \cdot ([A]_{\mathcal{R}} - [O']_{\mathcal{R}}) \\ &= \begin{bmatrix} [\beta'_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [\beta'_n]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot ([A]_{\mathcal{R}} - [O']_{\mathcal{R}}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

alakba, ahol $\mathbf{B}' = (\beta'_1, \dots, \beta'_n)$. \diamond



4.1. ábra. Az A pont koordinátái az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben.

4.7. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy 2-dimenziós valós affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az iránytér bázisa, és $A(2, 3)_{\mathcal{R}}$ egy pont. Legyen $\mathcal{R}' = (O'(-3, 2)_{\mathcal{R}}; \beta'_1(2, -1)_{\mathbf{B}}, \beta'_2(-5, 3)_{\mathbf{B}})$ az affin tér egy másik Descartes-féle koordináta-rendszere. A (4.13) képlet alapján az A pont koordinátáit az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a következőképpen számíthatjuk ki.

$$[A]_{\mathcal{R}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}} \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{[A]_{\mathcal{R}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{[O']_{\mathcal{R}}} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}}_{T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[\overrightarrow{O'A}]_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}}_{[\overrightarrow{O'A}]_{\mathbf{B}'}}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszert a következőképpen rajzoljuk meg az \mathcal{R} koordináta-rendszerben. Felvesszük az O' pontot az \mathcal{R} koordináta-rendszerben, majd az O' pontból kiindulva felrajzoljuk a β'_1 és β'_2 vektorokat. Az O' ponton keresztül a β'_1 irányába mutat az x'_1 -tengely, míg az O' ponton keresztül a β'_2 irányába mutat az x'_2 -tengely. \diamond

4.3. Affin koordináta-rendszerek

A Descartes-féle koordináta-rendszer az affin tér egy pontjából és az irányterének bázisvektoraiból épült fel. Az affin koordináta-rendszer csak az affin tér pontjaiból fog állni. A lineáris algebrából ismert lineáris generátorrendszer, függetlenség és bázis fogalmakkal teljesen analóg módon értelmezzük affin tér esetén az affin generátorrendszer, affin függetlenség és affin koordináta-rendszer fogalmakat. Van átjárás a Descartes-féle koordináta-rendszer és affin koordináta-rendszer között, egyikből megszerkeszthető a másik és fordítva. Bizonyos esetekben az affin koordináta-rendszer homogenitása, hogy csak pontokból épül fel nagyobb rugalmasságot biztosít, mint a Descartes-féle koordináta-rendszer.

4.3.1. Affin generátorrendszer

Az affin generátorrendszer lineáris algebrai megfelelője a vektortér (lineáris) generátorrendszere.

4.3.1.1. Lineáris algebrai kitérő: lineáris generátorrendszer

A $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ vektorrendszer a \mathbb{K} test feletti \mathcal{V} vektortér egy *lineáris generátorrendszere*, ha minden vektor felírható a generátorrendszert alkotó vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén léteznek $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy $v = k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n$. A β_1, \dots, β_n vektorok pontosan akkor generálják a \mathcal{V} vektorteret, ha az általuk kifeszített lineáris résztér megegyezik a teljes \mathcal{V} vektortérrel, azaz $\mathcal{V} = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$.

4.3.1.2. Affin generátorrendszer

A lineáris kombináció helyett az affin kombinációt használva a lineáris generátorrendszer értelmezése könnyen átírható az affin geometria nyelvére.

4.8. Értelmezés

Az (A_0, A_1, \dots, A_n) pontrendszer a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér egy *affin generátorrendszere*, ha az \mathcal{X} tér minden pontja felírható a pontrendszer affin kombinációjaként, vagyis minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén léteznek $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok úgy, hogy $M = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_n A_n$.

A 3.34. Tétel alapján az A_0, A_1, \dots, A_n pontrendszer az \mathcal{X} affin tér generátorrendszere pontosan akkor, ha $\mathcal{X} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$.

Az affin generátorrendszernek megfelel egy lineáris generátorrendszer az affin tér irányterén, így lineáris algebrai módszerekkel ellenőrizhető, hogy adott pontok affin generátorrendszert alkotnak-e.

4.9. Tulajdonság (Affin generátorrendszer jellemzése vektorokkal)

Az (A_0, A_1, \dots, A_n) pontrendszer a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér egy affin generátorrendszere akkor és csakis akkor, ha az $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ vektorrendszer az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris generátorrendszere.

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy (A_0, A_1, \dots, A_n) az \mathcal{X} affin tér egy affin generátorrendszere. Ha $v \in \vec{\mathcal{X}}$ az iránytér egy tetszőleges vektora, akkor létezik egyetlen $M = t(v, A_0) \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{A_0M}$. Az affin generátorrendszer értelmezése alapján léteznek $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok úgy, hogy $M = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_n A_n$. Az affin kombináció tulajdonsága alapján ez vektorokkal úgy írható le, hogy

$$v = \overrightarrow{A_0M} = \lambda_0 \underbrace{\overrightarrow{A_0A_0}}_{\vec{0}} + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n},$$

tehát tetszőleges $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor felírható az $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért az $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris generátorrendszere.

\Leftarrow Fordítva, tegyük fel, hogy $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy generátorrendszere. Ha $M \in \mathcal{X}$ egy tetszőleges pont, akkor léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy $\overrightarrow{A_0M} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n}$. Ha $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n \in \mathbb{K}$, akkor $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ és az $\overrightarrow{A_0M}$ vektor felírható vektorok affin kombinációjaként,

$$\overrightarrow{A_0M} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n} = \lambda_0 \underbrace{\overrightarrow{A_0A_0}}_{\vec{0}} + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n},$$

így az affin kombináció tulajdonsága alapján $M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$. Tehát tetszőleges $M \in \mathcal{X}$ pont felírható az A_0, A_1, \dots, A_n pontok affin kombinációjaként, ezért az (A_0, A_1, \dots, A_n) pontrendszer az \mathcal{X} affin tér egy generátorrendszere. \square

4.10. Példa

Egy 2-dimenziós valós affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ koordináta-rendszerében adottak az $A_0(1, 1)_{\mathcal{R}}$, $A_1(3, 1)_{\mathcal{R}}$, $A_2(3, 3)_{\mathcal{R}}$, $A_3(1, 3)_{\mathcal{R}}$ pontok és legyen $M(2, 2)_{\mathcal{R}}$. Mivel

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{A_0M}]_{\mathbf{B}} &= [M]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} [\overrightarrow{A_0A_1}]_{\mathbf{B}} + \frac{1}{4} [\overrightarrow{A_0A_2}]_{\mathbf{B}} + \frac{1}{4} [\overrightarrow{A_0A_3}]_{\mathbf{B}}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\overrightarrow{A_0M} = \frac{1}{4} \overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A_0A_2} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A_0A_3} = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \underbrace{\overrightarrow{A_0A_0}}_{\vec{0}} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A_0A_2} + \frac{1}{4} \overrightarrow{A_0A_3},$$

ezért $M = \frac{1}{4} A_0 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{4} A_2 + \frac{1}{4} A_3$. \diamond

4.3.2. Affin függőség és függetlenség

Az affin függőség és függetlenség lineáris algebrai megfelelői a lineáris függőség és függetlenség, ezért az analógia jobb megértéséhez előbb átismétljük ezeket fogalmakat.

4.3.2.1. Lineáris algebrai kitérő: a lineáris függetlenség egyenértékű megfogalmazásai

Egy \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortérben a $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{V}$ vektorok lineáris függetlenségének egyenértékű megfogalmazásai:

- (F1) ha valamely $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ skalárok esetén $k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n = \vec{0}$, akkor $k_1 = \dots = k_n = 0$;
- (F2) egyik β_i vektor sem írható fel a többi vektor lineáris kombinációjaként;
- (F3) egyik β_i vektor sincs benne a többi által generált lineáris altérben, vagyis minden $i = 1, \dots, n$ esetén

$$\beta_i \notin \langle \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \rangle.$$

4.3.2.2. Affin függőség és függetlenség

A lineáris függetlenség (F1) értelmezését nem tudjuk direkt átírni affin kombinációra, mivel nincs olyan kitüntetett eleme az affin térnek, mint amilyen a nullvektor a vektortéren. Ellenben megfogalmazhatók az (F2), illetve (F3) állítások affin geometriai megfelelői.

4.11. Értelmezés

Egy \mathcal{X} affin tér A_0, A_1, \dots, A_n pontjai *affin függetlenek*, ha egyik pont sincs benne a többi pont affin burkába, vagyis minden $i = 0, \dots, n$ esetén $A_i \notin \text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\}$.

Ha egy pontrendszer pontjai nem affin függetlenek, akkor affin függők. Ezt is megfogalmazzuk egy értelmezés formájában.

4.12. Értelmezés

Az \mathcal{X} affin tér A_0, A_1, \dots, A_n pontjai *affin függők*, ha valamelyik pont benne van a többi pont affin burkába, vagyis létezik $i \in \{0, \dots, n\}$ index úgy, hogy $A_i \in \text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\}$.

A 3.34. Tétel alapján az A_0, A_1, \dots, A_n pontok akkor és csakis akkor affin függők, ha valamelyik A_i pont felírható a többi pont affin kombinációjaként, vagyis léteznek

$$\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n = 1$$

affin súlyok úgy, hogy

$$A_i = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \dots + \lambda_n A_n.$$

Az affin függetlenség és a lineáris függetlenség között a következő kapcsolat teremthető, így lineáris algebrai módszerekkel igazolhatjuk pontok affin függetlenségét. A leírás egyszerűsítése miatt választjuk a vektorok kezdőpontjának az A_0 pontot, de a többi pont közül bármelyiket választhattuk volna kezdőpontnak.

4.13. Tulajdonság (Affin függetlenség jellemzése vektorokkal)

Egy \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér A_0, A_1, \dots, A_n pontjai akkor és csakis akkor affin függetlenek, ha az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ vektorai lineárisan függetlenek.

Ez az állítás átfogalmazható a következő vele egyenértékű állítással.

4.14. Tulajdonság (Affin függőség jellemzése vektorokkal)

Egy \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér A_0, A_1, \dots, A_n pontjai akkor és csak akkor affin függőek, ha az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ vektorai lineárisan függőek.

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy az \mathcal{X} affin tér A_0, A_1, \dots, A_n pontjai affin függőek, tehát valamelyik pont benne van a többi pont affin burkában. Két esetet különböztetünk meg. Ha az A_0 pont benne van a többi pont affin burkában, akkor léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok úgy, hogy $A_0 = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$, ahonnan

$$\vec{0} = \overrightarrow{A_0A_0} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n}.$$

A $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ egyenlőség miatt létezik nemnulla λ_i együttható, így a fenti összefüggés alapján az $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ vektorok lineárisan függőek. Ha egy, az A_0 -tól különböző pont van benne a többi pont affin burkában, akkor a leírás egyszerűsítése kedvéért feltehetjük, hogy ez a pont az A_n . Ekkor léteznek $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_{n-1} = 1$ affin súlyok úgy, hogy

$$A_n = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{n-1} A_{n-1},$$

ahonnan

$$\overrightarrow{A_0A_n} = \lambda_0 \overrightarrow{A_0A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{A_0A_{n-1}} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{A_0A_{n-1}}.$$

Tehát $\overrightarrow{A_0A_n}$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, ezért az $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ vektorok lineárisan függőek.

\Leftarrow Ha az $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ vektorok lineárisan függőek, akkor az egyik vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. A leírás egyszerűsítése kedvéért feltehetjük, hogy az $\overrightarrow{A_0A_n}$ felírható a többi vektor lineáris kombinációjaként. Tehát léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy

$$\overrightarrow{A_0A_n} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{A_0A_{n-1}}.$$

A jobb oldalon vektorok affin kombinációját állítjuk elő, hogy vektorok lineáris kombinációjáról pontok affin kombinációjára térhessünk át. Ehhez az $\overrightarrow{A_0A_0}$ nullvektort $\lambda_0 = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1})$ -szer hozzáadjuk a jobb oldalhoz

$$\overrightarrow{A_0A_n} = \lambda_0 \overrightarrow{A_0A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_{n-1} \overrightarrow{A_0A_{n-1}}.$$

Innen kapjuk, hogy $A_n = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{n-1} A_{n-1}$, tehát $A_n \in \text{af}\{A_0, \dots, A_{n-1}\}$, ezért az A_0, A_1, \dots, A_n pontok affin függőek. \square

4.15. Példa

Egy 3-dimenziós valós affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszerében adottak az $A_0(1, 2, 3)_{\mathcal{R}}$, $A_1(2, 3, 1)_{\mathcal{R}}$, $A_2(3, 1, 2)_{\mathcal{R}}$ és $A_3(4, 2, 0)_{\mathcal{R}}$ pontok. Az A_0, A_1, A_2 pontok affin függetlenek, mert az $\overrightarrow{A_0A_1}(1, 1, -2)_{\mathbf{B}}$, $\overrightarrow{A_0A_2}(2, -1, -1)_{\mathbf{B}}$ vektorok lineárisan függetlenek, mivel

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

amely megegyezik a vektorok számával. Az A_0, A_1, A_2, A_3 affin függőek, mert az $\overrightarrow{A_0A_1}(1, 1, -2)_B$, $\overrightarrow{A_0A_2}(2, -1, -1)_B$, $\overrightarrow{A_0A_3}(3, 0, -3)_B$ vektorok lineárisan függőek, mivel

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 2 \neq 3.$$

◇

4.3.3. Affin koordináta-rendszer

A 4.1.1. alfejezetben már részletesen átismételtük a bázis és koordináták fogalmát, de az affin koordináta-rendszerrel való analógia miatt röviden újra áttekintjük.

4.3.3.1. Lineáris algebrai kitérő: bázis

A vektortér egy vektorrendszer bázis, ha vektorai lineárisan függetlenek és generátorrendszert alkotnak. Ekkor a vektortér minden vektora egyértelműen felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. Lineáris algebrából ismerős a következő alternatív tétel.

4.16. Tétel (Lineáris alternatív tétel)

Egy n -dimenziós \mathcal{V} vektortér és $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ vektorok esetén a következő állítások egyenértékűek:

- (i) (v_1, \dots, v_n) a \mathcal{V} vektortér bázisa;
- (ii) a v_1, \dots, v_n vektorok a \mathcal{V} vektortér lineáris generátorrendszere;
- (iii) a v_1, \dots, v_n vektorok lineárisan függetlenek.

4.3.3.2. Affin koordináta-rendszer

A bázis affin geometriai megfelelője az affin koordináta-rendszer, így hozzá hasonlóan értelmezzük.

4.17. Értelmezés

Az $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ pontrendszer az \mathcal{X} affin tér egy *affin koordináta-rendszere*, ha pontjai affin függetlenek és az \mathcal{X} affin generátorrendszerét alkotják.

Az affin tér affin koordináta-rendszere meghatározza az iránytér egy bázisát, és fordítva. Így lineáris algebrai módszerekkel igazolhatjuk egy pontrendszerről, hogy affin koordináta-rendszer.

4.18. Tulajdonság (Affin koordináta-rendszer jellemzése vektorokkal)

Az (A_0, A_1, \dots, A_n) pontrendszer az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere akkor és csak akkor, ha $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa.

Bizonyítás. A 4.9. és 4.13. Tulajdonságok alapján. □

4.19. Megjegyzés

A 4.18. Tulajdonság alapján egy \mathcal{X} affin tér pontosan akkor n -dimenziós, ha van $(n+1)$ pontból álló affin koordináta-rendszere. □

Az affin tér minden pontja egyértelműen felírható az affin koordináta-rendszer pontjainak affin kombinációjaként.

4.20. Tulajdonság

Az $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ pontrendszer az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere akkor és csak akkor, ha minden $M \in \mathcal{X}$ pont egyértelműen felírható az \mathcal{A} pontrendszer pontjainak affin kombinációjaként, vagyis egyértelműen léteznek $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok úgy, hogy

$$M = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_n A_n.$$

Bizonyítás.

\Rightarrow Ha \mathcal{A} az \mathcal{X} affin koordináta-rendszere, akkor sajátosan affin generátorrendszere is, és így minden $M \in \mathcal{X}$ pont felírható az A_0, \dots, A_n pontok affin kombinációjaként, így elég belátni az egyértelműséget. Tegyük fel, hogy az M pont kétféleképpen írható fel a koordináta-rendszer pontjainak affin kombinációjaként, vagyis

$$M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n \quad \text{és} \quad M = \lambda'_0 A_0 + \lambda'_1 A_1 + \dots + \lambda'_n A_n,$$

ahol $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \lambda'_0, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$ és $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = \lambda'_0 + \dots + \lambda'_n = 1$. Innen adódik, hogy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0 M} &= \lambda_0 \overrightarrow{A_0 A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0 A_n} = \lambda'_0 \overrightarrow{A_0 A_0} + \lambda'_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + \lambda'_n \overrightarrow{A_0 A_n} \\ &\iff \lambda_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{A_0 A_n} = \lambda'_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + \lambda'_n \overrightarrow{A_0 A_n}. \end{aligned}$$

A 4.18. Tulajdonság alapján $(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa, ezért az $\overrightarrow{A_0 M}$ két felírásában a megfelelő együtthatók meg kell egyezzenek, tehát

$$\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n \quad \text{és} \quad \lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n = 1 - \lambda'_1 - \dots - \lambda'_n = \lambda'_0.$$

Tehát az M pont felírása az A_0, \dots, A_n pontok affin kombinációjaként egyértelmű.

\Leftarrow Fordítva, ha tetszőleges $M \in \mathcal{X}$ pont egyértelműen felírható az A_0, A_1, \dots, A_n pontok affin kombinációjaként, akkor értelmezés szerint ez a pontrendszer az affin tér egy affin generátorrendszere. Végül $M = A_i$ esetén az egyértelműségből következik, hogy egyik A_i pont sem írható fel a több pont affin kombinációjaként, tehát a pontrendszer affin független is. \square

A fenti tulajdonság szerint minden pont egyértelműen felírható az affin koordináta-rendszer pontjainak affin kombinációjaként, így beszélhetünk koordinátákról.

4.21. Értelmezés

Ha $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere, akkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén egyértelműen léteznek $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$, $\mu_0 + \dots + \mu_n = 1$ skalárok úgy, hogy $M = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_n A_n$. Ekkor az M pont *affin* vagy *baricentrikus koordinátái* $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ (jelölés: $M(\mu_0, \dots, \mu_n)_{\mathcal{A}}$).

Az \mathcal{A} affin koordináta-rendszerhez viszonyítva az M pont *baricentrikus koordináta-mátrixa*

$$[M]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K}).$$

Egy pont baricentrikus koordinátáinak összege mindig 1, így az egyik baricentrikus koordináta meghatározható a többi segítségével. Ez a gyakorlatban a számolások helyességének ellenőrzésére is szolgálhat.

A 4.16. Tétel affin geometria megfelelője a következő affin alternatíva tétel.

4.22. Tétel (Affin alternatíva tétel)

Egy n -dimenziós \mathcal{X} affin tér és $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok esetén a következő állítások egyenértékűek:

- (i) az (A_0, \dots, A_n) pontrendszer az \mathcal{X} affin tér affin koordináta-rendszere;
- (ii) az (A_0, \dots, A_n) pontrendszer az \mathcal{X} affin tér affin generátorrendszere;
- (iii) az A_0, \dots, A_n pontok affin függetlenek.

Bizonyítás. A 4.9., 4.13. és a 4.18. Tulajdonságok alapján az \mathcal{X} affin téren az (A_0, A_1, \dots, A_n) pontrendszerre felírt affin alternatíva tétel állításai egyenértékűek az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytéren a $(v_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, v_n = \overrightarrow{A_0A_n})$ vektorrendszerre felírt 4.16. Tétel megfelelő állításaival. \square

4.23. Példa

Ha $A \neq B$, akkor (A, B) egy affin koordináta-rendszere az AB egyenesnek (1-dimenziós affin térnek). \diamond

4.24. Példa

Ha \mathcal{X} egy 2-dimenziós affin tér (sík), akkor három nem kollineáris pontból álló (A_0, A_1, A_2) pontrendszer affin koordináta-rendszere \mathcal{X} -nek. Valóban, ha az (A_0, A_1, A_2) pontjai nem kollineárisak, akkor $\text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ nem egy egyenes, tehát 2-dimenziós affin résztér, amely megegyezik \mathcal{X} -szel. Továbbá $\overrightarrow{\text{af}\{A_0, A_1, A_2\}} = \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} \rangle = \vec{\mathcal{X}}$, így $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ a 2-dimenziós $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. \diamond

4.25. Példa

Ha A_0, A_1, \dots, A_k affin független pontok egy \mathcal{X} affin térben, akkor $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_k)$ egy affin koordináta-rendszer a $\mathcal{Z} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ affin résztérben. \diamond

4.26. Példa

Ha (v_1, \dots, v_n) egy \mathcal{V} vektortér bázisa, akkor $(A_0 = \vec{0}, A_1 = v_1, \dots, A_n = v_n)$ a \mathcal{V} vektortérhez rendelt affin tér egy affin koordináta-rendszere, mivel $(\overrightarrow{A_0A_1} = v_1, \dots, \overrightarrow{A_0A_n} = v_n)$ a \mathcal{V} egy bázisa. \diamond

4.27. Példa

Egy 3-dimenziós \mathcal{X} valós affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszerében adott az $A_0(1, 1, 1)_{\mathcal{R}}, A_1(2, 3, 1)_{\mathcal{R}}, A_2(1, 2, 4)_{\mathcal{R}}, A_3(4, 1, 2)_{\mathcal{R}}$ pontok affin koordináta-rendszert alkotnak, mivel az $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Valóban, felírjuk ezeket a vektorokat a \mathbf{B} bázisban

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0A_1}_{\mathbf{B}} &= [A_1]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \overrightarrow{A_0A_2}_{\mathbf{B}} &= [A_2]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{A_0 A_3}]_{\mathbf{B}} = [A_1]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A vektorok lineárisan függetlenek, mivel a koordinátákból alkotott

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix nem szinguláris, így a lineáris alternatíva tétel alapján a vektorok a 3-dimenziós $\vec{\mathcal{X}}$ valós vektortér egy bázisát alkotják. ◇

4.3.4. Affin koordináták és koordináta-transzformáció

A bázis és affin koordináta-rendszer között analógiát tovább erősíti, hogy az affin koordináta-transzformáció is egy mátrix szorzással írható le, ellentétben a Descartes-féle koordináta-transzformációval, ahol még egy összeadás is szerepel.

4.28. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ és $\mathcal{A}' = (A'_0, A'_1, \dots, A'_n)$ egy \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér két affin koordináta-rendszere. Ha ismertek az \mathcal{A} rendszer pontjainak \mathcal{A}' szerinti koordinátái, $A_i(a_{i0}, \dots, a_{in})_{\mathcal{A}'}$, minden $i = 0, 1, \dots, n$ esetén, és egy $M(\mu_0, \dots, \mu_n)_{\mathcal{A}}$ pont koordinátái az \mathcal{A} affin koordináta-rendszerben, akkor az $M(\mu'_1, \dots, \mu'_n)_{\mathcal{A}'}$ pont \mathcal{A}' szerinti koordinátái kifejezhetők, mint

$$[M]_{\mathcal{A}'} = \underbrace{[A_0]_{\mathcal{A}'} \dots [A_n]_{\mathcal{A}'}}_{T_{\mathcal{A}' \mathcal{A}}} \cdot [M]_{\mathcal{A}}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} \mu'_0 \\ \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{n0} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Bizonyítás. Mivel $A_i(a_{i0}, \dots, a_{in})_{\mathcal{A}'}$, ezért $A_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} A'_j$, minden $i = 0, 1, \dots, n$ esetén. Hasonlóan az $M(\mu_0, \dots, \mu_n)_{\mathcal{A}}$ feltételből felírható, hogy

$$M = \sum_{i=0}^n \mu_i A_i = \sum_{i=0}^n \mu_i \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} A'_j \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} \mu_i \right) A'_j.$$

A feltétel alapján $M(\mu'_0, \dots, \mu'_n)_{\mathcal{A}'}$, ahonnan felírható $M = \sum_{i=0}^n \mu'_i A'_i$ affin kombinációként is. Mivel \mathcal{A}' affin koordináta-rendszer, ezért a 4.20. Tulajdonság alapján az M pont kétféle felírásában az együtthatók meg kell egyezzenek, tehát

$$\mu'_j = \sum_{i=0}^n a_{ij} \mu_i, \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Ezeket a relációkat mátrix alakba írva kapjuk a (4.14) összefüggést. □

A $T_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} = [A_0]_{\mathcal{A}'} \dots [A_n]_{\mathcal{A}'}$ mátrixot az \mathcal{A} affin koordinátákról az \mathcal{A}' affin koordinátákra való áttérési mátrixnak nevezzük. Figyeljük meg a hasonlóságot a vektorok (4.6) koordináta-csere képletével. Affin koordináta-rendszer csere esetén is teljesülnek a

$$T_{\mathcal{A}\mathcal{C}} = T_{\mathcal{A}\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\mathcal{C}}, \quad T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = I \text{ (} I \text{ az identikus mátrix)}, \quad T_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{-1} \quad (4.15)$$

összefüggések, minden $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ affin koordináta-rendszerére egy \mathcal{X} affin térnek.

4.29. Megjegyzés

A (4.14) összefüggésben szereplő mátrixok minden oszlopában az összeg 1. \diamond

Lineáris algebrában megállapítható egy vektorrendszer lineáris függetlensége rangszámolás segítségével, ha ismertek a vektorok koordinátái egy bázisban. Ezzel analóg módon az affin geometriában is megállapítható egy pontrendszer affin függetlensége, ha ismertek a pontok koordinátái egy affin koordináta-rendszerben.

4.30. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_n)$ az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere és legyenek $A'_0, \dots, A'_k \in \mathcal{X}$ pontok úgy, hogy $A'_i(a'_{i0}, \dots, a'_{in})_{\mathcal{A}}$, minden $i = 0, \dots, k$ esetén. Az A'_0, \dots, A'_k pontok affin függetlenek akkor és csak akkor, ha

$$\text{rang} \begin{bmatrix} [A'_0]_{\mathcal{A}} & \dots & [A'_k]_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} a'_{00} & a'_{10} & \dots & a'_{k0} \\ a'_{01} & a'_{11} & \dots & a'_{k1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{0n} & a'_{1n} & \dots & a'_{kn} \end{bmatrix} = k + 1. \quad (4.16)$$

Bizonyítás. Jelölje $T = [a'_{ij}]_{i=\overline{0,k}, j=\overline{0,n}}$ a (4.16) relációban szereplő mátrixot. Mivel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{00} & a'_{10} & \dots & a'_{k0} \\ a'_{01} & a'_{11} & \dots & a'_{k1} \\ a'_{02} & a'_{12} & \dots & a'_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{0n} & a'_{1n} & \dots & a'_{kn} \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_J =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a'_{01} & a'_{11} & \dots & a'_{k1} \\ a'_{02} & a'_{12} & \dots & a'_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{0n} & a'_{1n} & \dots & a'_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{01} & a'_{11} - a'_{01} & \dots & a'_{k1} - a'_{01} \\ a'_{02} & a'_{12} - a'_{02} & \dots & a'_{k2} - a'_{02} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{0n} & a'_{1n} - a'_{0n} & \dots & a'_{kn} - a'_{0n} \end{bmatrix},$$

ahol a $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ és $J \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{K})$ mátrixok nem szingulárisak, $\det(B) = 1 \neq 0$ és $\det(J) = 1 \neq 0$, ezért

$$\text{rang } T = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{01} & a'_{11} - a'_{01} & \dots & a'_{k1} - a'_{01} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{0n} & a'_{1n} - a'_{0n} & \dots & a'_{kn} - a'_{0n} \end{bmatrix} = 1 + \text{rang} \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{11} - a'_{01} & \dots & a'_{k1} - a'_{01} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{1n} - a'_{0n} & \dots & a'_{kn} - a'_{0n} \end{bmatrix}}_S.$$

Továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén az $A'_i = a'_{i0}A_0 + a'_{i1}A_1 + \dots + a'_{in}A_n$ összefüggések alapján kapjuk, hogy $\overrightarrow{A_0A'_i} = a'_{i0}\overrightarrow{A_0A_0} + a'_{i1}\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + a'_{in}\overrightarrow{A_0A_n} = a'_{i1}\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + a'_{in}\overrightarrow{A_0A_n}$, ahonnan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0A'_i} &= \overrightarrow{A'_0A_0} + \overrightarrow{A_0A'_i} = \left(a'_{01}\overrightarrow{A_1A_0} + \dots + a'_{0n}\overrightarrow{A_nA_0}\right) + \left(a'_{i1}\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + a'_{in}\overrightarrow{A_0A_n}\right) \\ &= (a'_{i1} - a'_{01})\overrightarrow{A_0A_1} + \dots + (a'_{in} - a'_{0n})\overrightarrow{A_0A_n}.\end{aligned}$$

Ezeket a relációkat mátrix alakba írva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0A'_1} & \dots & \overrightarrow{A_0A'_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0A_1} & \dots & \overrightarrow{A_0A_n} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{11} - a'_{01} & \dots & a'_{k1} - a'_{01} \\ \vdots \\ a'_{1n} - a'_{0n} & \dots & a'_{kn} - a'_{0n} \end{bmatrix}}_S,$$

ezért a $\overrightarrow{A_0A'_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A'_k}$ vektorok lineárisan függetlenek pontosan akkor, ha $\text{rang } S = k$. Innen következik, hogy az A'_0, \dots, A'_k pontok affin függetlenek pontosan akkor, ha $\text{rang } T = 1 + \text{rang } S = k + 1$. \square

4.31. Példa

Egy 2-dimenziós \mathcal{X} affin térben legyen $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ egy affin koordináta-rendszer és adottak a $B_0(3, -2, 0)_{\mathcal{A}}, B_1(-1, -1, 3)_{\mathcal{A}}, B_2(10, -4, -5)_{\mathcal{A}} \in \mathcal{X}$ pontok. A $\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2)$ egy affin koordináta-rendszer az \mathcal{X} affin térben, mert a

$$T = \begin{bmatrix} [B_0]_{\mathcal{A}} & [B_1]_{\mathcal{A}} & [B_2]_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja 3 (mivel $\det(T) = 1 \neq 0$), így a 4.30. Tulajdonság alapján a B_0, B_1, B_2 pontok affin függetlenek, és a 4.22. Tétel (affin alternatíva tétel) alapján affin koordináta-rendszert alkotnak.

Ha $M(4, -7, 4)_{\mathcal{A}} \in \mathcal{X}$, akkor az M pont baricentrikus koordinátái a \mathcal{B} affin koordináta-rendszerben

$$[M]_{\mathcal{B}} = T^{-1} \cdot [M]_{\mathcal{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1}}_{T_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{A}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 17 & 25 & 14 \\ -10 & -15 & -8 \\ -6 & -9 & -5 \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{A}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{A}}} = \begin{bmatrix} -51 \\ 33 \\ 19 \end{bmatrix},$$

vagyis $M = -51 \cdot B_0 + 33 \cdot B_1 + 19 \cdot B_2$. \diamond

4.4. Affin és Descartes-féle koordináta-rendszerek közti kapcsolat

Egy affin koordináta-rendszerhez hozzárendelhetünk Descartes-féle koordináta-rendszereket azáltal, hogy az egyik pontot origónak választjuk és ebből a pontból kiinduló vektorokat képezünk. A következő tulajdonságban a leírás egyszerűsítése miatt az A_0 pontot választottuk origónak, de helyette bármelyik másik A_i pontot is választhattuk volna.

4.4.1. Affin koordináta-rendszerből szerkesztett Descartes-féle koordináta-rendszer

4.32. Tulajdonság

Ha $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere, akkor

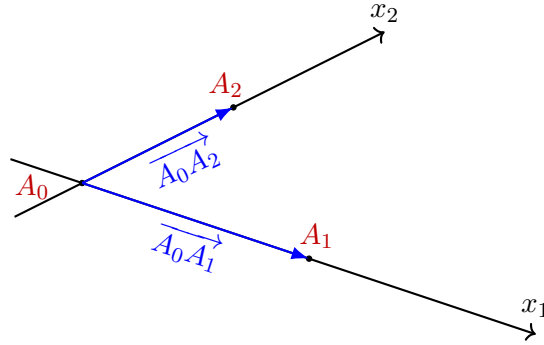
$$\mathcal{R} = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$$

az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Ha $M(\mu_0, \dots, \mu_n)_{\mathcal{A}}$ az M pont \mathcal{A} szerinti baricentrikus koordinátái, akkor $(\mu_1, \dots, \mu_n)_{\mathcal{R}}$ az M pont \mathcal{R} szerinti Descartes-féle koordinátái (elhagyjuk az A_0 -nak megfelelő koordinátát).

Bizonyítás. Ha \mathcal{A} egy affin koordináta-rendszer, akkor a 4.18. Tulajdonság alapján \mathcal{R} egy Descartes-féle koordináta-rendszer. Az

$$M = \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n \iff \overrightarrow{A_0M} = \mu_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{A_0A_n}$$

egyenértékűség alapján, ha (μ_0, \dots, μ_n) az M pont \mathcal{A} affin koordináta-rendszer szerinti baricentrikus koordinátái, akkor (μ_1, \dots, μ_n) az M pont \mathcal{R} szerinti Descartes koordinátái. \square



4.2. ábra. Az $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ affin koordináta-rendszerből szerkesztett $\mathcal{R} = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ Descartes-féle koordináta-rendszer.

4.33. Példa

Legyen $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ egy affin koordináta-rendszer egy 2-dimenziós valós affin térben (síkban). Ha $M = \frac{A_0 + 2A_1 + 3A_2}{6}$, akkor az M pont baricentrikus koordinátái az \mathcal{A} affin koordináta-rendszerben $(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6})$, és az $\mathcal{R}_0 = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ Descartes-féle koordináta-rendszerbeli koordinátái $(\frac{2}{6}, \frac{3}{6})$, az $\mathcal{R}_1 = (A_1; \overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2})$ Descartes-féle koordináta-rendszerbeli koordinátái pedig $(\frac{1}{6}, \frac{3}{6})$, illetve az $\mathcal{R}_2 = (A_2; \overrightarrow{A_2A_0}, \overrightarrow{A_2A_1})$ Descartes-féle koordináta-rendszerbeli koordinátái $(\frac{1}{6}, \frac{2}{6})$. \diamond

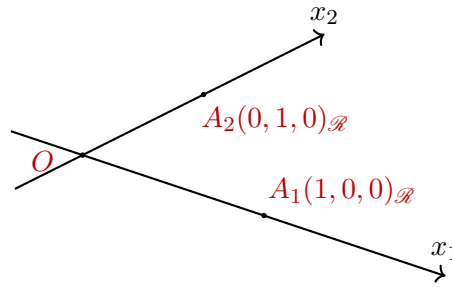
4.4.2. Descartes-féle koordináta-rendszerből szerkesztett affin koordináta-rendszer**4.34. Tulajdonság**

Ha $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \dots, \beta_n)$ az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, akkor $\mathcal{A} = (O, A_1, \dots, A_n)$ az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere, ahol $A_i = t(\beta_i, O)$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén az origó eltoltjai a bázisvektorokkal. Ha (μ_1, \dots, μ_n) az M pont \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti koordinátái, akkor $(1 - \mu_1 - \dots - \mu_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ az M pont \mathcal{A} affin koordináta-rendszer szerinti baricentrikus koordinátái.

Bizonyítás. Mivel $\beta_1 = \overrightarrow{OA_1}, \dots, \beta_n = \overrightarrow{OA_n}$, ezért a 4.18. Tulajdonság alapján \mathcal{A} affin koordináta-rendszere az \mathcal{X} affin térnek. Ha (μ_1, \dots, μ_n) az M pont \mathcal{R} szerinti Descartes-féle koordinátái, akkor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_n\beta_n \\ &= \mu_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_n\overrightarrow{OA_n} \\ &= (1 - \mu_1 - \dots - \mu_n)\overrightarrow{OO} + \mu_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_n\overrightarrow{OA_n},\end{aligned}$$

ahonnan $M = (1 - \mu_1 - \dots - \mu_n)O + \mu_1A_1 + \dots + \mu_nA_n$, vagyis az M pont \mathcal{A} szerinti baricentrikus koordinátái $(1 - \mu_1 - \dots - \mu_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$. \square



4.3. ábra. Az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerből szerkesztett $\mathcal{A} = (O, A_1, A_2)$ affin koordináta-rendszer.

Egy \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerből szerkesztett affin koordináta-rendszer

$$\mathcal{A} = (A_0(0, \dots, 0)_{\mathcal{R}}, A_1(1, 0, \dots, 0)_{\mathcal{R}}, \dots, A_n(0, \dots, 0, 1)_{\mathcal{R}})$$

alakú, ha a pontjait az \mathcal{R} szerint írjuk fel. Valóban, $A_0 = O(0, \dots, 0)$ és a (4.4) összefüggés alapján $[A_i]_{\mathcal{A}} = [O]_{\mathcal{R}} + [\beta_i]_{\mathbf{B}} = [0 \dots 0]^t + [0 \dots 1 \dots 0]^t = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^t$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén, ahol $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

4.35. Példa

Legyen $\mathcal{E} = (\vec{0}; e_1, \dots, e_n)$ a \mathbb{K}^n affin tér kanonikus Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol $\mathbf{E} = (e_1, \dots, e_n)$ a \mathbb{K}^n \mathbb{K} -vektortér kanonikus bázisa. Ehhez a Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt affin koordináta-rendszer $\mathcal{A} = (\vec{0}, e_1, \dots, e_n)$. \diamond

4.36. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \beta_2)$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer egy 2-dimenziós affin térben (síkban). Az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt affin koordináta-rendszer $\mathcal{B} = (O, B_1, B_2)$, ahol $B_1(1, 0)_{\mathcal{R}}$ és $B_2(0, 1)_{\mathcal{R}}$. Ha adott az $M(3, 4)_{\mathcal{R}}$ pont az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerben, akkor az M pont baricentrikus koordinátái a \mathcal{B} affin koordináta-rendszerben $M(-6, 3, 4)_{\mathcal{B}}$. \diamond

4.37. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy \mathcal{X} affin tér Descartes-féle koordináta-rendszere és adottak a $B_0(-2, 0)_{\mathcal{R}}$, $B_1(-1, 3)_{\mathcal{R}}$, $B_2(-4, -5)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pontok. Vesszük az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt \mathcal{A} affin koordináta-rendszert, amelyben $B_0(3, -2, 0)_{\mathcal{A}}$, $B_1(-1, -1, 3)_{\mathcal{A}}$, $B_2(10, -4, -5)_{\mathcal{A}}$ (az első koordinátákat úgy kaptuk, hogy 1-ből levontunk a többi koordináta összegét). A 4.31. Példában beláttuk, hogy $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ affin koordináta-rendszer. \diamond

5. fejezet

Affin részterek egyenletei

5.1. Affin részterek paraméteres egyenlete

A Descartes-féle koordináta-rendszerek bevezetése után értelmezhetjük az affin részterek egyenletét. Kétféle egyenletről fogunk beszélni: paraméteres és algebrai egyenletről. A paraméteres egyenlet segítségével pontokat lehet generálni az adott affin résztérből. Megfelelő paraméterek választása esetén egy affin koordináta-rendszerét is megkaphatjuk az adott affin résztérnek. Az algebrai egyenlet segítségével pedig egy adott pontról könnyen leellenőrizhetők, hogy benne van-e az adott affin résztérben vagy sem. Ezenkívül két affin résztér metszete könnyebben kiszámolható, ha az egyik paraméteres egyenlet által adott, míg a másik algebrai egyenlet által. Felírjuk az egyenes és hipersík egyenletét is affin tér esetén. Ezek alakja hasonlít a térben felírt egyenes és sík egyenletére. Végül megnézzük, hogy hogyan lehet átírni az egyenleteket egyik Descartes-féle koordináta-rendszerből a másikba.

5.1.1. Affin résztér paraméteres egyenlete

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti affin tér és $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az \mathcal{X} iránytér egy bázisa. Az \mathcal{X} tér egy \mathcal{Y} affin részterét meghatározza egy $A \in \mathcal{Y}$ pontja és a résztér $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytere, mivel $\mathcal{Y} = t(\vec{\mathcal{Y}}, A) = \{t(v, A) \mid v \in \vec{\mathcal{Y}}\}$. Ismertnek tekintjük az \mathcal{Y} affin résztér egy $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ pontját, illetve az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy $(w_1(w_{11}, \dots, w_{1n})_{\mathbf{B}}, \dots, w_k(w_{k1}, \dots, w_{kn})_{\mathbf{B}})$ bázisát. Egy $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ pont pontosan akkor van benne az \mathcal{Y} affin résztérben, ha létezik $v \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor úgy, hogy $M = t(v, A)$, ahonnan a (4.4) összefüggés alapján adódik, hogy

$$[M]_{\mathcal{R}} = [A]_{\mathcal{R}} + [v]_{\mathbf{B}}. \quad (5.1)$$

Mivel (w_1, \dots, w_k) az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa, ezért minden $v \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor egyértelműen felírható ezen bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy $v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$, ahonnan kapjuk, hogy

$$[v]_{\mathbf{B}} = [\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k]_{\mathbf{B}} = \lambda_1 [w_1]_{\mathbf{B}} + \dots + \lambda_k [w_k]_{\mathbf{B}}. \quad (5.2)$$

Összegezve, az (5.1) és (5.2) összefüggések alapján $M \in \mathcal{Y}$ pontosan akkor, ha egyértelműen léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy

$$[M]_{\mathcal{R}} = [A]_{\mathcal{R}} + \lambda_1 [w_1]_{\mathbf{B}} + \dots + \lambda_k [w_k]_{\mathbf{B}}, \quad (5.3)$$

amelyet kiírva koordinátákkal kapjuk, hogy

$$(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + \lambda_1(w_{11}, \dots, w_{1n}) + \dots + \lambda_k(w_{k1}, \dots, w_{kn}). \quad (5.4)$$

Ezt egyenletrendszer alakjában is szoktuk írni

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda_1 w_{11} + \dots + \lambda_k w_{k1} \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 w_{1n} + \dots + \lambda_k w_{kn} \end{cases}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}. \quad (5.5)$$

Az (5.3), (5.4), (5.5) egyenértékű alakokat nevezzük az \mathcal{Y} affin résztér *paraméteres egyenletének*.

5.1.1.1. Affin résztér affin koordináta-rendszerének megadása

Az (5.5) paraméteres egyenletbe a $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ paramétervektor helyébe rendre $(0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$ értékeket helyettesítve megkapjuk az \mathcal{Y} affin résztér egy

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} = (A_0(a_1, \dots, a_n), A_1(a_1 + w_{11}, \dots, a_n + w_{1n}), \dots, A_k(a_1 + w_{k1}, \dots, a_n + w_{kn}))$$

affin koordináta-rendszerét. Sajátosan, az affin résztér felírható a koordináta-rendszert alkotó pontok affin burkaként $\mathcal{Y} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$. Továbbá minden $M \in \mathcal{Y}$ pontra egyértelműen léteznek $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$ affin súlyok úgy, hogy $M = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k$.

5.1. Megjegyzés

Megjegyezzük, hogy ha ellenőrizni szeretnénk az affin résztterek $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ bennfoglalását, akkor elég leellenőrizni, hogy az \mathcal{Y} affin koordináta-rendszerét alkotó A_0, \dots, A_k pontok benne vannak a \mathcal{Z} affin résztérben. \diamond

5.2. Példa

Tekintsünk egy 4-dimenziós valós affin térben egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszert, ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa. Legyen \mathcal{Y} azon affin résztér, amelynek egyik pontja $A(1, 4, 3, -8)_{\mathcal{R}}$ és iránytere $\vec{\mathcal{Y}} = \langle w_1(1, 2, -3, 5)_{\mathbf{B}}, w_2(-2, 6, 7, -4)_{\mathbf{B}} \rangle$. Ekkor az \mathcal{Y} affin résztér paraméteres egyenlete

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x_2 = 4 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ x_3 = 3 - 3\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ x_4 = -8 + 5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Ekkor $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ esetén visszkapjuk az $A_0 = A(1, 4, 3, -8)_{\mathcal{R}}$ pontot, illetve $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ esetén az $A_1(2, 6, 0, -3)_{\mathcal{R}}$ és $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$ esetén az $A_2(-1, 10, 10, -12)_{\mathcal{R}}$ pontokat. Az $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} = (A_0, A_1, A_2)$ pontrendszer az \mathcal{Y} résztér egy affin koordináta-rendszere. \diamond

5.3. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortér $\mathcal{Y} = (4, 1, -3, 6) + \langle (-2, 0, 7, 0), (3, 5, 1, -1) \rangle$ lineáris varietásának paraméteres egyenlete (a kanonikus koordináta-rendszerben)

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ x_2 = 1 + 5\lambda_2 \\ x_3 = -3 + 7\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = 6 - \lambda_2 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Az \mathcal{Y} lineáris varietás egy affin koordináta-rendszere

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} = (A_0(4, 1, -3, 6), A_1(2, 1, 4, 6), A_2(7, 6, -2, 5)).$$

◇

5.1.1.2. Affin független pontok által kifeszített résztér paraméteres egyenlete

Legyenek $A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{X}$ affin független pontok egy \mathcal{X} affin térben. Feltételezzük, hogy ismertek ezen pontok koordinátái az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerben, azaz adottak $A_i(a_{i1}, \dots, a_{in})_{\mathcal{R}}$, minden $i = 0, \dots, k$ esetén. Ekkor az $\mathcal{Y} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ affin résztér paraméteres egyenletét a következőképpen írhatjuk fel. Az \mathcal{Y} affin résztér egy pontja $A_0(a_{01}, \dots, a_{0n})_{\mathcal{R}}$, továbbá a 3.11.5. alfejezet alapján az \mathcal{Y} résztér iránytere

$$\vec{\mathcal{Y}} = \overrightarrow{\text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k\}} = \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \rangle.$$

A 4.18. Tulajdonság alapján $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa, mert $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} = (A_0, \dots, A_k)$ az \mathcal{Y} résztér egy affin koordináta-rendszere. A (4.3) alapján ezen bázisvektorok koordináta-mátrixa

$$[\overrightarrow{A_0A_i}]_{\mathbf{B}} = [A_i]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} a_{i1} - a_{01} \\ \vdots \\ a_{in} - a_{0n} \end{bmatrix}.$$

Az (5.2) alapján egy $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ pont pontosan akkor van benne az $\mathcal{Y} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ affin résztérben, ha léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy

$$\begin{aligned} [M]_{\mathcal{R}} &= [A_0]_{\mathcal{R}} + \lambda_1 [\overrightarrow{A_0A_1}]_{\mathbf{B}} + \dots + \lambda_k [\overrightarrow{A_0A_k}]_{\mathbf{B}} \\ &= [A_0]_{\mathcal{R}} + \lambda_1 ([A_1]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}}) + \dots + \lambda_k ([A_k]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}}) \\ &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k) [A_0]_{\mathcal{R}} + \lambda_1 [A_1]_{\mathcal{R}} + \dots + \lambda_k [A_k]_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy az $\mathcal{Y} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ affin résztér paraméteres egyenlete

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k) \underbrace{\begin{bmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}}_{[A_0]_{\mathcal{R}}} + \lambda_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}}_{[A_1]_{\mathcal{R}}} + \dots + \lambda_k \underbrace{\begin{bmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix}}_{[A_k]_{\mathcal{R}}}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K},$$

amely egyenletrendszer alakjában a következőképpen néz ki:

$$\begin{cases} x_1 = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k) a_{01} + \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_k a_{k1} \\ \vdots \\ x_n = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_k) a_{0n} + \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_k a_{kn} \end{cases}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}. \quad (5.7)$$

5.4. Példa

Tekintsük egy 4-dimenziós valós affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszerét,

ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa. Legyen $A_0(1, 4, 3, -8)_{\mathcal{R}}$, $A_1(2, 6, 0, -3)_{\mathcal{R}}$, $A_2(-1, 10, 10, -12)_{\mathcal{R}}$ az affin tér három pontja. Ezek a pontok affin függetlenek a 4.30. Tulajdonság alapján, mert

$$\text{rang} \begin{bmatrix} [A_0]_{\mathcal{R}} & [A_1]_{\mathcal{R}} & [A_2]_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 10 \\ 3 & 0 & 10 \\ -8 & -3 & -12 \end{bmatrix} = 3.$$

Az (5.7) egyenlet alapján az $\mathcal{Y} = \text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ résztér paraméteres egyenlete

$$\begin{cases} x_1 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 1 + \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot (-1) \\ x_2 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 4 + \lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 10 \\ x_3 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 3 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 10 \\ x_4 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot (-8) + \lambda_1 \cdot (-3) + \lambda_2 \cdot (-12), \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

ahonnan visszakapjuk az 5.2. Példa (5.6) paraméteres egyenletét.

Tekintsük az affin tér $M(-3, 26, 18, -10)_{\mathcal{R}}$ és $N(1, 1, -1, -1)_{\mathcal{R}}$ pontjait. Megvizsgáljuk, hogy M és N rajta vannak-e az $\text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ síkon és ha igen, akkor hogyan írhatók fel az A_0, A_1, A_2 pontok affin kombinációjaként. Az $M(-3, 26, 18, -10)_{\mathcal{R}}$ pont koordinátáit behelyettesítve az (5.8) egyenletrendszer bal oldalába kapjuk a

$$\begin{cases} -3 = 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 26 = 4 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ 18 = 3 - 3\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ -10 = -8 + 5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 22 = 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ 15 = -3\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ -2 = 5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Ez a rendszer kompatibilis és a megoldása $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, ahonnan következik, hogy $M \in \text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ és $M = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot A_0 + \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = -4 \cdot A_0 + 2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2$. Az $N(1, 1, -1, -1)_{\mathcal{R}}$ pont esetén felírt

$$\begin{cases} 1 = 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 1 = 4 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ -1 = 3 - 3\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ -1 = -8 + 5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ -3 = 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ -4 = -3\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ 7 = 5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}$$

egyenletrendszer nem kompatibilis, ezért az N pont nincs rajta az $\text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ síkon, így nem is írható fel az A_0, A_1, A_2 pontok affin kombinációjaként. \diamond

5.5. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós affin térben adottak az $A_0(1, -1, 0, 2)$, $A_1(0, 1, 1, 0)$, $A_2(0, 0, 1, -1)$ pontok (az \mathcal{E} kanonikus koordináta-rendszerhez viszonyítva). Ezek a pontok affin függetlenek, mert

$$\text{rang} \begin{bmatrix} [A_0]_{\mathcal{E}} & [A_1]_{\mathcal{E}} & [A_2]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3.$$

Az $\mathcal{Y} = \text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ lineáris varietás 2-dimenziós és a paraméteres egyenlete

$$\begin{cases} x_1 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 1 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \\ x_2 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot (-1) + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ x_3 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 \\ x_4 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot 2 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 = -1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_4 = 2 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

◇

5.2. Affin résztér algebrai egyenlete(i)

A 2.1.3. alfejezetben igazoltuk, hogy egy inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza affin résztér, amelynek iránytere a megfelelő homogén egyenletrendszer. Ebben az alfejezetben ennek a fordítottját fogjuk belátni, éspedig minden affin résztér felírható, mint egy inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmaza. Egy affin résztér egyenletrendszerként való felírása hasznos, ha egy adott pontról le akarjuk ellenőrizni, hogy rajta van-e az affin résztéren. Ha az adott pont koordinátái teljesítik az egyenletrendszert, akkor rajta van, különben nincs rajta.

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} egy affin résztere, amelynek egy pontja $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{Y}$ és az irányterének egy bázisa $(w_1(w_{11}, \dots, w_{1n})_{\mathbf{B}}, \dots, w_k(w_{k1}, \dots, w_{kn})_{\mathbf{B}})$.

Bevezetjük a következő jelölést: $x(x_1, \dots, x_n)_{\mathbf{B}} \in \vec{\mathcal{X}}$ és $y(y_1, \dots, y_n)_{\mathbf{B}} \in \vec{\mathcal{X}}$ esetén legyen az x és y vektorok zárójele

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

A vektorok zárójele szimmetrikus $(x, y) = (y, x)$ és ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor megegyezik egy skalársorzattal.

Tekintjük a következő homogén *segéd egyenletrendszert* az y_1, \dots, y_n ismeretlenekben:

$$\begin{cases} w_{11}y_1 + \dots + w_{1n}y_n = 0 \\ \vdots \\ w_{k1}y_1 + \dots + w_{kn}y_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (w_1, y) = 0 \\ \vdots \\ (w_k, y) = 0 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Az (5.9) homogén egyenletrendszer \mathcal{S} megoldáshalmaza egy lineáris altér az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, továbbá

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S} = n - \text{rang} \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{k1} & \dots & w_{kn} \end{bmatrix} = n - k,$$

mivel a $w_1(w_{11}, \dots, w_{1n}), \dots, w_k(w_{k1}, \dots, w_{kn})$ vektorok lineárisan függetlenek. Vegyük az \mathcal{S} lineáris altér egy $(d_1(d_{11}, \dots, d_{1n}), \dots, d_{n-k}(d_{n-k1}, \dots, d_{n-kn}))$ bázisát. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ test esetén $\mathcal{S} = (\vec{y})^\perp$, a w_1, \dots, w_k vektorokra merőleges vektorok lineáris altére.

5.6. Tulajdonság (Affin résztér algebrai egyenlete)

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti n -dimenziós affin tér, amelynek \mathcal{R} egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Ha \mathcal{Y} az \mathcal{X} azon k -dimenziós affin résztere, amelynek egy pontja $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{Y}$

és iránytere $\vec{\mathcal{Y}} = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, akkor az \mathcal{Y} résztér azon $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pontok halmaza, amelyek \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti koordinátái teljesítik a

$$\begin{cases} d_{11}(x_1 - a_1) + \dots + d_{1n}(x_n - a_n) = 0 \\ \vdots \\ d_{n-k1}(x_1 - a_1) + \dots + d_{n-kn}(x_n - a_n) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (d_1, M - A) = 0 \\ \vdots \\ (d_{n-k}, M - A) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

egyenletrendszert, ahol a d_1, \dots, d_{n-k} vektorok az (5.9) segédrendszer egy bázisát alkotják.

Bizonyítás. A d_1, \dots, d_{n-k} vektorok az (5.9) egyenletrendszer megoldásai, tehát

$$\begin{cases} (w_1, d_1) = 0 \\ \vdots \\ (w_k, d_1) = 0 \end{cases}, \dots, \begin{cases} (w_1, d_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ (w_k, d_{n-k}) = 0 \end{cases}.$$

Ezt az $(n - k)$ darab rendszert, amelyek mindegyike k egyenlőséget tartalmaz, átcsoportosítjuk k darab rendszerbe, amelyek mindegyike $(n - k)$ egyenlőséget tartalmaz és kapjuk, hogy

$$\begin{cases} (w_1, d_1) = 0 \\ \vdots \\ (w_1, d_{n-k}) = 0 \end{cases}, \dots, \begin{cases} (w_k, d_1) = 0 \\ \vdots \\ (w_k, d_{n-k}) = 0 \end{cases}. \quad (5.11)$$

Mivel a d_1, \dots, d_{n-k} vektorok lineárisan függetlenek, ezért a

$$\begin{cases} (d_1, y) = 0 \\ \vdots \\ (d_{n-k}, y) = 0 \end{cases}, \quad (5.12)$$

egyenletrendszer S' megoldáshalmaza egy k -dimenziós lineáris altér. Az (5.11) alapján w_1, \dots, w_k lineárisan független vektorok az S' -ben vannak, így az S' egy bázisát alkotják.

Az \mathcal{Y} paraméteres egyenlete alapján $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{Y}$ pontosan akkor, ha

$$M = A + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k,$$

valamely $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalárok esetén, vagyis ha $M - A \in \langle w_1, \dots, w_k \rangle$. Így $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{Y}$ akkor és csak akkor, ha $y = M - A$ teljesíti az (5.12) egyenletrendszert, ami egyenértékű azzal, hogy (x_1, \dots, x_n) az (5.10) egyenletrendszer megoldása. \square

5.7. Példa

Egy 4-dimenziós valós affin térben legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer, ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa. Legyen \mathcal{Y} azon affin résztér, amely tartalmazza az $A(1, 3, 4, -8)_{\mathcal{R}}$ pontot és az iránytere $\vec{\mathcal{Y}} = \langle w_1(1, 2, -3, 5)_{\mathbf{B}}, w_2(-2, 6, 7, -4)_{\mathbf{B}} \rangle$. Az \mathcal{Y} affin résztér algebrai egyenlete következőképpen írható fel. Először felírjuk az (5.11) segédegyenletrendszert:

$$\begin{cases} 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + (-3) \cdot y_3 + 5 \cdot y_4 = 0 \\ (-2) \cdot y_1 + 6 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 + (-4) \cdot y_4 = 0 \end{cases}. \quad (5.13)$$

Mivel $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, ezért legyenek y_1, y_3 főismeretlenek és $y_2 = \alpha$, $y_4 = \gamma$ mellékismeretlenek. Ekkor az (5.13) egyenletrendszer megoldáshalmaza

$$\{(-32\alpha - 23\gamma, \alpha, -10\alpha - 6\gamma, \gamma) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\langle (-32, 1, -10, 0) \rangle}_{d_1}, \underbrace{\langle (-23, 0, -6, 1) \rangle}_{d_2},$$

ahonnan kapjuk, hogy \mathcal{Y} pontjai pontosan azok a pontok, amelyek \mathcal{R} szerinti koordinátái teljesítik a

$$\begin{cases} -32(x_1 - 1) + (x_2 - 3) - 10(x_3 - 4) = 0 \\ -23(x_1 - 1) - 6(x_3 - 4) + (x_4 + 8) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 32x_1 - x_2 + 10x_3 = 69 \\ 23x_1 + 6x_3 - x_4 = 55 \end{cases} \quad (5.14)$$

egyenletrendszert.

A kapott egyenletek helyességét a következő módon ellenőrizhetjük le. Vesszük az \mathcal{Y} résztér egy $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} = (A_0(1, 3, 4, -8) = A, A_1(2, 5, 1, -3) = t(w_1, A), A_2(-1, 9, 11, -12) = t(w_2, A))$ affin koordináta-rendszerét, amelyet az 5.1.1.1. alfejezetben tárgyalt módon szerkeszthetünk meg. Ezen affin koordináta-rendszer pontjai kell teljesítsék az (5.14) egyenleteket.

Másik ellenőrzési módszer, hogy a megadott $A(1, 3, 4, -8)$ pont kell teljesítse az (5.14) egyenleteket, illetve a $w_1(1, 2, -3, 5)$ és $w_2(-2, 6, 7, -4)$ vektorok pedig az $\vec{\mathcal{Y}}$ irányteret megadó

$$\begin{cases} 32x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ 23x_1 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

homogén egyenleteket. ◇

5.8. Példa

Egy 4-dimenziós valós affin térben legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer, ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa. Ha az \mathcal{Y} affin résztér paraméteres egyenlete az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x_2 = 4 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ x_3 = 3 - 3\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ x_4 = -8 + 5\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

akkor innen leolvasható, hogy \mathcal{Y} résztérnek egy pontja $A(1, 3, 4 - 8)_{\mathcal{R}}$, melynek koordinátáit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ helyettesítésre kapjuk, illetve az iránytere $\vec{\mathcal{Y}} = \langle w_1(1, 2, -3, 5)_{\mathbf{B}}, w_2(-2, 6, 7, -4)_{\mathbf{B}} \rangle$, ahol a w_1 bázisvektor koordinátái a λ_1 paraméter együtthatói, míg a w_2 bázisvektor koordinátái a λ_2 paraméter együtthatói. Ezután az 5.7. Példa szerint kiszámolhatjuk az \mathcal{Y} résztér algebrai egyenletét. ◇

5.9. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortér $\mathcal{Y} = (4, 1, -3, 6) + \langle (-2, 0, 7, 0), (3, 5, 1, -1) \rangle$ lineáris varietásának (az \mathcal{E} kanonikus koordináta-rendszerben vett) algebrai egyenletét a következőképpen számolhatjuk ki. Előbb felírjuk a segédrendszert:

$$\begin{cases} (-2) \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 0 \\ 3 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + (-1) \cdot y_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2y_1 + 7y_3 = 0 \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{cases},$$

amelynek megoldáshalmaza

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ \left(\frac{7}{2}\beta, \alpha, \beta, 5\alpha + \frac{23}{2}\beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha(0, 1, 0, 5) + \beta \left(\frac{7}{2}, 0, 1, \frac{23}{2} \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle (0, 1, 0, 5), \left(\frac{7}{2}, 0, 1, \frac{23}{2} \right) \right\rangle = \underbrace{\langle (0, 1, 0, 5) \rangle}_{d_1}, \underbrace{\langle (7, 0, 2, 23) \rangle}_{d_2}. \end{aligned}$$

Innen felírhatjuk az \mathcal{Y} lineáris varietás algebrai egyenletét:

$$\begin{cases} 0 \cdot (x_1 - 4) + 1 \cdot (x_2 - 1) + 0 \cdot (x_3 + 3) + 5 \cdot (x_4 - 6) = 0 \\ 7 \cdot (x_1 - 4) + 0 \cdot (x_2 - 1) + 2 \cdot (x_3 + 3) + 23 \cdot (x_4 - 6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + 5x_4 = 31 \\ 7x_1 + 2x_3 + 23x_4 = 160 \end{cases} \quad (5.15)$$

Az \mathcal{Y} lineáris varietás $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytere az

$$\begin{cases} x_2 + 5x_4 = 0 \\ 7x_1 + 2x_3 + 23x_4 = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza.

Ellenőrzésképpen az \mathcal{Y} lineáris varietás $(4, 1, -3, 6)$ pontja teljesíti az (5.15) egyenletrendszert és az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér $(-2, 0, 7, 0), (3, 5, 1, -1)$ vektorai teljesítik az (5.16) homogén egyenletrendszert. ◇

5.2.1. Hipersík algebrai egyenlete

A következőben a hipersík algebrai egyenletét fogjuk felírni, amely hasonlít a térbeli sík egyenletéhez. Emlékeztetünk, hogy hipersík olyan affin résztér, amelynek dimenziója eggyel kisebb, mint az affin tér dimenziója.

5.10. Tulajdonság (Hipersík algebrai egyenlete)

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti n -dimenziós affin tér, amelynek $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa. Legyen \mathcal{H} az \mathcal{X} affin tér egy hipersíkja, amelynek egy pontja $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ és iránytere

$$\vec{\mathcal{H}} = \langle h_1(h_{11}, \dots, h_{1n})_{\mathbf{B}}, \dots, h_{n-1}(h_{n-11}, \dots, h_{n-1n})_{\mathbf{B}} \rangle,$$

ahol h_1, \dots, h_{n-1} lineárisan független vektorok. Ekkor az $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ pont akkor és csak akkor van rajta a \mathcal{H} hipersíkon, ha koordinátái teljesítik az

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \dots & x_n - a_n \\ h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n-11} & h_{n-12} & \dots & h_{n-1n} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.17)$$

egyenletet.

Bizonyítás. Mivel a h_1, \dots, h_{n-1} vektorok lineárisan függetlenek, ezért

$$\text{rang} \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-11} & \dots & h_{n-1n} \end{bmatrix} = n - 1.$$

Ha $d_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i-1} & h_{1i+1} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n-11} & \dots & h_{n-1i-1} & h_{n-1i+1} & \dots & h_{n-1n} \end{vmatrix}$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor a $d(d_1, \dots, d_n)$ vektor nem nulla és minden $j = 1, \dots, n-1$ esetén

$$(h_j, d) = h_{j1}d_1 + \dots + h_{jn}d_n = \begin{vmatrix} h_{j1} & h_{j2} & \dots & h_{jn} \\ h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{j1} & h_{j2} & \dots & h_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{n-11} & h_{n-12} & \dots & h_{n-1n} \end{vmatrix} = 0,$$

(a determináns két sora megegyezik). Az 5.6. Tulajdonság alapján kapjuk, hogy a \mathcal{H} hipersík egyenlete $d_1(x_1 - a_1) + \dots + d_n(x_n - a_n) = 0$, ami egyenértékű az (5.17) egyenlettel. \square

5.11. Példa

Egy 4-dimenziós valós affin tér $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszerében adottak az $A_0(3, 4, 2, 0)_{\mathcal{R}}, A_1(2, 5, 2, -1)_{\mathcal{R}}, A_2(3, 4, 1, 1)_{\mathcal{R}}, A_3(1, 3, 3, 2)_{\mathcal{R}}$ pontok. A $\mathcal{H} = \text{af}\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ egy hipersík. Valóban, az A_0, A_1, A_2, A_3 pontok affin függetlenek, mert az $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}$ vektorok lineárisan függetlenek:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0A_1}_{\mathbf{B}} & \overrightarrow{A_0A_2}_{\mathbf{B}} & \overrightarrow{A_0A_3}_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

A $\mathcal{H} = t(\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3} \rangle, A_0)$ hipersík algebrai egyenlete

$$\begin{vmatrix} x_1 - 3 & x_2 - 4 & x_3 - 2 & x_4 - 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 32. \quad (5.18)$$

Valóban, a megadott A_0, A_1, A_2, A_3 pontok teljesítik az (5.18) egyenletet. \diamond

5.12. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortér $\mathcal{H} = (1, -2, 3, -4) + \langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1) \rangle$ hipersíkjának egyenlete (a kanonikus koordináta-rendszerben)

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 + 2 & x_3 - 3 & x_4 + 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2.$$

Az $M = (1, -2, 1, -2)$ pont rajta van a \mathcal{H} síkon, mert az M koordinátái teljesítik a \mathcal{H} egyenletét, $1 - 2 + 1 - 2 = -2$. Az $N = (1, 1, 1, 1)$ pont nincs rajta a \mathcal{H} hipersíkon, mert koordinátái nem teljesítik a \mathcal{H} hipersík egyenletét, $1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq -2$. \diamond

5.2.2. Egyenes algebrai egyenlete

A következőben az egyenes algebrai egyenletét fogjuk felírni, amely hasonlít a térbeli egyenes egyenletéhez.

5.13. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti n -dimenziós affin tér, amelynek $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa. Legyen \mathcal{L} az \mathcal{X} affin tér azon egyenese, amely átmegy az $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ ponton, és amelynek iránytere $\vec{\mathcal{L}} = \langle u(u_1, \dots, u_n)_{\mathbf{B}} \rangle$. Ekkor \mathcal{L} azon pontok halmaza, amelynek koordinátái teljesítik a következő egyenleteket

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}.$$

Bizonyítás. Az \mathcal{L} egyenes paraméteres egyenlete

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda u_n \end{cases}, \lambda \in \mathbb{K},$$

ahonnan kifejezve a λ paramétert kapjuk, hogy $\lambda = \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}$. \square

5.14. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortér $\mathcal{L} = (1, -2, -3, 4) + \langle (-2, 1, 0, 3) \rangle$ lineáris varietása egy egyenes, és amelynek egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben

$$\frac{x_1 - 1}{-2} = \frac{x_2 + 2}{1} = \frac{x_3 + 3}{0} = \frac{x_4 - 4}{3}.$$

◇

5.15. Példa

Egy 4-dim. valós affin tér egy \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerében adottak az $A(-2, 1, 4, 0)_{\mathcal{R}}$ és $B(3, 0, 7, -1)_{\mathcal{R}}$ pontok. Az A és B pontokon átmenő $AB = \text{af}\{A, B\}$ egyenes egyenlete

$$\frac{x_1 + 2}{5} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3 - 4}{3} = \frac{x_4}{-1}.$$

◇

5.2.3. Affin részterek metszete, bennfoglalás, párhuzamossága

Az affin résztér paraméteres és algebrai egyenlete hasznos affin részterek bennfoglalásának, párhuzamosságának eldöntésére vagy részterek metszetének kiszámolására is. A következőkben ezekre mutatunk példákat.

5.2.3.1. Affin részterek metszete

Analitikus mértanban a sík és egyenes metszetét úgy számolták ki, hogy az egyenest felírták paraméteres alakba, majd a sík algebrai egyenletébe helyettesítve meghatározták a paraméter

értékét. Ezt a paramétert visszahelyettesítve az egyenes paraméteres egyenletébe megkaptátok az egyenes és sík metszéspontját.

A 3.10. alfejezetben példákon keresztül mutattunk egy táblázatos módszert affin részterek metszetének kiszámolására. Két affin részter metszetét úgy is ki tudjuk számolni, hogy az egyik részternek felírjuk a paraméteres egyenletét, majd behelyettesítjük a másik részter algebrai egyenleteibe. Az így kapott egyenletrendszerből kiszámoljuk a paramétereket és visszahelyettesítjük az első paraméteres egyenletébe, megkapva a metszet paraméteres egyenletét.

A metszet számolásánál a kisebb dimenziós affin részter paraméteres egyenletét érdemes felírni, hogy minél kevesebb paraméterünk legyen, illetve a nagyobb dimenziós affin részter algebrai egyenletét érdemes felírni, hogy minél kevesebb egyenletünk legyen.

5.16. Példa

Egy 4-dimenziós valós affin tér egy \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerében adottak az

$$\mathcal{Y}_1 = t(\underbrace{\langle(3, 4, -3, 7)\rangle}_{v_1}, \underbrace{\langle(1, 2, -2, 3)\rangle}_{v_2}, \underbrace{\langle(1, 1, 1, 2)\rangle}_A) \text{ és } \mathcal{Y}_2 = t(\underbrace{\langle(1, 2, -3, 5)\rangle}_{w_1}, \underbrace{\langle(-2, 6, 7, -4)\rangle}_{w_2}, \underbrace{\langle(1, 3, 4, -8)\rangle}_B)$$

affin részterek. Az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ metszetet a következőképpen számolhatjuk ki. Felírjuk az \mathcal{Y}_1 affin részter paraméteres egyenletét

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = 1 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_3 = 1 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x_4 = 2 + 7\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Felírjuk az \mathcal{Y}_2 affin részter algebrai egyenletét. Ehhez előbb megoldjuk az

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 5y_4 = 0 \\ -2y_1 + 6y_2 + 7y_3 - 4y_4 = 0 \end{cases}$$

segédrendszert, amelynek megoldáshalmaza

$$\{(-32\alpha - 23\gamma, \alpha, -10\alpha - 6\gamma, \gamma) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\langle(-32, 1, -10, 0)\rangle}_{d_1}, \underbrace{\langle(-23, 0, -6, 1)\rangle}_{d_2}.$$

Innen kapjuk az \mathcal{Y}_2 affin részter algebrai egyenletét:

$$\begin{cases} 32x_1 - x_2 + 10x_3 = 69 \\ 23x_1 + 6x_3 - x_4 = 55 \end{cases}.$$

Az \mathcal{Y}_1 paraméteres egyenletét behelyettesítjük az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletébe, így kapva a

$$\begin{cases} 32(1 + 3\lambda_1 + \lambda_2) - (1 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2) + 10(1 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2) = 69 \\ 23(1 + 3\lambda_1 + \lambda_2) + 6(1 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2) - (2 + 7\lambda_1 + 3\lambda_2) = 55 \end{cases} \iff \begin{cases} 31\lambda_1 + 5\lambda_2 = 14 \\ 11\lambda_1 + 2\lambda_2 = 7 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 9$. A kapott megoldásokat visszahelyettesítjük a \mathcal{Y}_1 paraméteres egyenletébe, így kapva az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \{(7, 15, -14, 22)\}$ metszetet. ◇

5.17. Példa

A 3.29. Példában táblázatos módszerrel kiszámoltuk az \mathbb{R}^4 valós vektortér

$$\mathcal{Y}_1 = (1, 2, 3, 4) + \langle (2, 1, 0, -2), (1, 1, -1, 1) \rangle \quad \text{és} \quad \mathcal{Y}_2 = (0, 1, 3, 3) + \langle (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, -3) \rangle$$

lineáris varietásainak a metszetét. Újra kiszámoljuk a metszetet az algebrai egyenletet felhasználva.

Felírjuk az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás paraméteres egyenletét:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = 2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = 3 - \lambda_2 \\ x_4 = 4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Kiszámoljuk az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletét. Ehhez előbb felírjuk és megoldjuk a segédrendszert:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_3 - 3y_4 = 0 \end{cases}.$$

Legyenek y_2, y_3 főismeretlenek és $y_1 = t_1$, $y_4 = t_2$ mellékismeretlenek. Ekkor a segédrendszer megoldáshalmaza

$$\mathcal{S} = \{(t_1, -t_1 - t_2, -t_1 + 3t_2, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\langle (1, -1, -1, 0) \rangle}_{d_1}, \underbrace{\langle (0, -1, 3, 1) \rangle}_{d_2},$$

ahonnan felírhatjuk az \mathcal{Y}_2 lineáris varietás algebrai egyenletét:

$$\begin{cases} x_1 - (x_2 - 1) - (x_3 - 3) = 0 \\ -(x_2 - 1) + 3(x_3 - 3) + (x_4 - 3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \end{cases}.$$

Az \mathcal{Y}_1 paraméteres egyenletét behelyettesítjük az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletébe:

$$\begin{cases} (1 + 2\lambda_1 + \lambda_2) - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) - (3 - \lambda_2) = -4 \\ -(2 + \lambda_1 + \lambda_2) + 3(3 - \lambda_2) + (4 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Ennek a rendszernek a megoldás halmaza $\lambda_1 = -\lambda_2 = s$, $s \in \mathbb{R}$, amelyet visszahelyettesítve az \mathcal{Y}_1 paraméteres egyenletébe kapjuk az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ metszet paraméteres egyenletét:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 + s \\ x_4 = 4 - 3s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Innen $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = (1, 2, 3, 4) + \langle (1, 0, 1, -3) \rangle$. ◇

A 3.18. és 3.19. Példákban már vizsgáltuk két lineáris varietás bennfoglalását. Ezeket a példákat is újra megvizsgáljuk az algebrai egyenleteket felhasználva.

5.18. Példa

A 3.18. Példában vizsgáltuk az \mathbb{R}^4 vektortér $\mathcal{Y}_1 = (0, 1, 2, -4) + \langle (1, -1, 0, 1), (1, 1, -1, 4) \rangle$ és $\mathcal{Y}_2 = (5, 0, 0, -1) + \langle (1, 1, -1, 2), (2, 0, -1, 3), (1, -1, 0, -1) \rangle$ lineáris varietásainak bennfoglalását. Mivel $\dim \mathcal{Y}_1 = 2 < 3 = \dim \mathcal{Y}_2$, ezért elég megvizsgálni, hogy $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_2$. Ehhez pedig felírjuk az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás egy affin koordináta-rendszerét, amelynek pontjait behelyettesítve az \mathcal{Y}_2 lineáris varietás algebrai egyenletébe eldönthetjük a bennfoglalást.

Az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás paraméteres egyenlete:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 = 2 - \lambda_2 \\ x_4 = -4 + \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

ahonnan az \mathcal{Y}_1 egy affin koordináta-rendszere $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}_1} = \{A_0(0, 1, 2, -4), A_1(1, 0, 2, -3), A_2(1, 2, 1, 0)\}$. Kiszámoljuk az \mathcal{Y}_2 hipersík algebrai egyenletét:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 5 & x_2 & x_3 & x_4 + 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 + 2x_3 = 5.$$

Behelyettesítjük az $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}_1}$ koordináta-rendszer pontjait az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletébe:

$$A_0 : 0 + 1 + 2 \cdot 2 = 5, \quad A_1 : 1 + 0 + 2 \cdot 2 = 5, \quad A_2 : 1 + 2 + 1 \cdot 2 = 5.$$

Tehát $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{Y}_2$, ezért $\mathcal{Y}_1 = \text{af}\{A_0, A_1, A_2\} \subset \mathcal{Y}_2$, azaz \mathcal{Y}_1 benne van az \mathcal{Y}_2 lineáris varietásban.

A következőképpen is eldönthettük volna a bennfoglalást. Előbb kiszámoljuk az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletét, majd ellenőrizzük, hogy az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás $A(0, 1, 2, -4)$ pontja teljesíti-e az \mathcal{Y}_2 egyenletét: $0 + 1 + 2 \cdot 2 = 5$, tehát $A \in \mathcal{Y}_2$. Ezután megvizsgáljuk, hogy az \mathcal{Y}_1 irányterének $w_1(1, -1, 0, 1)$ és $w_2(1, 1, -1, 4)$ vektorai teljesítik-e az \mathcal{Y}_2 irányterének $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ egyenletét, amelyet az \mathcal{Y}_2 egyenletéből kapunk elhagyva a szabadtagot. Mivel $1 + (-1) + 2 \cdot 0 = 0$ és $1 + 1 + 2 \cdot (-1) = 0$, ezért $w_1, w_2 \in \vec{\mathcal{Y}}_2$, ahonnan $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \langle w_1, w_2 \rangle \subset \vec{\mathcal{Y}}_2$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{Y}_1 = A + \langle w_1, w_2 \rangle \subset \mathcal{Y}_2$. ◇

5.19. Példa

A 3.19. Példában vizsgáltuk az \mathbb{R}^4 vektortér $\mathcal{Y}_1 = (0, 1, 2, -4) + \langle (2, 0, 0, 1), (1, 2, -1, 4) \rangle$ és $\mathcal{Y}_2 = (5, 0, 0, -1) + \langle (1, 1, -1, 2), (2, 0, -1, 3), (1, -1, 0, -1) \rangle$ lineáris varietásainak bennfoglalását. Mivel $\dim \mathcal{Y}_1 = 2 < 3 = \dim \mathcal{Y}_2$, ezért elég megvizsgálni, hogy $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_2$. Ehhez pedig felírjuk az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás egy affin koordináta-rendszerét, amelynek pontjait behelyettesítve az \mathcal{Y}_2 lineáris varietás algebrai egyenletébe eldönthetjük a bennfoglalást.

Az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás paraméteres egyenlete:

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = 1 + 2\lambda_2 \\ x_3 = 2 - \lambda_2 \\ x_4 = -4 + \lambda_1 + 4\lambda_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

ahonnan az \mathcal{Y}_1 egy affin koordináta-rendszere $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}_1} = \{A_0(0, 1, 2, -4), A_1(2, 1, 2, -3), A_2(1, 3, 1, 0)\}$. Kiszámoljuk az \mathcal{Y}_2 hipersík algebrai egyenletét:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 5 & x_2 & x_3 & x_4 + 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 + 2x_3 = 5.$$

Behelyettesítjük az $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}_1}$ koordináta-rendszer pontjait az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletébe:

$$A_0 : 0 + 1 + 2 \cdot 2 = 5, \quad A_1 : 2 + 1 + 2 \cdot 2 = 7 \neq 5.$$

Tehát $A_1 \notin \mathcal{Y}_2$, ezért $\mathcal{Y}_1 = \text{af}\{A_0, A_1, A_2\} \not\subseteq \mathcal{Y}_2$.

A következőképpen is eldönthettük volna a bennfoglalást. Előbb kiszámoljuk az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenletét, majd ellenőrizzük, hogy az \mathcal{Y}_1 lineáris varietás $A(0, 1, 2, -4)$ pontja teljesíti-e az \mathcal{Y}_1 egyenletét: $0 + 1 + 2 \cdot 2 = 5$, tehát $A \in \mathcal{Y}_2$. Ezután megvizsgáljuk, hogy az \mathcal{Y}_1 irányterének $w_1(2, 0, 0, 1)$ és $w_2(1, 2, -1, 4)$ vektorai teljesítik-e az \mathcal{Y}_2 irányterének $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ egyenletét, amelyet az \mathcal{Y}_2 egyenletéből kapunk elhagyva a szabadtágot. Mivel $2 + 0 + 2 \cdot 0 = 2 \neq 0$, ezért $w_1 \notin \vec{\mathcal{Y}}_2$, ahonnan $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \langle w_1, w_2 \rangle \not\subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{Y}_1 = A + \langle w_1, w_2 \rangle \not\subseteq \mathcal{Y}_2$. \diamond

5.20. Példa

A 3.22. Példában vizsgáltuk az \mathbb{R}^4 vektortér $\mathcal{Y}_1 = (0, 1, 2, -3) + \langle (5, -5, -11, 2), (-6, 13, 9, -1) \rangle$ és $\mathcal{Y}_2 = (-2, 2, 7, -4) + \langle (1, 2, -4, 1), (-1, 3, 1, 0) \rangle$ lineáris varietásainak egyenlőségét. Mivel a két lineáris varietás azonos dimenziós, ezért elég vizsgálni, hogy az \mathcal{Y}_1 benne van-e \mathcal{Y}_2 -ben. Kiszámoljuk az \mathcal{Y}_2 lineáris varietás algebrai egyenletét, előbb felírva és megoldva a segédrendszert. Az

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 4y_3 + y_4 = 0 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

segédrendszer megoldáshalmaza

$$\mathcal{S} = \{(3t_1 + t_2, t_1, t_2, -5t_1 + 3t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (3, 1, 0, -5), (1, 0, 1, 3) \rangle,$$

ahonnan az \mathcal{Y}_2 algebrai egyenlete

$$\begin{cases} 3(x_1 + 2) + (x_2 - 2) - 5(x_4 + 4) = 0 \\ (x_1 + 2) + (x_3 - 7) + 3(x_4 + 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_4 = 16 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = -7 \end{cases}, \quad (5.19)$$

továbbá az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ iránytér egyenlete

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}. \quad (5.20)$$

Az $A(0, 1, 2, -3) \in \mathcal{Y}_1$ pont benne van az \mathcal{Y}_2 -ben, mert a koordinátái teljesítik az (5.19) egyenletrendszert: $\begin{cases} 3 \cdot 0 + 1 - 5 \cdot (-3) = 16 \\ 0 + 2 + 3 \cdot (-3) = -7 \end{cases}$. Az $\vec{\mathcal{Y}}_1$ iránytér $w_1(5, -5, -11, 2)$ és $w_2(-6, 13, 9, -1)$

bázisvektorai teljesítik az $\vec{\mathcal{Y}}_2$ iránytér (5.20) egyenletét

$$w_1 : \begin{cases} 3 \cdot 5 + (-5) - 5 \cdot 2 = 0 \\ 5 + (-11) + 3 \cdot 2 = 0 \end{cases}, \quad w_2 : \begin{cases} 3 \cdot (-6) + 13 - 5 \cdot (-1) = 0 \\ (-6) + 9 + 3 \cdot (-1) = 0 \end{cases},$$

tehát $\vec{\mathcal{Y}}_1 = \langle w_1, w_2 \rangle \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2$. Tehát $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$ és $\dim \mathcal{Y}_1 = \dim \mathcal{Y}_2 = 2$, ezért $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2$. \diamond

5.21. Példa

A 3.48. Példában vizsgáltuk az \mathbb{R}^4 vektortér $\mathcal{Y} = (-2, 4, -7, 9) + \langle (1, -2, 3, -1), (4, 6, -2, 3) \rangle$ és $\mathcal{Z} = (1, 3, 0, -6) + \langle (2, 10, -8, 5), (6, 2, 4, 1) \rangle$ lineáris varietásainak párhuzamosságát. Mivel mindkét lineáris varietás két dimenziós, ezért az egyikük irányterének felírjuk az egyenletét és megvizsgáljuk, hogy a másik irányterének generátorai benne vannak-e. Az \mathcal{Y} lineáris varietás irányterének egyenletét az \mathcal{Y} algebrai egyenletéből kapjuk, elhagyva a szabadtagekat. Ezért felírjuk és megoldjuk a segédrendszert. A

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 = 0 \\ 4y_1 + 6y_2 - 2y_3 + 3y_4 = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

segédrendszer megoldáshalmaza

$$\mathcal{S} = \{(-t_2, t_1, t_2, -2t_1 + 2t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 0, -2), (-1, 0, 1, 2) \rangle,$$

ahonnan az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egyenlete

$$\begin{cases} x_2 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

A \mathcal{Z} irányterének $w_1(2, 10, -8, 5)$ és $w_2(6, 2, 4, 1)$ generátorai teljesítik az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér (5.22) egyenletét:

$$w_1 : \begin{cases} 10 - 2 \cdot 5 = 0 \\ -2 + (-8) + 2 \cdot 5 = 0 \end{cases}, \quad w_2 : \begin{cases} 2 - 2 \cdot 1 = 0 \\ -6 + 4 + 2 \cdot 1 = 0 \end{cases}.$$

Tehát $\vec{\mathcal{Z}} = \langle w_1, w_2 \rangle \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$, ezért $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{Z}$. ◇

5.22. Példa

A 3.49. Példában vizsgáltuk az \mathbb{R}^4 vektortér $\mathcal{Z} = (1, 3, 0, -6) + \langle (2, -7, 3, -1), (-1, 5, 3, 1) \rangle$ és $\mathcal{Y} = (-2, 4, -7, 9) + \langle (1, -2, 3, -1), (2, -3, -2, -1), (-4, 4, 1, 1) \rangle$ lineáris varietásainak párhuzamosságát. Megnézzük, hogy a nagyobbik dimenziós lineáris varietás iránytere tartalmazza-e a kisebbik dimenziós lineáris varietás irányterét. Mivel $\dim \mathcal{Y} = 3$ és $\dim \mathcal{Z} = 2$, ezért kiszámoljuk az \mathcal{Y} irányterének az egyenletét. Mivel \mathcal{Y} hipersík, ezért az $\vec{\mathcal{Y}}$ egyenlete

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 6x_1 + 11x_2 - x_3 - 19x_4 = 0.$$

Megvizsgáljuk, hogy a \mathcal{Z} irányterének $w_1(2, -7, 3, -1)$ és $w_2(-1, 5, 3, 1)$ generátorai teljesítik-e a $\vec{\mathcal{Y}}$ egyenletét:

$$w_1 : 6 \cdot 2 + 11 \cdot (-7) - 3 - 19 \cdot (-1) = -49 \neq 0.$$

Tehát $w_1 \notin \vec{\mathcal{Y}}$, ezért $\vec{\mathcal{Z}} \not\subseteq \vec{\mathcal{Y}}$, ahonnan kapjuk, hogy $\mathcal{Y} \nparallel \mathcal{Z}$. ◇

5.3. Egyenlet átírása másik koordináta-rendszerbe

Legyen az $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ és $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér két Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} és \mathbf{B}' az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér bázisai.

5.3.1. Hipersík algebrai egyenletének átírása

Legyen \mathcal{H} az \mathcal{X} egy hipersíkja, amelynek egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b. \quad (5.23)$$

Ez azt jelenti, hogy egy $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ pont pontosan akkor van rajta a \mathcal{H} hipersíkon, ha az \mathcal{R} -beli (x_1, \dots, x_n) koordinátáira teljesül az (5.23) egyenlet.

A \mathcal{H} hipersík egyenletét az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a következőképpen írhatjuk fel. Ha (x'_1, \dots, x'_n) az M pont \mathcal{R}' koordináta-rendszer szerinti koordinátái, akkor az $[M]_{\mathcal{R}} = T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} \cdot [M]_{\mathcal{R}'} + [O']_{\mathcal{R}}$ áttérési képlet (4.5. Tulajdonság) alapján

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} + [O']_{\mathcal{R}},$$

amelyet behelyettesítjük az (5.23) egyenletbe és kapjuk, hogy

$$[a_1 \ \dots \ a_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \iff [a_1 \ \dots \ a_n] \cdot \left(T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} + [O']_{\mathcal{R}} \right) = b,$$

amely átírható

$$a'_1x'_1 + \cdots + a'_nx'_n = b'. \quad (5.24)$$

alakba, ahol $[a'_1 \ \dots \ a'_n] = [a_1 \ \dots \ a_n] \cdot T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}$ és $b' = b - [a_1 \ \dots \ a_n] \cdot [O']_{\mathcal{R}}$.

Egy affin résztér algebrai egyenletei azt fejezik ki, hogy az adott affin résztér milyen hipersíkok metszeteiként írható fel. Ezért egy affin résztér algebrai egyenletét (vagy egyenleteit) egyenként át lehet írni egy másik koordináta-rendszerbe a hipersík egyenletéhez hasonlóan.

5.23. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós affin téren $\mathcal{E} = (O = \vec{0}; \mathbf{E})$ a kanonikus Descartes-féle koordináta-rendszer és legyen

$$\mathcal{R} = (O'(-1, 2, -3, 4)_{\mathcal{E}}; \beta_1(1, 1, 0, 0)_{\mathbf{E}}, \beta_2(1, 0, 1, 0)_{\mathbf{E}}, \beta_3(1, 0, 0, 1)_{\mathbf{E}}, \beta_4(1, 1, 1, 0)_{\mathbf{E}})$$

egy másik Descartes-féle koordináta-rendszer. Legyen a \mathcal{H} hipersík algebrai egyenlete az \mathcal{E} koordináta-rendszerben $-4x_1 + 7x_2 - 11x_3 + x_4 = 2$, illetve az \mathcal{Y} affin résztér algebrai egyenlete

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 8 \\ 2x_1 + 6x_3 - x_4 = 9 \end{cases}.$$

A \mathcal{H} és \mathcal{Y} résztelek \mathcal{R} koordináta-rendszer szerinti algebrai egyenletei a következőképpen számolhatók ki. Jelölje $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ az iránytér \mathcal{R} koordináta-rendszernek megfelelő bázisát. Ekkor

$$T_{\mathbf{E}\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} [\beta_1]_{\mathbf{E}} & [\beta_2]_{\mathbf{E}} & [\beta_3]_{\mathbf{E}} & [\beta_4]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [O']_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján kiszámolhatjuk a \mathcal{H} hipersík \mathcal{R} szerinti egyenletét:

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & -11 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 2 \iff \\ 3x'_1 - 15x'_2 - 3x'_3 - 8x'_4 = -53.$$

Hasonló számolhatjuk ki az \mathcal{Y} két egyenletét is:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 8, \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 9,$$

ahonnan kapjuk, hogy az \mathcal{Y} algebrai egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$\begin{cases} 2x'_1 + 10x'_2 + 3x'_3 + 9x'_4 = 34 \\ 2x'_1 + 8x'_2 + x'_3 + 8x'_4 = 33 \end{cases}.$$

◇

5.3.2. Egyenes egyenletének átírása más koordináta-rendszerbe

Ha egy n -dimenziós affin tér \mathcal{L} egyenesének algebrai egyenlete az $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n},$$

akkor $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ az \mathcal{L} egy pontja és az iránytere $\vec{\mathcal{L}} = \langle u(u_1, \dots, u_n)_{\mathbf{B}} \rangle$. Ezeket átírjuk az áttérési képletek segítségével

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}}_{[A]_{\mathcal{R}'}} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[A]_{\mathcal{R}}} + [O]_{\mathcal{R}'} \quad \text{és} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{bmatrix}}_{[u]_{\mathbf{B}'}} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}}_{[u]_{\mathbf{B}}},$$

ahonnan kapjuk, hogy az \mathcal{L} egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben

$$\frac{x'_1 - a'_1}{u'_1} = \dots = \frac{x'_n - a'_n}{u'_n}.$$

5.24. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós affin térben $\mathcal{E} = (\vec{0}; \mathbf{E})$ a kanonikus Descartes-féle koordináta-rendszer, ezenkívül legyen $\mathcal{R} = (O'(-1, 2, -3, 4)_{\mathcal{E}}; \beta_1(1, 1, 0, 0)_{\mathbf{E}}, \beta_2(1, 0, 1, 0)_{\mathbf{E}}, \beta_3(1, 0, 0, 1)_{\mathbf{E}}, \beta_4(1, 1, 1, 0)_{\mathbf{E}})$ egy másik Descartes-féle koordináta-rendszer. Egy \mathcal{L} egyenes egyenlete az \mathcal{E} koordináta-rendszerben

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 + 1}{4} = \frac{x_3 - 3}{-5} = \frac{x_4}{0}.$$

Az \mathcal{L} egyenes egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerbe a következőképpen írható át. Jelölje $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ az iránytér \mathcal{R} koordináta-rendszernek megfelelő bázisát. Az egyenes egyenletéből leolvashatjuk, hogy $A(1, -1, 3, 0)_{\mathcal{E}}$ az \mathcal{L} egy pontja és $\vec{\mathcal{L}} = \langle u(2, 4, -5, 0)_{\mathbf{E}} \rangle$, tehát $\mathcal{L} = t(\langle u \rangle, A)$. Ekkor

$$T_{\mathbf{B}\mathbf{E}} = (T_{\mathbf{E}\mathbf{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} [\beta_1]_{\mathbf{E}} & [\beta_2]_{\mathbf{E}} & [\beta_3]_{\mathbf{E}} & [\beta_4]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[O]_{\mathcal{R}'} = -T_{\mathbf{B}\mathbf{E}} \cdot [O']_{\mathcal{E}} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

ahonnan

$$[A]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ a'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{u}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján felírhatjuk az $\mathcal{L} = t(\langle u \rangle, A)$ egyenes \mathcal{R} szerinti egyenletét:

$$\frac{x'_1}{7} = \frac{x'_2 - 9}{-2} = \frac{x'_3 + 4}{0} = \frac{x'_4 + 3}{-3}.$$

◇

6. fejezet

Affin függvények

Ebben a fejezetben értelmezzük az affin függvényt és nyomát. Belátjuk, hogy az affin függvények a megfelelő érintőterek közötti lineáris függvényeknek felelnek meg. Igazoljuk, hogy egy függvény pontosan akkor affin, ha felcserélhető az affin kombinációval. Ez analóg a lineáris függvény lineáris kombinációval való jellemzésével. Az affin függvény két megadási módját emeljük ki, affin koordináta-rendszer, illetve pont és lineáris függvény segítségével. Tanulmányozzuk az affin részterek affin függvény általi képét és ősképet. Belátjuk, hogy affin függvény megőrzi a párhuzamosságot. Megmutatjuk hogyan kell felírni az affin függvény egyenletét (képletét) Descartes-féle koordináta-rendszerben. A fejezet második felében rátérünk az affin endomorfizmusok tanulmányozására. Az affinitások csoportja felbomlik az eltolások és a centrális automorfizmusok féldirekt szorzatára. Végül sajátos affin endomorfizmusokat tanulmányozunk, úgy mint a projekció, szimmetria, homotétia.

6.1. Affin függvények

6.1.1. Lineáris algebrai kitérő: lineáris függvények

Hogy jobban megértsük az affin függvény értelmezését, előbb a lineáris függvény értelmezését fogjuk átismételni. Legyenek $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ és $(\mathcal{W}, +, \cdot)$ \mathbb{K} -vektorterek.

6.1. Értelmezés

Az $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ függvény *lineáris*, ha

- (i) *additív*: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ vektor esetén, és
- (ii) *homogén*: $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$, minden $k \in \mathbb{K}$ skalár és minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén.

Az f függvény additivitása azt jelenti, hogy a függvény felcserélhető az összeadás műveletével, vagyis mindegy, hogy először az összeadást végezzük el és az eredményre alkalmazzuk a függvényt vagy pedig először a vektorokra alkalmazzuk a függvényt s utána végezzük el a műveletet. Ezt a következő kommutatív diagram segítségével szemléltethetjük.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \xrightarrow{+} & \mathcal{V} \\
 f \times f \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathcal{W} \times \mathcal{W} & \xrightarrow{+} & \mathcal{W}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (v_1, v_2) & \xrightarrow{\quad} & v_1 + v_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (f(v_1), f(v_2)) & \xrightarrow{\quad} & f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)
 \end{array}$$

A nyilakat követve a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba kétféleképpen juthatunk el. A felső vízszintes jobbra mutató nyíl az összeadást jelenti a \mathcal{V} vektortéren, ezért a $(v_1, v_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vektorpár tagjait összeadja, $v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$ vektort adva eredményül. A jobb oldali függőleges lefele mutató nyíl az f függvényt jelöli és a $v_1 + v_2$ vektort az $f(v_1 + v_2) \in \mathcal{W}$ vektorba képezi. A bal oldali függőleges nyíl az $f \times f$ függvényt jelöli, amely a $(v_1, v_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ vektorpárt az $(f(v_1), f(v_2)) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ vektorpárba képezi. Az alsó vízszintes jobbra mutató nyíl az összeadás a \mathcal{W} vektortéren és az $(f(v_1), f(v_2))$ vektorpárnak az $f(v_1) + f(v_2) \in \mathcal{W}$ vektort felelteti meg. A diagram kommutativitása azt jelenti, hogy mindkét esetben ugyanazt kapjuk eredményül, vagyis $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ esetén.

Az f függvény homogenitása azt jelenti, hogy a függvény felcserélhető a skalárral való szorzással, vagyis mindegy, hogy először egy vektort megszorozunk egy skalárral, majd alkalmazzuk rá a függvényt, vagy előbb alkalmazzuk a vektorra a függvényt, majd szorozzuk meg a skalárral. Ezt a következő kommutatív diagram segítségével szemléltethetjük.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathcal{V} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{V} \\ 1_{\mathbb{K}} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{K} \times \mathcal{W} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{W} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (k, v) & \xrightarrow{\quad} & k \cdot v \\ \downarrow & & \downarrow \\ (k, f(v)) & \xrightarrow{\quad} & k \cdot f(v) = f(k \cdot v) \end{array}$$

A diagramban a felső, illetve az alsó jobbra mutató nyíl a \mathcal{V} , illetve a \mathcal{W} vektortéren a skalárral való szorzást jelenti, a jobb oldali függőleges nyíl az f függvény, a bal oldali pedig az $1_{\mathbb{K}} \times f$ függvényt. Ha előbb vízszintesen jobbra, majd lefele haladunk, akkor a $(k, v) \in \mathbb{K} \times \mathcal{V}$ skálárvektor párnak az $f(k \cdot v) \in \mathcal{W}$ vektort feleltetjük meg. Ha pedig előbb lefele, majd vízszintesen jobbra haladunk, akkor a (k, v) skálárvektor párnak a $k \cdot f(v) \in \mathcal{W}$ vektort feleltetjük meg. A diagram kommutativitása azt jelenti, hogy mindkét esetben ugyanazt kapjuk eredményül, vagyis $f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$, minden $k \in \mathbb{K}$ skálár és minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén.

6.1.2. Affin függvény értelmezése és affin függvény nyoma

6.1.2.1. Affin függvény értelmezésének motivációja

Ebben az alfejezetben motiváljuk az affin függvény 6.3. Értelmezését, ehhez mintául a lineáris függvény homogenitása fog szolgálni. Legyen $(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}, t)$ és $(\mathcal{Y}, \vec{\mathcal{Y}}, t)$ két, \mathbb{K} test feletti affin tér. Mindkét affin tér esetén t -vel jelöltük a hatást (eltolást), ahogy különböző vektorterek esetén is egyszerűen „+”-szal jelöljük az összeadást. Az affin függvény értelmezése azt fejezi ki, hogy felcserélhető a t hatással, vagyis a vektorokkal való eltolással. A lineáris függvény homogenitását leíró kommutatív diagramot a következőképpen módosíthatjuk, hogy megkapjuk az affin függvény értelmezést megadó kommutatív diagramot. A lineáris függvény homogenitását leíró kommutatív diagramban a \mathcal{V} , illetve \mathcal{W} vektortereket helyettesítjük az \mathcal{X} , illetve \mathcal{Y} affin terekkel, a \mathbb{K} testet helyettesítjük a felső sorban az $\vec{\mathcal{X}}$, illetve az alsó sorban az $\vec{\mathcal{Y}}$ irányterekkel, amelyek Abel-féle csoportok. A skalárral való szorzást pedig ezeknek a csoportoknak a hatásaival helyettesítjük, amelyeket t -vel jelölünk. A függőlegesen lefele mutató nyíl esetén az $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineáris függvényt helyét az $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény veszi át. A lineáris függvény diagramja esetén kanonikusan választhattuk az $1_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $1_{\mathbb{K}}(k) = k$ identikus függvényt. Az $\vec{\mathcal{X}}$ és $\vec{\mathcal{Y}}$ irányterek (\mathbb{K} feletti vektorterek) között nincs kanonikus függvény, ezért az $1_{\mathbb{K}}$ függvény helyett szükségünk lesz egy $\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ lineáris függvényre. Ez a függvény teszi lehetővé, hogy azt mondhassuk, hogy az f

felcserélhető a hatással. Egy $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor eltolással tud hatni egy $A \in \mathcal{X}$ pontra és az eltoló $t(v, A)$ pontra alkalmazható az $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény, így kapva az $f(t(v, A)) \in \mathcal{Y}$ pontot. Ellenben, ha előbb az f függvényt alkalmazzuk az $A \in \mathcal{X}$ pontra, akkor az $f(A) \in \mathcal{Y}$ pontot kapjuk, amelyet már nem tolhatunk el a v vektorral, mert az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér vektora, és nem az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytérre. Az $\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ lineáris függvény segítségével a $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektort $\vec{f}(v) \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektorra alakíthatjuk, amivel már eltolható az $f(A) \in \mathcal{Y}$ pont. Tehát azt mondjuk, hogy az $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin terek közötti függvény affin, ha létezik olyan $\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ lineáris függvény az irányterek között, amelyre az alábbi diagram kommutatív lesz.

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} & \xrightarrow{t} & \mathcal{X} \\ \vec{f} \times f \downarrow & & \downarrow f \\ \vec{\mathcal{Y}} \times \mathcal{Y} & \xrightarrow{t} & \mathcal{Y} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (v, A) & \longmapsto & t(v, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\vec{f}(v), f(A)) & \longmapsto & t(\vec{f}(v), f(A)) = f(t(v, A)) \end{array}$$

Ezen diagram kommutativitása azt jelenti, hogy

$$t(\vec{f}(v), f(A)) = f(t(v, A)), \quad \forall A \in \mathcal{X}, \forall v \in \vec{\mathcal{X}}, \quad (6.1)$$

amely átírható $[t(\vec{f}(v), -) \circ f](A) = [f \circ t(v, -)](A)$, minden $A \in \mathcal{X}$ és $v \in \vec{\mathcal{X}}$ alakba, ahonnan kapjuk a

$$t(\vec{f}(v), -) \circ f = f \circ t(v, -), \quad \forall v \in \vec{\mathcal{X}}, \quad (6.2)$$

függvények közötti relációt. A 6.1 összefüggést átírhatjuk olyan formába, amelyben nem szerepel a t eltolás. Megjegyezzük, hogy minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén létezik egyetlen egy olyan $B = t(v, A) \in \mathcal{X}$ pont, hogy $v = \overrightarrow{AB}$. Ekkor

$$f(B) = f(t(v, A)) = t(\vec{f}(v), f(A)) = t(\vec{f}(\overrightarrow{AB}), f(A)),$$

ami egyenértékű az $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ egyenlőséggel. Ez alapján az affin függvényre a 6.3. Értelmezést adhatjuk.

6.2. Megjegyzés

A csoporthatások elméletében a (6.1) összefüggés azt jelenti, hogy az f függvény \vec{f} -ekvivariáns. Csoporthatások esetén az ekvivariáns függvény értelmezése a következő. Egy \mathcal{G} csoportnak az \mathcal{X} halmazon vett $* : \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (bal oldali) hatása, egy \mathcal{H} csoportnak az \mathcal{Y} halmazon vett $\bullet : \mathcal{H} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ (bal oldali) hatása és egy $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ csoportmorfizmus esetén az $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény ϕ -ekvivariáns, ha $f(g * x) = \phi(g) \bullet f(x)$, minden $g \in \mathcal{G}$ csoportelem és minden $x \in \mathcal{X}$ halmaz elem esetén. A $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ és $\phi = 1_{\mathcal{G}}$ identikus függvény esetén a $1_{\mathcal{G}}$ -ekvivariáns függvény helyett röviden csak ekvivariáns függvény elnevezést használjuk. \diamond

6.1.2.2. Affin függvény értelmezése és affin függvény nyoma

A 6.1.2.1. alfejezetben leírtak alapján az affin függvényre a következő értelmezést adjuk.

6.3. Értelmezés

A \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} és \mathcal{Y} affin terek közötti $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvényt *affinnak* nevezzük, ha létezik olyan $\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ lineáris függvény az irányterek között, amelyre

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{X}. \quad (6.3)$$

Az $\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ lineáris függvényt az f affin leképezés *nyomának* (vagy *linearizáltjának*) nevezzük.

Az \mathcal{X} -ből \mathcal{Y} -ba képező affin függvények halmazát $\mathcal{A}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -nal fogjuk jelölni.

6.4. Megjegyzés

Ha $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont, akkor minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén létezik egyetlen $M \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM}$. Ha egy $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény affin, akkor a (6.3) összefüggés alapján $\vec{f}(v) = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$, minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén, így az \vec{f} nyom meghatározott az f függvény által. Tehát egy affin függvény nyoma egyértelmű. Ez alapján létezik egy jól értelmezett

$$\nu : \mathcal{A}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \text{Hom}(\vec{\mathcal{X}}, \vec{\mathcal{Y}}), \quad \nu(f) = \vec{f} \quad (6.4)$$

leképezés, amely egy affin függvénynek megfelelteti a nyomát. \diamond

6.5. Példa

- (i) Minden \mathcal{X} affin tér esetén az $f = 1_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $f(A) = 1_{\mathcal{X}}(A) = A$ identikus függvény affin és a nyoma $\vec{1}_{\mathcal{X}} = 1_{\vec{\mathcal{X}}} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ az érintőtér identikus függvénye. Valóban,

$$\vec{1}_{\mathcal{X}}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{1_{\mathcal{X}}(O)1_{\mathcal{X}}(A)} = \overrightarrow{OA} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}(\overrightarrow{OA}), \quad \forall O, A \in \mathcal{X}.$$

- (ii) Az $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $f(A) = B$, minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén, konstans függvény affin és a nyoma

$$\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{BB} = \vec{0} \in \vec{\mathcal{Y}}, \quad \forall A \in \mathcal{X},$$

a konstans nulla függvény, vagyis $\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$, $\vec{f}(v) = \vec{0}$.

- (iii) A $w \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorral való $t_w = t(w, -) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eltolás affin leképezés, amelynek nyoma a $\vec{t}_w = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$ identikus függvény. Valóban, ha $C = t_w(A)$ és $D = t_w(B)$, akkor $w = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ és

$$\vec{t}_w(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{t_w(A)t_w(B)} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -w + \overrightarrow{AB} + w = \overrightarrow{AB},$$

tetszőleges $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén. \diamond

Az alábbi lemma használata leegyszerűsíti annak igazolását, hogy egy függvény affin, és azt mondja, hogy a 6.3 egyenlőségben az A pont lehet rögzített.

6.6. Lemma

Legyenek \mathcal{X} és \mathcal{Y} \mathbb{K} test feletti affin terek és legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Az affin terek közötti $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény akkor és csakis akkor affin, ha az

$$\vec{f} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}, \quad \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \stackrel{\text{ért.}}{=} \overrightarrow{f(O)f(M)}, \quad \forall M \in \mathcal{X} \quad (6.5)$$

függvény lineáris. Ekkor az f nyoma megegyezik az \vec{f} függvénnyel.

Bizonyítás. Minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén létezik egyetlen $M \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM}$, ahonnan $\vec{f}(v) = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$, tehát az \vec{f} függvény értelmezett minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén.

\Rightarrow Ha az f függvény affin, akkor a 6.3. Értelmezés alapján a (6.5) által értelmezett \vec{f} függvény lineáris.

⇐ Fordítva, ha a (6.5) által értelmezett \vec{f} függvény lineáris, akkor elég megmutatni, hogy $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, minden $A, B \in \mathcal{X}$ pont esetén, mert ekkor értelmezés szerint az f függvény affin, amelynek nyoma \vec{f} . Minden $A, B \in \mathcal{X}$ pont esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\vec{f}(\overrightarrow{AB}) &= \vec{f}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{f}(\overrightarrow{-OA} + \overrightarrow{OB}) \stackrel{(*)}{=} -\vec{f}(\overrightarrow{OA}) + \vec{f}(\overrightarrow{OB}) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} -\overrightarrow{f(O)f(A)} + \overrightarrow{f(O)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(B)},\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk a feltevést, hogy az \vec{f} függvény lineáris, míg az (\dagger) egyenlőségben használtuk a (6.5) értelmezést. \square

6.7. Következmény

Legyen $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy függvény a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} és \mathcal{Y} affin terek között és legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Ha az

$$\vec{f} = \varphi(f(O), -) \circ f \circ \varphi(O, -)^{-1} : \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$$

függvény lineáris, akkor az f függvény affin és a nyoma megegyezik az \vec{f} függvénnyel.

Bizonyítás. Az $\vec{f} = \varphi(f(O), -) \circ f \circ \varphi(O, -)^{-1}$ reláció átírható

$$\vec{f} \circ \varphi(O, -) = \varphi(f(O), -) \circ f \tag{6.6}$$

alakba, amely egyenértékű azzal, hogy minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned}[\vec{f} \circ \varphi(O, -)](M) &= [\varphi(f(O), -) \circ f](M) \iff \vec{f}(\varphi(O, -)(M)) = \varphi(f(O), -)(f(M)) \\ &\iff \vec{f}(\varphi(O, M)) = \varphi(f(O), f(M)) \iff \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}.\end{aligned}$$

A feltétel alapján \vec{f} függvény lineáris, így a fenti átalakítások alapján a 6.6. Lemmából következik, hogy az f függvény affin és a nyoma megegyezik az \vec{f} függvénnyel. \square

6.8. Megjegyzés

A (6.6) egyenlőség azt jelenti, hogy tetszőlegesen rögzített $O \in \mathcal{X}$ pont esetén a következő diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ \varphi(O, -) \downarrow & & \downarrow \varphi(f(O), -) \\ \vec{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{\mathcal{Y}} \end{array} \tag{6.7}$$

Ebben a diagramban az f függvény affinitása egyenértékű az \vec{f} függvény linearitásával. Mivel a $\varphi(O, -)$ és $\varphi(f(O), -)$ függvények bijektívek, és az inverzük $t(-, O)$, illetve $t(-, f(O))$, ezért a fenti diagram egyenértékű a következővel.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ t(-, O) \uparrow & & \uparrow t(-, f(O)) \\ \vec{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{\mathcal{Y}} \end{array} \tag{6.8}$$

Ennek a diagramnak a kommutativitása azt jelenti, hogy $t(-, f(O)) \circ \vec{f} = f \circ t(-, O)$, amely egyenértékű azzal, hogy minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén $[t(-, f(O)) \circ \vec{f}](v) = [f \circ t(-, O)](v)$, vagyis

$$t(\vec{f}(v), f(O)) = f(t(v, O)), \quad \forall v \in \vec{\mathcal{X}}.$$

\diamond

6.1.3. Érintőterek között származtatott függvény

Legyen $O \in \mathcal{X}$ a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja. A 2.2. alfejezetben az \mathcal{X} halmazon értelmeztünk egy összeadást és skalárral való szorzást, amelyekkel \mathcal{X} egy $T_O\mathcal{X}$ -szel jelölt \mathbb{K} -vektorteret alkot. A műveletek úgy vannak értelmezve, hogy a $\varphi(O, -): T_O\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, mint vektorterek közötti függvény lineáris izomorfizmus legyen.

Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy függvény a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} és \mathcal{Y} affin terek között, akkor származtat egy

$$T_O f: T_O\mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)}\mathcal{Y}, \quad T_O f(A) = f(A), \quad \forall A \in T_O\mathcal{X}, \quad (6.9)$$

függvényt. Tehát f és $T_O f$, mint halmazok közötti függvények megegyeznek, de a $T_O f$ jelöléssel azt fejezzük ki, hogy az f függvényre úgy gondolunk, mint a $T_O\mathcal{X}$ és $T_{f(O)}\mathcal{Y}$ vektorterek közötti függvényre.

6.9. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér és legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény akkor és csakis akkor affin, ha az érintőterek között származtatott $T_O f: T_O\mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)}\mathcal{Y}$ függvény lineáris.

Bizonyítás. Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Mivel $T_O\mathcal{X}$, illetve $T_{f(O)}\mathcal{Y}$, mint halmazok megegyeznek az \mathcal{X} és \mathcal{Y} halmazokkal, továbbá f és $T_O f$, mint halmazok közötti függvények megegyeznek, ezért a (6.7) kommutatív diagramból kapjuk a következő kommutatív diagramot.

$$\begin{array}{ccc} T_O\mathcal{X} & \xrightarrow{T_O f} & T_{f(O)}\mathcal{Y} \\ \varphi(O, -) \downarrow & & \downarrow \varphi(f(O), -) \\ \vec{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{\mathcal{Y}} \end{array} \quad (6.10)$$

\Rightarrow Ha az f függvény affin, akkor \vec{f} lineáris és a (6.10) diagram alapján

$$T_O f = \varphi(f(O), -)^{-1} \circ \vec{f} \circ \varphi(O, -). \quad (6.11)$$

A (6.11) egyenlőség alapján a $T_O f: T_O\mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)}\mathcal{Y}$ felírható, mint a $\varphi(O, -): T_O\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, az $\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ és a $\varphi(f(O), -)^{-1}: \vec{\mathcal{Y}} \rightarrow T_{f(O)}\mathcal{Y}$ lineáris függvények összetétele, ezért lineáris.

\Leftarrow Ha a $T_O f: T_O\mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)}\mathcal{Y}$ függvény lineáris, akkor a (6.10) kommutatív diagram alapján az

$$\vec{f} = \varphi(f(O), -) \circ T_O f \circ \varphi(O, -)^{-1}$$

felírható a $\varphi(O, -)^{-1}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow T_O\mathcal{X}$, a $T_O f: T_O\mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)}\mathcal{Y}$ és a $\varphi(f(O), -): T_{f(O)}\mathcal{Y} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ lineáris függvény összetételeként, ezért lineáris. A 6.7. Következmény alapján az \vec{f} linearitásából következik, hogy az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény affin.

□

6.10. Példa

Legyen \mathcal{V} és \mathcal{W} két \mathbb{K} -vektortér és $h: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ egy lineáris függvény. A 2.1.1. alfejezetben megmutattuk, hogy minden vektortérhez természetes módon hozzárendelhető egy affin tér, amelyet

ugyanúgy jelöltünk, mint a vektorteret. Rögzített $w \in \mathcal{W}$ esetén az $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, $f(v) = h(v) + w$ függvény affin. Valóban, a \mathcal{V} affin tér $o = \vec{0}_{\mathcal{V}}$ pontja esetén

$$f(o) = f(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = h(\vec{0}_{\mathcal{V}}) + w = \vec{0}_{\mathcal{W}} + w = w,$$

és az érintőterek közötti $T_o f : T_o \mathcal{V} \rightarrow T_{f(o)} \mathcal{W}$ függvény lineáris, mert tetszőleges $v_1, v_2 \in T_o \mathcal{V} = \mathcal{V}$ és tetszőleges $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ esetén

$$\begin{aligned} T_o f((k_1 \odot_o v_1) \oplus_o (k_2 \odot_o v_2)) &\stackrel{(6.9)}{=} f((k_1 \odot_o v_1) \oplus_o (k_2 \odot_o v_2)) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} f(k_1 v_1 + k_2 v_2 + (1 - k_1 - k_2)o) \\ &= f(k_1 v_1 + k_2 v_2) \\ &= h(k_1 v_1 + k_2 v_2) + w \\ &= k_1 h(v_1) + k_2 h(v_2) + w \\ &= k_1 [h(v_1) + w] + k_2 [h(v_2) + w] + (1 - k_1 - k_2)w \\ &= k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + (1 - k_1 - k_2)w \\ &\stackrel{(2.10)}{=} (k_1 \odot_{f(o)} f(v_1)) \oplus_{f(o)} (k_2 \odot_{f(o)} f(v_2)) \\ &\stackrel{(6.9)}{=} (k_1 \odot_{f(o)} (T_o f)(v_1)) \oplus_{f(o)} (k_2 \odot_{f(o)} (T_o f)(v_2)). \end{aligned}$$

Mivel $T_o f$ lineáris, ezért a 6.9. Tulajdonság alapján az f függvény affin.

Megjegyezzük, hogy a \mathcal{V} , illetve \mathcal{W} affin terek iránytere $\vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$ és $\vec{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$, továbbá minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ esetén $\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1$. Ekkor az f függvény nyomát a következőképpen számolhatjuk ki az értelmezés alapján: minden $v \in \vec{\mathcal{V}}$ esetén

$$\begin{aligned} \vec{f}(v) &= \vec{f}(v - o) = \vec{f}(\overrightarrow{ov}) = \overrightarrow{f(o)f(v)} = f(v) - f(o) \\ &= [h(v) + w] - [h(o) + w] = h(v) - h(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = h(v) - \vec{0}_{\mathcal{W}} \\ &= h(v). \end{aligned}$$

◇

6.1.4. Affin függvények jellemzése affin kombinációval

Megjegyezzük, hogy egy vektorterek közötti függvény pontosan akkor lineáris, ha felcserélhető a lineáris kombinációval. Hasonlóan egy affin terek közötti függvény pontosan akkor affin, ha felcserélhető az affin kombinációval. Gyakran használjuk ezt a tételt annak igazolására, hogy egy adott függvény affin.

6.11. Tétel (Affin függvény jellemzése affin kombinációval)

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér. Az $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény akkor és csakis akkor affin, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n).$$

Első bizonyítás. Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy az f függvény affin. Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén a 2.22. Tulajdonság alapján

$$(\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n) = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n, \quad (6.12)$$

ahol a bal oldalon az $A_1, \dots, A_n \in T_O \mathcal{X}$ vektortér elemek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációja, míg jobb oldalon az A_1, \dots, A_n pontok $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ affin súlyokkal vett affin kombinációja áll. Hasonlóan a $T_{f(O)} \mathcal{Y}$ érintőtéren

$$(\lambda_1 \odot_{f(O)} f(A_1)) \oplus_{f(O)} \dots \oplus_{f(O)} (\lambda_n \odot_{f(O)} f(A_n)) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n). \quad (6.13)$$

A 6.9. Tulajdonság alapján a $T_O f: T_O \mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)} \mathcal{Y}$ függvény lineáris, ezért

$$\begin{aligned} T_O f((\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n)) &= \\ &= (\lambda_1 \odot_{f(O)} T_O f(A_1)) \oplus_{f(O)} \dots \oplus_{f(O)} (\lambda_n \odot_{f(O)} T_O f(A_n)) \\ &= (\lambda_1 \odot_{f(O)} f(A_1)) \oplus_{f(O)} \dots \oplus_{f(O)} (\lambda_n \odot_{f(O)} f(A_n)), \end{aligned}$$

amely a (6.12) és (6.13) egyenlőségek felhasználásával átírható

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n)$$

alakba. Tehát f felcserélhető az affin kombinációval.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy f felcserélhető az affin kombinációval. Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok esetén a 2.22. Tulajdonság alapján

$$(\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n) = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n + (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n) O. \quad (6.14)$$

Hasonlóan a $T_{f(O)} \mathcal{Y}$ érintőtéren

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \odot_{f(O)} f(A_1)) \oplus_{f(O)} \dots \oplus_{f(O)} (\lambda_n \odot_{f(O)} f(A_n)) &= \\ &= \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n) + (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n) f(O). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Mivel f felcserélhető az affin kombinációval, ezért

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n + (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n) O) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n) + (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n) f(O),$$

ami a (6.14) és a (6.15) egyenlőségek felhasználásával átírható

$$\begin{aligned} T_O f((\lambda_1 \odot_O A_1) \oplus_O \dots \oplus_O (\lambda_n \odot_O A_n)) &= \\ &= (\lambda_1 \odot_{f(O)} f(A_1)) \oplus_{f(O)} \dots \oplus_{f(O)} (\lambda_n \odot_{f(O)} f(A_n)) = \\ &= (\lambda_1 \odot_{f(O)} T_O f(A_1)) \oplus_{f(O)} \dots \oplus_{f(O)} (\lambda_n \odot_{f(O)} T_O f(A_n)) \end{aligned}$$

alakba. Tehát a $T_O f: T_O \mathcal{X} \rightarrow T_{f(O)} \mathcal{Y}$ függvény lineáris, így a 6.9. Tulajdonság alapján az f függvény affin.

□

Második bizonyítás. Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont.

\Rightarrow Tételezzük fel, hogy az f függvény affin. Bármely $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és bármely $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén az $M = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$ affin kombináció egyenértékű az $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}$ egyenlőséggel. Ekkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(O)f(M)} &= \overrightarrow{f(\overrightarrow{OM})} && (f \text{ affin}) \\ &= \overrightarrow{f(\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n})} \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{f(\overrightarrow{OA_1})} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{f(\overrightarrow{OA_n})} && (\vec{f} \text{ lineáris}) \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{f(O)f(A_1)} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{f(O)f(A_n)}, && (f \text{ affin}) \end{aligned}$$

ahonnan az affin kombináció értelmezése alapján $f(M) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n)$, vagyis

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n).$$

\Leftarrow Fordítva, tegyük fel, hogy az f függvény felcserélhető az affin kombinációval. A 6.6. Lemma alapján elég belátni, hogy a $h: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$,

$$h(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{f(O)f(B)}, \quad \forall B \in \mathcal{X}, \quad (6.16)$$

függvény lineáris. Legyenek $v_1, v_2 \in \vec{\mathcal{X}}$ tetszőleges vektorok és $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tetszőleges skalárok. Ekkor léteznek $M_1, M_2 \in \mathcal{X}$ pontok, amelyekre

$$v_1 = \overrightarrow{OM_1} \quad \text{és} \quad v_2 = \overrightarrow{OM_2}. \quad (6.17)$$

Ha $N = (1 - k_1 - k_2)O + k_1 M_1 + k_2 M_2 \in \mathcal{X}$, akkor

$$\overrightarrow{ON} = (1 - k_1 - k_2)\overrightarrow{OO} + k_1 \overrightarrow{OM_1} + k_2 \overrightarrow{OM_2} = k_1 \overrightarrow{OM_1} + k_2 \overrightarrow{OM_2} = k_1 v_1 + k_2 v_2.$$

Ebből a h függvény (6.16) értelmezése alapján ($B = N$ esetén) adódik, hogy

$$h(k_1 v_1 + k_2 v_2) = h(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{f(O)f(N)}. \quad (6.18)$$

Felhasználva, hogy f felcserélhető az affin kombinációval kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(N) &= f((1 - k_1 - k_2)O + k_1 M_1 + k_2 M_2) \\ &= (1 - k_1 - k_2)f(O) + k_1 f(M_1) + k_2 f(M_2), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(O)f(N)} &= (1 - k_1 - k_2) \underbrace{\overrightarrow{f(O)f(O)}}_{\vec{0}} + k_1 \overrightarrow{f(O)f(M_1)} + k_2 \overrightarrow{f(O)f(M_2)} \\ &= k_1 \overrightarrow{f(O)f(M_1)} + k_2 \overrightarrow{f(O)f(M_2)}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Végül a h függvény lineáris, mert

$$\begin{aligned} h(k_1 v_1 + k_2 v_2) &= \overrightarrow{f(O)f(N)} && (\text{a (6.18) alapján}) \\ &= k_1 \overrightarrow{f(O)f(M_1)} + k_2 \overrightarrow{f(O)f(M_2)} && (\text{a (6.19) alapján}) \\ &= k_1 h(\overrightarrow{OM_1}) + k_2 h(\overrightarrow{OM_2}) && (\text{a (6.16) alapján}) \\ &= k_1 h(v_1) + k_2 h(v_2) && (\text{a (6.17) alapján}). \end{aligned}$$

□

A 2.23. Tulajdonságban beláttunk, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontokra és olyan $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ skalárookra, hogy $\mu_1 + \dots + \mu_n = 0$ a $\mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n \in \vec{\mathcal{X}}$ egy jól értelmezett vektor, és pedig

$$\mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OA_n}, \quad \forall O \in \mathcal{X}.$$

Sajátosan $\overrightarrow{AB} = B - A$ és $\overrightarrow{f(A)f(B)} = f(B) - f(A)$, így ezekkel a jelölésekkel az $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ egyenlőség átírható

$$\vec{f}(B - A) = f(B) - f(A) \quad (6.20)$$

alakban. Ennek általánosítása a következő tulajdonság.

6.12. Tulajdonság (Affin függvény nyomának leírása)

Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény, akkor tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és tetszőleges $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_n = 0$ skalárok esetén

$$\vec{f}(\mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n) = \mu_1 f(A_1) + \dots + \mu_n f(A_n).$$

Bizonyítás. Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Ekkor

$$\begin{aligned} \vec{f}(\mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n) &= \vec{f}(\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OA_n}) \\ &= \mu_1 \vec{f}(\overrightarrow{OA_1}) + \dots + \mu_n \vec{f}(\overrightarrow{OA_n}) && \text{(mivel } \vec{f} \text{ lineáris)} \\ &= \mu_1 \overrightarrow{f(O)f(A_1)} + \dots + \mu_n \overrightarrow{f(O)f(A_n)} && \text{(mivel } f \text{ affin)} \\ &= \mu_1 f(A_1) + \dots + \mu_n f(A_n). \end{aligned}$$

□

6.13. Példa

Legyen \mathcal{V} és \mathcal{W} két \mathbb{K} -vektortér és legyen $h: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ egy lineáris függvény. A 2.1.1. alfejezetben megmutattuk, hogy minden vektortérhez természetes módon hozzárendelhető egy affin tér, amelyet ugyanúgy jelöltünk, mint a vektorteret. Így rögzített $w \in \mathcal{W}$ esetén a \mathcal{V} és \mathcal{W} affin terek közötti $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, $f(v) = h(v) + w$ függvény affin. Valóban, tetszőleges $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ pontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) &= h(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + w \\ &= \lambda_1 h(v_1) + \dots + \lambda_n h(v_n) + w \\ &= \lambda_1 h(v_1) + \dots + \lambda_n h(v_n) + \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_1 w \\ &= \lambda_1 (h(v_1) + w) + \dots + \lambda_n (h(v_n) + w) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n), \end{aligned}$$

tehát f felcserélhető az affin kombinációval, ezért affin a 6.11. Tétel alapján. A (6.20) alapján az f függvény nyoma $\vec{f}: \vec{\mathcal{V}} \rightarrow \vec{\mathcal{W}}$,

$$\vec{f}(v) = \vec{f}(v - \vec{0}_{\mathcal{V}}) = f(v) - f(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = (h(v) + w) - (h(\vec{0}_{\mathcal{V}}) + w) = h(v) - \vec{0}_{\mathcal{W}} = h(v),$$

minden $v \in \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$ esetén. ◇

6.1.5. Affin függvény megadása affin koordináta-rendszerrel

Legyen \mathcal{V} és \mathcal{W} két \mathbb{K} -vektortér úgy, hogy $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ a \mathcal{V} egy bázisa és $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{W}$ tetszőleges vektorok. Ekkor létezik egyetlen olyan $\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineáris függvény, hogy $\phi(\beta_i) = w_i$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Valóban, a

$$\phi(k_1\beta_1 + \dots + k_n\beta_n) = k_1w_1 + \dots + k_nw_n, \quad \forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$$

egy olyan lineáris függvényt értelmez, ami teljesíti a kívánt feltételeket. Ennek az affin geometriai megfelelője a következő tulajdonság.

6.14. Tulajdonság (Affin függvény megadása affin koordináta-rendszerrel)

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér. Ha $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_m)$ az \mathcal{X} tér egy affin koordináta-rendszere és $B_0, \dots, B_m \in \mathcal{Y}$ tetszőleges pontok, akkor létezik egyetlen olyan $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény, amelyre $f(A_i) = B_i$, minden $i = 0, 1, \dots, m$ esetén.

Első bizonyítás. Egyértelműség. Tegyük fel, hogy létezik f affin függvény a kért tulajdonságokkal. Mivel \mathcal{A} egy affin koordináta-rendszer, ezért minden $M \in \mathcal{X}$ pont egyértelműen felírható az \mathcal{A} pontjainak affin kombinációjaként, vagyis egyértelműen léteznek $\mu_0, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$, $\mu_0 + \dots + \mu_m = 1$ affin súlyok úgy, hogy $M = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_m A_m$. (Ezek az M pont baricentrikus koordinátái az \mathcal{A} affin koordináta-rendszerben.) A 6.11. Tétel alapján

$$f(M) = f(\mu_0 A_0 + \dots + \mu_m A_m) = \mu_0 f(A_0) + \dots + \mu_m f(A_m) = \mu_0 B_0 + \dots + \mu_m B_m,$$

tehát az $f(M)$ egyértelműen meghatározott az M pont \mathcal{A} affin koordináta-rendszer szerinti baricentrikus koordinátái által, ezért f egyértelmű.

Létezés. Az egyértelműség bizonyítása mutatja, hogyan kell értelmezni az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvényt. Ha $M(\mu_0, \dots, \mu_m)_{\mathcal{A}}$, azaz $M = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_m A_m$, akkor legyen

$$f(M) = \mu_0 B_0 + \dots + \mu_m B_m.$$

Megmutatjuk, hogy az így értelmezett függvény felcserélhető az affin kombinációval, ezért affin függvény lesz. Tetszőleges $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{X}$ pontokra egyértelműen léteznek $\mu_{i0}, \dots, \mu_{im} \in \mathbb{K}$, $\mu_{i0} + \dots + \mu_{im} = 1$ affin súlyok úgy, hogy $M_i = \mu_{i0} A_0 + \dots + \mu_{im} A_m$, minden $i = 1, \dots, k$ esetén. Feltehető, hogy az M_1, \dots, M_k pontok ugyanazon A_0, \dots, A_m pontok affin kombinációiként állnak elő, mivel minden affin kombinációhoz hozzávehető egy újabb pont 0 súllyal. Ekkor tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ affin súlyok esetén

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i M_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j=0}^m \mu_{ij} A_j\right)\right) = f\left(\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_{ij}\right) A_j\right) \\ &= \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_{ij}\right) B_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j=0}^m \mu_{ij} B_j\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(M_i). \end{aligned}$$

Innen a 6.11. Tétel alapján következik, hogy az f függvény affin. □

Második bizonyítás. Mivel $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_m)$ az \mathcal{X} affin tér egy affin koordináta-rendszere, ezért a 4.18. Tulajdonság alapján $\mathbf{B} = (\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_m})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Legyen

$\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ az a lineáris függvény, amelyre $\vec{f}(\overrightarrow{A_0 A_i}) = \overrightarrow{B_0 B_i}$, minden $i = 1, \dots, m$ esetén. Értelmezzük az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvényt úgy, hogy $\overrightarrow{B_0 f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{A_0 M})$, minden $M \in \mathcal{X}$ esetén, vagyis $f(M) = t(\vec{f}(\overrightarrow{A_0 M}), B_0)$, minden $M \in \mathcal{X}$ esetén. A 6.6. Lemma alapján az f függvény affin, továbbá $f(A_i) = t(\vec{f}(\overrightarrow{A_0 A_i}), B_0) = t(\overrightarrow{B_0 B_i}, B_0) = B_i$, minden $i = 1, \dots, m$ esetén, és $f(A_0) = t(\vec{f}(\overrightarrow{A_0 A_0}), B_0) = t(\vec{f}(\vec{0}), B_0) = t(\vec{0}, B_0) = B_0$. \square

6.1.6. Affin függvény megadása egy pont és egy lineáris függvény segítségével

6.15. Tulajdonság

Legyen A az \mathcal{X} , illetve B az \mathcal{Y} affin tér egy pontja és legyen $h: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ egy lineáris függvény az irányterek között. Ekkor létezik egyetlen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény, amelynek a nyoma h , illetve az $A \in \mathcal{X}$ pontot a $B \in \mathcal{Y}$ pontba képezi, vagyis $\vec{f} = h$ és $f(A) = B$. Ekkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén $f(M) = t(h(\overrightarrow{AM}), B)$.

Első bizonyítás. Létezés. Mivel minden $v \in \vec{\mathcal{Y}}$ vektor esetén létezik egyetlen $N \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy $\overrightarrow{BN} = v$, ezért értelmezhetjük az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvényt úgy, hogy minden $M \in \mathcal{X}$ pontra $\overrightarrow{Bf(M)} = h(\overrightarrow{AM})$, vagyis $f(M) = t(\overrightarrow{BM}, B) = t(h(\overrightarrow{AM}), B)$.

Ha $M = A$, akkor $\overrightarrow{Bf(A)} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, ahonnan kapjuk, hogy $f(A) = B$. Ekkor $\overrightarrow{f(A)f(M)} = h(\overrightarrow{AM})$, minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén, ahol a h függvény lineáris, ezért a 6.6. Lemma alapján az f függvény affin és a nyoma $\vec{f} = h$.

Egyértelműség. Ha $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy másik affin függvény, amelyre $g(A) = B$ és $\vec{g} = h$, akkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén $\overrightarrow{Bg(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = h(\overrightarrow{AM}) = \vec{g}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{g(A)g(M)} = \overrightarrow{Bg(M)}$, ahonnan $f(M) = g(M)$, minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén, vagyis $f = g$. \square

Második bizonyítás. Létezés. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $f = \varphi(B, -)^{-1} \circ h \circ \varphi(A, -)$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(A) &= [\varphi(B, -)^{-1} \circ h \circ \varphi(A, -)](A) = [\varphi(B, -)^{-1} \circ h](\varphi(A, A)) = [\varphi(B, -)^{-1} \circ h](\overrightarrow{AA}) = \\ &= [\varphi(B, -)^{-1} \circ h](\vec{0}) = \varphi(B, -)^{-1}(h(\vec{0})) = t(-, B)(\vec{0}) = t(\vec{0}, B) = B. \end{aligned}$$

Tehát az f függvény származtat egy $T_A f: T_A \mathcal{X} \rightarrow T_B \mathcal{Y}$ függvényt, amely három lineáris függvény, a $\varphi(A, -): T_A \mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, a $h: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ és a $\varphi(B, -)^{-1}: \vec{\mathcal{Y}} \rightarrow T_B \mathcal{Y}$, összetétele, ezért lineáris. A 6.9. Tulajdonság alapján f affin.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ \varphi(A, -) \downarrow & & \downarrow \varphi(B, -) \\ \vec{\mathcal{X}} & \xrightarrow{h} & \vec{\mathcal{Y}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_A \mathcal{X} & \xrightarrow{T_A f} & T_B \mathcal{Y} \\ \varphi(A, -) \downarrow & & \downarrow \varphi(B, -) \\ \vec{\mathcal{X}} & \xrightarrow{h} & \vec{\mathcal{Y}} \end{array}$$

Egyértelműség. Ha f és g affin függvények, amelyekre $f(A) = B = g(A)$ és $\vec{f} = h = \vec{g}$, akkor a (6.7) kommutatív diagram alapján

$$f = \varphi(B, -)^{-1} \circ \vec{f} \circ \varphi(A, -) = \varphi(B, -)^{-1} \circ h \circ \varphi(A, -) = \varphi(B, -)^{-1} \circ \vec{g} \circ \varphi(A, -) = g.$$

\square

6.2. Affin függvények tulajdonságai

6.2.1. Affin függvény összetétele affin

Lineáris függvények összetétele lineáris függvény. Hasonlóan, affin függvények összetétele is affin függvény. Ezenkívül az affin függvények összetételének a nyoma egyenlő a nyomok összetételével.

6.16. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} , \mathcal{Y} és \mathcal{Z} három, \mathbb{K} test feletti affin tér.

- (i) Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ és $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ affin függvények, akkor a $g \circ f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ összetett függvény is affin.
- (ii) Az összetétel $\overrightarrow{g \circ f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Z}}$ nyomára teljesül, hogy $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

Első bizonyítás.

- (i) Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontokra és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) &= g(f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n)) \\ &\stackrel{(*)}{=} g(\lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n)) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \lambda_1 g(f(A_1)) + \dots + \lambda_n g(f(A_n)) \\ &= \lambda_1 (g \circ f)(A_1) + \dots + \lambda_n (g \circ f)(A_n), \end{aligned}$$

ahol a $(*)$, illetve (\dagger) egyenlőségekben felhasználtuk az f és g függvények affinak, így felcserélhetők az affin kombinációval. Tehát a $g \circ f$ függvény felcserélhető az affin kombinációval, ezért a $g \circ f$ függvény affin a 6.11. Tétel alapján.

- (ii) Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén létezik egyetlen $M \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM} = M - O$. A (6.20) alapján minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g \circ f}(v) &= \overrightarrow{g \circ f}(M - O) \\ &= (g \circ f)(M) - (g \circ f)(O) \\ &= g(f(M)) - g(f(O)) \\ &= \vec{g}(f(M) - f(O)) \\ &= \vec{g}(\vec{f}(M - O)) \\ &= \vec{g}(\vec{f}(v)), \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. □

Második bizonyítás. Az f és g affin függvények \vec{f} és \vec{g} nyomai lineárisak, így az $\vec{g} \circ \vec{f}$ összetett függvény is lineáris. Végül tetszőleges $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(g \circ f)(A)(g \circ f)(B)} &= \overrightarrow{g(f(A))g(f(B))} \\ &\stackrel{(*)}{=} \vec{g}(\overrightarrow{f(A)f(B)}) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{AB})) \end{aligned}$$

$$= (\vec{g} \circ \vec{f})(\overrightarrow{AB}),$$

ahol a $(*)$, illetve (\dagger) egyenlőségekben felhasználtuk a g és f függvények affinak. Mivel az $\vec{g} \circ \vec{f}$ függvény lineáris, ezért a 6.3. Értelmezés alapján az $g \circ f$ függvény affin és a nyoma $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. \square

Harmadik bizonyítás. Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Mivel f és g affin függvények, ezért az alábbi diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Z} \\ \varphi(O, -) \downarrow & & \varphi(f(O), -) \downarrow & & \downarrow \varphi((g \circ f)(O), -) \\ \vec{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\vec{g}} & \vec{\mathcal{Z}} \end{array} \quad (6.21)$$

A $\vec{g} \circ \vec{f}$ függvény lineáris, mivel az \vec{f} és \vec{g} lineáris függvények összetétele, továbbá a fenti diagram alapján

$$\vec{g} \circ \vec{f} = \varphi((g \circ f)(O), -) \circ g \circ f \circ \varphi(O, -),$$

ezért a 6.7. Következmény alapján a $g \circ f$ összetett függvény affin és a nyoma $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$. \square

6.2.2. Bijektív affin függvények

Bijektív lineáris függvények inverze is lineáris függvény. Hasonlóan, bijektív affin függvény inverze is affin függvény, továbbá az inverz függvény nyoma egyenlő a nyom inverzével.

6.17. Tulajdonság (Bijektív affin függvények)

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér.

- (i) Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy bijektív affin függvény, akkor az inverze $f^{-1}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ is affin függvény.
- (ii) Az inverz függvény nyoma megegyezik a nyom inverzével, vagyis

$$\overrightarrow{(f^{-1})} = (\vec{f})^{-1}: \vec{\mathcal{Y}} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}.$$

- (iii) Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy olyan affin függvény, amelynek nyoma $\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ bijektív, akkor az f függvény bijektív.

Első bizonyítás.

- (i) Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény bijektív, ezért létezik inverze $f^{-1}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, amiről igazolni kell, hogy affin. Megmutatjuk, hogy f^{-1} felcserélhető az affin kombinációval. Tetszőleges $B_1 = f(A_1), \dots, B_n = f(A_n) \in \mathcal{Y}$ tetszőleges pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_n B_n) &= f^{-1}(\lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n)) && \text{(mert } f \text{ affin)} \\ &= \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n && \text{(mert } f^{-1} \circ f = 1_{\mathcal{X}}) \\ &= \lambda_1 f^{-1}(B_1) + \dots + \lambda_n f^{-1}(B_n), && \text{(mert } A_i = f^{-1}(B_i), \forall i) \end{aligned}$$

tehát f^{-1} felcserélhető az affin kombinációval, ezért f^{-1} affin a 6.11. Tétel alapján.

- (ii) Mivel $f \circ f^{-1} = 1_{\mathcal{Y}}$, ezért $\vec{f} \circ \overrightarrow{(f^{-1})} = \overrightarrow{f \circ f^{-1}} = \overrightarrow{1_{\mathcal{Y}}} = 1_{\vec{\mathcal{Y}}} = 1_{\vec{\mathcal{Y}}}$ a 6.16. Tulajdonság (ii) alpontja alapján. Hasonlóan, $f^{-1} \circ f = 1_{\mathcal{X}}$, ezért $\overrightarrow{(f^{-1})} \circ \vec{f} = \overrightarrow{f^{-1} \circ f} = \overrightarrow{1_{\mathcal{X}}} = 1_{\vec{\mathcal{X}}} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$. Tehát \vec{f} és $\overrightarrow{(f^{-1})}$ egymás inverzei, ezért $\overrightarrow{(f^{-1})} = (\vec{f})^{-1}$.
- (iii) Ha $f(A) = f(B)$, akkor $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{0}$ és mivel \vec{f} bijektív, ezért $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, ahonnan $A = B$. Tehát f injektív.

Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Ha $M \in \mathcal{Y}$, akkor $\overrightarrow{f(O)M} \in \vec{\mathcal{Y}} = \overrightarrow{f(\mathcal{X})} = \vec{f}(\vec{\mathcal{X}})$ és mivel \vec{f} bijektív, ezért létezik $A \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $\overrightarrow{f(O)M} = \vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{f(O)f(A)}$, ahonnan $M = f(A)$. Tehát f szürjektív is. \square

Második bizonyítás. Mivel az f függvény bijektív, ezért létezik az f^{-1} inverz függvény. Rögzített $O \in \mathcal{X}$ pont esetén a (6.7) kommutatív diagram alapján

$$\vec{f} = \varphi(f(O), -) \circ f \circ \varphi(O, -)^{-1},$$

ahonnan kapjuk, hogy \vec{f} három bijektív függvény összetétele, így bijektív és az inverze

$$(\vec{f})^{-1} = [\varphi(f(O), -) \circ f \circ \varphi(O, -)^{-1}]^{-1} = \varphi(O, -) \circ f^{-1} \circ \varphi(f(O), -)^{-1}. \quad (6.22)$$

Lineáris függvény inverze is lineáris, ezért az $(\vec{f})^{-1}$ inverz függvény lineáris, így a (6.22) összefüggésből a 6.7. Következmény alapján következik, hogy az f^{-1} inverz függvény affin és a nyoma $\overrightarrow{(f^{-1})} = (\vec{f})^{-1}$.

Ha az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény \vec{f} nyoma bijektív, akkor a (6.7) kommutatív diagram alapján

$$f = \varphi(f(O), -)^{-1} \circ \vec{f} \circ \varphi(O, -).$$

Ez alapján az f függvény három bijektív függvény összetétel, ezért bijektív. \square

6.2.3. Affin függvények affin kombinációja

A \mathbb{K} test feletti \mathcal{V} vektortérre a \mathcal{W} vektortérre menő lineáris függvények lineáris kombinációja is egy lineáris függvény, azaz $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ egy \mathbb{K} -vektortér. Hasonlóan, a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} affin térről az \mathcal{Y} affin térre menő függvények affin kombinációja is affin függvény, azaz $\mathcal{A}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ egy affin tér.

6.18. Tulajdonság (Affin függvények affin kombinációja is affin)

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér. Ha $f_1, \dots, f_k: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvények és $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ affin súlyok, akkor $f = (\mu_1 f_1 + \dots + \mu_k f_k): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$,

$$f(A) = (\mu_1 f_1 + \dots + \mu_k f_k)(A) = \mu_1 f_1(A) + \dots + \mu_k f_k(A), \quad \forall A \in \mathcal{X}$$

is affin függvény, amelynek nyoma $\overrightarrow{(\mu_1 f_1 + \dots + \mu_k f_k)} = \mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_k \vec{f}_k: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$.

Bizonyítás. Minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén $f(A) = \mu_1 f_1(A) + \dots + \mu_k f_k(A)$ az $f_1(A), \dots, f_k(A) \in \mathcal{Y}$ pontok $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ affin súlyokkal vett affin kombinációja, ezért $f(A) \in \mathcal{Y}$ és az f függvény jól értelmezett.

Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\right) &= \left(\sum_{j=1}^k \mu_j f_j\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\right) = \sum_{j=1}^k \mu_j f_j\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^k \mu_j \sum_{i=1}^n \lambda_i f_j(A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^k \mu_j f_j(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^k \mu_j f_j\right)(A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(A_i), \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy az f_1, \dots, f_n függvények affink és ezért felcserélhetők az affin kombinációval. Tehát az $f = \mu_1 f_1 + \dots + \mu_k f_k$ függvény felcserélhető az affin kombinációval, ezért a 6.11. Tétel alapján affin függvény.

Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén létezik egyetlen $M \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM} = M - O$. Ekkor a (6.20) alapján minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén

$$\begin{aligned} \vec{f}(v) &= \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \vec{f}(M - O) = f(M) - f(O) \\ &= (\mu_1 f_1 + \dots + \mu_k f_k)(M) - (\mu_1 f_1 + \dots + \mu_k f_k)(O) \\ &= (\mu_1 f_1(M) + \dots + \mu_k f_k(M)) - (\mu_1 f_1(O) + \dots + \mu_k f_k(O)) \\ &= \mu_1 (f_1(M) - f_1(O)) + \dots + \mu_k (f_k(M) - f_k(O)) \\ &= \mu_1 \vec{f}_1(M - O) + \dots + \mu_k \vec{f}_k(M - O) \\ &= \mu_1 \vec{f}_1(\overrightarrow{OM}) + \dots + \mu_k \vec{f}_k(\overrightarrow{OM}) \\ &= (\mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_k \vec{f}_k)(\overrightarrow{OM}) \\ &= (\mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_k \vec{f}_k)(v), \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $\vec{f} = \mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_k \vec{f}_k$. □

Második bizonyítás. Mivel minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén $f(A) = \mu_1 f_1(A) + \dots + \mu_k f_k(A)$ az $f_1(A), \dots, f_k(A) \in \mathcal{Y}$ pontok $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ affin súlyokkal vett affin kombinációja, ezért $f(A) \in \mathcal{Y}$ és az f függvény jól értelmezett. Legyen $P \in \mathcal{Y}$ egy rögzített pont. Tetszőleges $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $f(A) = \mu_1 f_1(A) + \dots + \mu_k f_k(A)$ és $f(B) = \mu_1 f_1(B) + \dots + \mu_k f_k(B)$, ahonnan

$$\overrightarrow{f(A)P} = \mu_1 \overrightarrow{f_1(A)P} + \dots + \mu_k \overrightarrow{f_k(A)P} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{Pf(B)} = \mu_1 \overrightarrow{Pf_1(B)} + \dots + \mu_k \overrightarrow{Pf_k(B)}.$$

Az $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ lineáris függvények $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$, $\mu_1 + \dots + \mu_k = 1$ affin súlyokkal vett lineáris kombinációja is lineáris, továbbá minden $A, B \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(B)} &= \overrightarrow{f(A)P} + \overrightarrow{Pf(B)} \\ &= \left(\mu_1 \overrightarrow{f_1(A)P} + \dots + \mu_k \overrightarrow{f_k(A)P}\right) + \left(\mu_1 \overrightarrow{Pf_1(B)} + \dots + \mu_k \overrightarrow{Pf_k(B)}\right) \\ &= \mu_1 \left(\overrightarrow{f_1(A)P} + \overrightarrow{Pf_1(B)}\right) + \dots + \mu_k \left(\overrightarrow{f_k(A)P} + \overrightarrow{Pf_k(B)}\right) \\ &= \mu_1 \overrightarrow{f_1(A)f_1(B)} + \dots + \mu_k \overrightarrow{f_k(A)f_k(B)} \\ &= \mu_1 \vec{f}_1(\overrightarrow{AB}) + \dots + \mu_k \vec{f}_k(\overrightarrow{AB}) \\ &= (\mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_k \vec{f}_k)(\overrightarrow{AB}), \end{aligned}$$

ezért a 6.3. Értelmezés alapján az $f = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_k f_k$ függvény affin és a nyoma

$$\vec{f} = \overrightarrow{(\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_k f_k)} = \mu_1 \vec{f}_1 + \cdots + \mu_k \vec{f}_k. \quad \square$$

6.2.4. Affin részterek affin függvény általi képe

Lineáris altér lineáris függvény általi képe lineáris altér. Hasonlóan, affin résztér affin függvény általi képe affin résztér, továbbá az affin résztér képének iránytere megegyezik az iránytér nyom általi képével.

6.19. Tulajdonság (Affin résztér affin függvény általi képe)

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér. Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény és $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ egy nemüres affin résztér, akkor $f(\mathcal{Z}) = \{f(M) \in \mathcal{Y} \mid M \in \mathcal{Z}\}$ az \mathcal{Y} tér affin résztere és az iránytere $\overrightarrow{f(\mathcal{Z})} = \vec{f}(\vec{\mathcal{Z}})$.

Első bizonyítás. Belátjuk, hogy az $f(\mathcal{Z})$ képhalmaz zárt az affin kombinációra nézve. Legyenek $B_1, \dots, B_n \in f(\mathcal{Z})$ tetszőleges pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ tetszőleges affin súlyok. Ekkor léteznek $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{Z}$ pontok úgy, hogy $B_1 = f(A_1), \dots, B_n = f(A_n)$, és

$$\lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_n B_n = \lambda_1 f(A_1) + \cdots + \lambda_n f(A_n) \stackrel{(*)}{=} f(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n) \in f(\mathcal{Z}),$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben alkalmaztuk a 6.11. Tételt az f affin függvényre.

Ha $O \in \mathcal{Z}$ egy rögzített pont, akkor minden $v \in \vec{\mathcal{Z}}$ vektor esetén létezik egyetlen $M \in \mathcal{Z}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM}$. Mivel f affin függvény, ezért

$$\vec{f}(v) = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} \in \overrightarrow{f(\mathcal{Z})},$$

mert $f(O), f(M) \in f(\mathcal{Z})$. Tehát $\vec{f}(\vec{\mathcal{Z}}) \subseteq \overrightarrow{f(\mathcal{Z})}$. Minden $w \in \overrightarrow{f(\mathcal{Z})}$ esetén létezik $M \in \mathcal{Z}$ úgy, hogy $w = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$, ahonnan $w \in \vec{f}(\vec{\mathcal{Z}})$, ezért $\overrightarrow{f(\mathcal{Z})} \subseteq \vec{f}(\vec{\mathcal{Z}})$. A kétoldali bennfoglalás miatt $\overrightarrow{f(\mathcal{Z})} = \vec{f}(\vec{\mathcal{Z}})$. \square

Második bizonyítás. Ha $O \in \mathcal{Z}$ egy rögzített pont, akkor a 3.3. Tulajdonság alapján $\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Z}}, O)$. A (6.8) kommutatív diagram alapján $f \circ t(-, O) = t(-, f(O)) \circ \vec{f}$, ahonnan

$$f(\mathcal{Z}) = f(t(\vec{\mathcal{Z}}, O)) = [f \circ t(-, O)](\vec{\mathcal{Z}}) = [t(-, f(O)) \circ \vec{f}](\vec{\mathcal{Z}}) = t(\vec{f}(\vec{\mathcal{Z}}), f(O)).$$

Mivel az \vec{f} nyom lineáris és $\vec{\mathcal{Z}}$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris altere, ezért $\vec{f}(\vec{\mathcal{Z}})$ az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér lineáris egy altere és a 3.3. Tulajdonság alapján $f(\mathcal{Z}) = t(\vec{f}(\vec{\mathcal{Z}}), f(O))$ az \mathcal{Y} egy affin résztere, melynek iránytere $\overrightarrow{f(\mathcal{Z})} = \vec{f}(\vec{\mathcal{Z}})$. \square

6.2.5. Affin részterek affin függvény általi ősképe

Lineáris altér lineáris függvény általi ősképe lineáris altér. Hasonlóan, affin résztér affin függvény általi ősképe is affin résztér. Ha az őskép nem üres, akkor az őskép iránytere megegyezik az iránytér nyom általi ősképpével.

6.20. Tulajdonság (Affin résztér affin függvény általi ősképe)

Legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} két, \mathbb{K} test feletti affin tér. Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény és $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ egy affin résztér, akkor

$$f^{-1}(\mathcal{Z}) = \{M \in \mathcal{X} \mid f(M) \in \mathcal{Z}\} \subseteq \mathcal{X}$$

őskép is affin résztér. Ha $f^{-1}(\mathcal{Z})$ nem üres, akkor az iránytere $\overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Z})} = (\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}})$.

Első bizonyítás. Ha $f^{-1}(\mathcal{Z}) = \emptyset$, akkor értelmezés szerint az \mathcal{X} affin résztere. Tegyük fel, hogy $f^{-1}(\mathcal{Z}) \neq \emptyset$. Belátjuk, hogy $f^{-1}(\mathcal{Z})$ zárt az affin kombinációra. Tekintsünk tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyokat és tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in f^{-1}(\mathcal{Z})$ pontokat. Ekkor $f(A_1), \dots, f(A_n) \in \mathcal{Z}$, és mivel \mathcal{Z} affin résztér, így zárt az affin kombinációra, tehát $\lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n) \in \mathcal{Z}$. Felhasználva, hogy az f függvény affin, így a 6.11. Tétel alapján felcserélhető az affin kombinációval, ezért

$$f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) = \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n) \in \mathcal{Z},$$

ahonnan $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n \in f^{-1}(\mathcal{Z})$. Tehát $f^{-1}(\mathcal{Z})$ zárt az affin kombinációra, ezért a 3.15. Tétel alapján $f^{-1}(\mathcal{Z})$ affin résztér \mathcal{X} -nek.

Mivel $f(f^{-1}(\mathcal{Z})) \subseteq \mathcal{Z}$, ezért a 6.19. Tulajdonság alapján $\vec{f}(\overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Z})}) \subseteq \vec{\mathcal{Z}}$, ahonnan $\overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Z})} \subseteq (\vec{f})^{-1}\vec{\mathcal{Z}}$. Legyen $O \in f^{-1}(\mathcal{Z})$ az őskép egy rögzített pontja. Ha $v \in (\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}})$, akkor $\vec{f}(v) \in \vec{\mathcal{Z}}$ és létezik egyetlen $M \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM}$. Mivel $\vec{f}(v) = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} \in \vec{\mathcal{Z}}$ és $f(O)$ a \mathcal{Z} affin résztér pontja, ezért $f(M) \in \mathcal{Z}$, azaz $M \in f^{-1}(\mathcal{Z})$. Ezek alapján $v = \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Z})}$, mert O és M az $f^{-1}(\mathcal{Z})$ affin résztér pontjai. Tehát $(\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}}) \subseteq \overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Z})}$. \square

Második bizonyítás. Ha $f^{-1}(\mathcal{Z})$ üres, akkor nincs mit bizonyítani, ezért tegyük fel, hogy nem üres. Legyen $O \in f^{-1}(\mathcal{Z})$ egy rögzített pont. A (6.7) kommutatív diagram alapján $f = \varphi(f(O), -)^{-1} \circ \vec{f} \circ \varphi(O, -) = t(-, f(O)) \circ \vec{f} \circ \varphi(O, -)$. Ekkor

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{Z}) &= [t(-, f(O)) \circ \vec{f} \circ \varphi(O, -)]^{-1}(\mathcal{Z}) = [\vec{f} \circ \varphi(O, -)]^{-1}(t(-, f(O))^{-1}(\mathcal{Z})) \\ &= [\vec{f} \circ \varphi(O, -)]^{-1}(\varphi(f(O), -)(\mathcal{Z})) = [\vec{f} \circ \varphi(O, -)]^{-1}(\varphi(f(O), \mathcal{Z})) \\ &\stackrel{(*)}{=} [\vec{f} \circ \varphi(O, -)]^{-1}(\vec{\mathcal{Z}}) = [\varphi(O, -)]^{-1}((\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}})) = t(-, O)((\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}})) \\ &= t((\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}}), O), \end{aligned}$$

ahol a (*) egyenlőségben felhasználtuk, hogy $\vec{\mathcal{Z}} = \varphi(f(O), \mathcal{Z}) = \{\overrightarrow{f(O)M} \mid M \in \mathcal{Z}\}$ a (3.2) alapján. Mivel az \vec{f} függvény lineáris és $\vec{\mathcal{Z}}$ az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy lineáris altere, ezért $(\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris altere. Tehát a 3.3. Tulajdonság alapján $f^{-1}(\mathcal{Z}) = t((\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}}), O)$ az \mathcal{X} egy affin résztere, amelynek iránytere $\overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Z})} = (\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Z}})$. \square

6.2.6. Affin függvény megőrzi a párhuzamosságot

Párhuzamos affin résztekek affin függvény általi képei, illetve ősképei is párhuzamosak.

6.21. Tulajdonság

- (i) Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény és $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}$ nemüres párhuzamos affin résztekek, vagyis $\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2$, akkor a képek is párhuzamos affin résztekek, $f(\mathcal{X}_1) \parallel f(\mathcal{X}_2)$.

- (ii) Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény és $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subseteq \mathcal{Y}$ olyan affin részterek, amelyekre fennáll, hogy $\mathcal{Y}_1 \parallel \mathcal{Y}_2$ és $f^{-1}(\mathcal{Y}_1), f^{-1}(\mathcal{Y}_2) \neq \emptyset$, akkor az ősképek is párhuzamosak, $f^{-1}(\mathcal{Y}_1) \parallel f^{-1}(\mathcal{Y}_2)$.

Bizonyítás.

- (i) Értelmezés szerint $\mathcal{X}_1 \parallel \mathcal{X}_2$ pontosan akkor, ha $\vec{\mathcal{X}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{X}}_2$ vagy $\vec{\mathcal{X}}_2 \subseteq \vec{\mathcal{X}}_1$. Tegyük fel, hogy $\vec{\mathcal{X}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{X}}_2$. Ekkor a 6.19. Tulajdonság alapján

$$\overrightarrow{f(\mathcal{X}_1)} = \vec{f}(\vec{\mathcal{X}}_1) \subseteq \vec{f}(\vec{\mathcal{X}}_2) = \overrightarrow{f(\mathcal{X}_2)},$$

tehát $f(\mathcal{X}_1) \parallel f(\mathcal{X}_2)$.

- (ii) Értelmezés szerint $\mathcal{Y}_1 \parallel \mathcal{Y}_2$ pontosan akkor, ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2$ vagy $\vec{\mathcal{Y}}_2 \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_1$. Tegyük fel, hogy $\vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_2$. Ekkor a 6.20. Tulajdonság alapján

$$\overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Y}_1)} = (\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Y}}_1) \subseteq (\vec{f})^{-1}(\vec{\mathcal{Y}}_2) = \overrightarrow{f^{-1}(\mathcal{Y}_2)},$$

tehát $f^{-1}(\mathcal{Y}_1) \parallel f^{-1}(\mathcal{Y}_2)$. □

6.3. Affin függvények egyenlete

6.3.1. Lineáris algebrai kitérő: lineáris függvény mátrixa

Legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ a \mathcal{V} , illetve \mathbf{C} a \mathcal{W} \mathbb{K} -vektortér egy bázisa. Legyen $h: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ egy lineáris függvény. Ha ismertek a $v \in \mathcal{V}$ vektor koordinátái a \mathbf{B} bázisban, akkor a $h(v) \in \mathcal{W}$ vektor koordinátáit a \mathbf{C} bázisban a következőképpen számolhatjuk ki:

$$[h(v)]_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [h(\beta_1)]_{\mathbf{C}} & \dots & [h(\beta_m)]_{\mathbf{C}} \end{bmatrix}}_{[h]_{\mathbf{CB}}} [v]_{\mathbf{B}} \iff [h(v)]_{\mathbf{C}} = [h]_{\mathbf{CB}} [v]_{\mathbf{B}}. \quad (6.23)$$

A $[h]_{\mathbf{CB}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ mátrixot a h lineáris függvény \mathbf{B} , illetve \mathbf{C} bázisokban vett mátrixának nevezzük, ahol $m = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ és $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ és $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, akkor használjuk az $[f]_{\mathbf{B}} = [f]_{\mathbf{BB}}$ jelölést.

Ha \mathcal{U} egy harmadik \mathbb{K} -vektortér, amelynek egy bázisa \mathbf{A} , és $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ egy lineáris függvény, akkor az összetett függvény mátrixa egyenlő a függvények mátrixainak szorzatával, vagyis $[h \circ g]_{\mathbf{CA}} = [h]_{\mathbf{CB}} [g]_{\mathbf{BA}}$. Mivel az identikus függvény mátrixa ugyanabban a bázisban az identikus mátrix, $[1_{\mathcal{V}}]_{\mathbf{B}} = I_m$, ezért ha h invertálható, akkor az inverz függvény mátrixa egyenlő a függvény mátrixának inverzével, vagyis $[h^{-1}]_{\mathbf{BC}} = ([h]_{\mathbf{CB}})^{-1}$.

Ha \mathbf{B}' a \mathcal{V} , illetve \mathbf{C}' a \mathcal{W} vektortér egy újabb bázisa, akkor a h függvény mátrixát ezekbe az újabb bázisokban a következőképpen írhatjuk át:

$$[h]_{\mathbf{C}'\mathbf{B}'} = T_{\mathbf{C}'\mathbf{C}} [h]_{\mathbf{CB}} T_{\mathbf{BB}'}, \quad (6.24)$$

ahol $T_{\mathbf{C}'\mathbf{C}}$ és $T_{\mathbf{BB}'}$ az áttérési mátrixok. Sajátosan, az áttérési mátrix megegyezik az identikus függvény mátrixával, azaz $T_{\mathbf{BB}'} = [1_{\mathcal{V}}]_{\mathbf{BB}'}$.

6.3.2. Affin függvény egyenlete affin koordináta-rendszerben

A lineáris függvényhez hasonlóan egy affin függvény is leírható egy mátrix segítségével affin koordináta-rendszerben.

6.22. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_m)$ az \mathcal{X} , illetve $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ az \mathcal{Y} affin tér egy affin koordináta-rendszere. Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény és $f(A_i)(b_{i0}, \dots, b_{in})_{\mathcal{B}}$, minden $i = 0, \dots, m$ esetén, akkor minden $M \in \mathcal{X}$ pontra

$$[f(M)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{10} & \dots & b_{m0} \\ b_{01} & b_{11} & \dots & b_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{0n} & b_{1n} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \cdot [M]_{\mathcal{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [f(A_0)]_{\mathcal{B}} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}}_{[f]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}} \cdot [M]_{\mathcal{A}}. \quad (6.25)$$

Bizonyítás. Mivel $f(A_i)(b_{i0}, \dots, b_{in})_{\mathcal{B}}$, ezért $f(A_i) = b_{i0}B_0 + \dots + b_{in}B_n$. Ha $M(\mu_0, \dots, \mu_m)_{\mathcal{A}} \in \mathcal{X}$, akkor $M = \mu_0A_0 + \dots + \mu_mA_m$, továbbá a 6.11. Tétel alapján

$$f(M) = f\left(\sum_{i=0}^m \mu_i A_i\right) = \sum_{i=0}^m \mu_i f(A_i) = \sum_{i=0}^m \mu_i \sum_{j=0}^n b_{ij} B_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m b_{ij} \mu_i B_j,$$

ahonnan az $f(M)$ baricentrikus koordinátái $(\sum_{i=0}^m b_{i0}\mu_i, \dots, \sum_{i=0}^m b_{in}\mu_i)$. Ezt átírva mátrix alakba visszkapjuk a tulajdonságban szereplő formulát. \square

Az $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} [f(A_0)]_{\mathcal{B}} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ mátrixot az f függvény \mathcal{A} és \mathcal{B} affin koordináta-rendszerekben vett *mátrixának* nevezzük. Figyeljük meg a hasonlóságot a lineáris függvény mátrixával. Ha $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ és $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, akkor használjuk az $[f]_{\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ jelölést.

Az affin függvény mátrixa esetén is teljesülnek a lineáris függvény mátrixához hasonló relációk. Ha \mathcal{Z} egy harmadik \mathbb{K} -feletti affin tér, amelynek \mathcal{C} egy affin koordináta-rendszere, illetve $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ egy újabb affin függvény, akkor az összetett függvény mátrixa egyenlő a függvények mátrixainak szorzatával, vagyis $[g \circ f]_{\mathcal{C}\mathcal{A}} = [g]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$. Mivel az identikus függvény mátrixa az identikus mátrix, vagyis $[1_{\mathcal{X}}]_{\mathcal{A}} = I_{m+1}$, ezért ha f invertálható, akkor az inverz függvény mátrixa egyenlő a függvény mátrixának inverzével, vagyis $[f^{-1}]_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = ([f]_{\mathcal{B}\mathcal{A}})^{-1}$.

Ha \mathcal{A}' az \mathcal{X} , illetve \mathcal{B}' az \mathcal{Y} affin tér egy újabb affin koordináta-rendszere, akkor az f függvény mátrixát ezekbe az újabb koordináta-rendszerekbe a következőképpen írhatjuk fel:

$$[f]_{\mathcal{B}'\mathcal{A}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}. \quad (6.26)$$

Sajátosan, az áttérési mátrix megegyezik az identikus függvény mátrixával, azaz $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}'} = [1_{\mathcal{X}}]_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$.

6.23. Példa

Legyen \mathcal{X} egy két dimenziós valós affin tér (sík), amelynek $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2)$ egy affin koordináta-rendszere. Tehát A_0, A_1, A_2 három nem kollineáris pont a síkban. Legyen $B_0 = \beta_0 A_1 + (1 - \beta_0) A_2$, $B_1 = \beta_1 A_2 + (1 - \beta_1) A_0$, illetve $B_2 = \beta_2 A_0 + (1 - \beta_2) A_1$ egy-egy pont az $A_1 A_2$, $A_2 A_0$ és $A_0 A_1$ egyeneseken, továbbá legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ azon affin függvény, amelyre $f(A_0) = B_0$, $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$. Ekkor az f függvény mátrixa az \mathcal{A} affin koordináta-rendszerben

$$[f]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} [f(A_0)]_{\mathcal{A}} & [f(A_1)]_{\mathcal{A}} & [f(A_2)]_{\mathcal{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_0 & 0 & 1 - \beta_2 \\ 1 - \beta_0 & \beta_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \diamond$$

6.3.3. Affin függvény egyenlete Descartes-féle koordináta-rendszerben

Mivel leggyakrabban a pontok koordinátáit Descartes-féle koordináta-rendszerben írjuk fel, így az affin függvény egyenletét is Descartes-féle koordináta-rendszerben szoktuk általában felírni.

6.24. Tétel

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} , illetve $\mathcal{S} = (Q; \mathbf{C})$ az \mathcal{Y} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$, illetve \mathbf{C} az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa. Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény, akkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$[f(M)]_{\mathcal{S}} = [\vec{f}]_{\mathbf{CB}} \cdot [M]_{\mathcal{R}} + [f(O)]_{\mathcal{S}}. \quad (6.27)$$

Bizonyítás. Felírjuk, hogy az $f(M)$ pont koordinátái az \mathcal{S} Descartes-féle koordináta-rendszerben megegyeznek a $\overrightarrow{Qf(M)}$ vektor koordinátaival a \mathbf{C} bázisban, majd alkalmazzuk az \vec{f} lineáris függvény mátrixára a (6.24) képletet:

$$\begin{aligned} [f(M)]_{\mathcal{S}} &= [\overrightarrow{Qf(M)}]_{\mathbf{C}} = [\overrightarrow{Qf(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)}]_{\mathbf{C}} = [\overrightarrow{Qf(O)}]_{\mathbf{C}} + [\overrightarrow{f(O)f(M)}]_{\mathbf{C}} = \\ &= [f(O)]_{\mathcal{S}} + [\vec{f}(\overrightarrow{OM})]_{\mathbf{C}} = [f(O)]_{\mathcal{S}} + [\vec{f}]_{\mathbf{CB}} \cdot [\overrightarrow{OM}]_{\mathbf{B}} = [f(O)]_{\mathcal{S}} + [\vec{f}]_{\mathbf{CB}} \cdot [M]_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

□

6.25. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az m -dimenziós \mathcal{X} , illetve $\mathcal{S} = (Q; \mathbf{C})$ az n -dimenziós \mathcal{Y} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$, illetve \mathbf{C} az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa. Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy olyan függvény, hogy minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$[f(M)]_{\mathcal{S}} = \alpha \cdot [M]_{\mathcal{R}} + \beta,$$

ahol $\alpha \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ egy $(n \times m)$ -es mátrix és $\beta \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ egy $(n \times 1)$ -es oszlop mátrix, akkor az f függvény affin, és a nyomának mátrixa a \mathbf{B} és \mathbf{C} bázisokban $[\vec{f}]_{\mathbf{CB}} = \alpha$.

Bizonyítás. Tetszőleges $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{X}$ pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ affin súlyok esetén

$$\begin{aligned} [f(\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k)]_{\mathcal{S}} &= \alpha \cdot [\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k]_{\mathcal{R}} + \beta \\ &= \alpha \cdot (\lambda_1 [M_1]_{\mathcal{R}} + \dots + \lambda_k [M_k]_{\mathcal{R}}) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \beta \\ &= \lambda_1 (\alpha \cdot [M_1]_{\mathcal{R}} + \beta) + \dots + \lambda_k (\alpha \cdot [M_k]_{\mathcal{R}} + \beta) \\ &= \lambda_1 [f(M_1)]_{\mathcal{S}} + \dots + \lambda_k [f(M_k)]_{\mathcal{S}}, \\ &= [\lambda_1 f(M_1) + \dots + \lambda_k f(M_k)]_{\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

tehát $f(\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k) = \lambda_1 f(M_1) + \dots + \lambda_k f(M_k)$, vagyis f felcserélhető az affin kombinációval, ezért f affin.

Végül, minden $\overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén

$$\begin{aligned} [\vec{f}(\overrightarrow{OM})]_{\mathbf{C}} &= [\overrightarrow{f(O)f(M)}]_{\mathbf{C}} = [f(M)]_{\mathcal{S}} - [f(O)]_{\mathcal{S}} \\ &= (\alpha \cdot [M]_{\mathcal{R}} + \beta) - (\alpha \cdot [O]_{\mathcal{R}} + \beta) = \alpha([M]_{\mathcal{R}} - [O]_{\mathcal{R}}) = \alpha[\overrightarrow{OM}]_{\mathbf{B}}, \end{aligned}$$

ahonnan $[\vec{f}]_{\mathbf{CB}} = \alpha$.

□

6.26. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer a 2-dimenziós \mathcal{X} affin térben, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa.

- (i) A $v(v_1, v_2)_{\mathbf{B}}$ vektorral való $t(v, -)$ eltolás egyenlete az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$[t(v, M)]_{\mathcal{R}} = [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{[t(v, M)]_{\mathcal{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = x_1 + v_1 \\ y_2 = x_2 + v_2 \end{cases}.$$

- (ii) A $Q(q_1, q_2)_{\mathcal{R}}$ pont körüli θ szöggel való $Rot_{Q, \theta}$ forgatás egyenlete

$$\begin{aligned} [Rot_{Q, \theta}(M)]_{\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot ([M]_{\mathcal{R}} - [Q]_{\mathcal{R}}) + [Q]_{\mathcal{R}} \\ \iff \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{[Rot_{Q, \theta}(M)]_{\mathcal{R}}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

6.3.4. Kapcsolat az affin és Descartes-féle koordináta-rendszerben felírt egyenletek között

6.3.4.1. Affin koordináta-rendszerbeli egyenlet átírása Descartes-féle koordináta-rendszerbeli egyenletté

A 4.4.1. alfejezetben az \mathcal{X} affin tér egy $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$ affin koordináta-rendszeréből megszerkesztettük az $\mathcal{R} = (A_0; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszerét, ahol $\mathbf{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_m})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Legyen \mathcal{Y} egy újabb affin tér, amelynek egy $\mathcal{A}' = (A'_0, A'_1, \dots, A'_n)$ affin koordináta-rendszeréből hasonló módon megszerkesztjük az $\mathcal{R}' = (A'_0; \mathbf{B}')$ Descartes-féle koordináta-rendszert. Ha ismert az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény $[f(M)]_{\mathcal{A}'} = [f]_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}[M]_{\mathcal{A}}$ egyenlete az \mathcal{A} és \mathcal{A}' affin koordináta-rendszerekben, akkor az f függvény $[f(M)]_{\mathcal{R}'} = [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}[M]_{\mathcal{R}} + [f(A_0)]_{\mathcal{R}'}$ egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben a következőképpen írható fel. Az

$$[f]_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} [f(A_0)]_{\mathcal{A}'} & [f(A_1)]_{\mathcal{A}'} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{A}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{m0} \\ \textcolor{red}{a}_{01} & \textcolor{blue}{a}_{11} & \dots & \textcolor{blue}{a}_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \textcolor{red}{a}_{0n} & \textcolor{blue}{a}_{1n} & \dots & \textcolor{blue}{a}_{mn} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

mátrix oszlopai az $f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_m)$ pontok \mathcal{A}' koordináta-rendszerbeli baricentrikus koordinátáit tartalmazzák, így ha elhagyjuk a mátrix első sorát, akkor a kapott

$$\begin{bmatrix} [f(A_0)]_{\mathcal{R}'} & [f(A_1)]_{\mathcal{R}'} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{R}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_{01} & \textcolor{blue}{a}_{11} & \dots & \textcolor{blue}{a}_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \textcolor{red}{a}_{0n} & \textcolor{blue}{a}_{1n} & \dots & \textcolor{blue}{a}_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix oszlopai az $f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_m)$ pontok \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti koordinátáit tartalmazzák. Az így kapott mátrix első oszlopa az $[f(A_0)]_{\mathcal{R}'}$ koordináta-mátrix

elemeiből áll, amely a Descartes-féle koordináta-rendszerbeli egyenlet szabadtagja. A (4.3) alapján a kapott mátrix első oszlopát levonva a többi oszlopból, majd elhagyva az első oszlopot, megkapjuk a nyom mátrixát

$$\begin{aligned}
 [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} [\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_1})]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_m})]_{\mathbf{B}'} \\ [\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_1})]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_m})]_{\mathbf{B}'} \\ [f(A_1)]_{\mathcal{R}'} - [f(A_0)]_{\mathcal{R}'} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{R}'} - [f(A_0)]_{\mathcal{R}'} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} [f(A_0)f(A_1)]_{\mathbf{B}'} & \dots & [f(A_0)f(A_m)]_{\mathbf{B}'} \\ [f(A_1)]_{\mathcal{R}'} - [f(A_0)]_{\mathcal{R}'} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{R}'} - [f(A_0)]_{\mathcal{R}'} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} - a_{01} & \dots & a_{m1} - a_{01} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} - a_{0n} & \dots & a_{mn} - a_{0n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Összegezve, a (6.28) mátrixból felírható az f függvény egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' koordináta-rendszerben:

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{01} & \dots & a_{m1} - a_{01} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} - a_{0n} & \dots & a_{mn} - a_{0n} \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

6.27. Példa

Legyen $\mathcal{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ a 3-dimenziós \mathcal{X} , illetve $\mathcal{A}' = (A'_0, A'_1, A'_2)$ a 2-dimenziós \mathcal{Y} valós affin tér egy affin koordináta-rendszere. Legyen $\mathcal{R} = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3})$, illetve $\mathcal{R}' = (A'_0; \overrightarrow{A'_0A'_1}, \overrightarrow{A'_0A'_2})$ az \mathcal{A} , illetve \mathcal{A}' affin koordináta-rendszerhez rendelt Descartes-féle koordináta-rendszer. Ha egy $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény egyenlete az \mathcal{A} és \mathcal{A}' affin koordináta-rendszerekben

$$[f(M)]_{\mathcal{A}'} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & -6 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{A}},$$

akkor az f egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben

$$\begin{aligned}
 [f(M)]_{\mathcal{R}'} &= \begin{bmatrix} 4 - 2 & -1 - 2 & 0 - 2 \\ 3 - (-1) & 5 - (-1) & -6 - (-1) \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 \iff [f(M)]_{\mathcal{R}'} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & -5 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

◇

6.3.4.2. Descartes-féle koordináta-rendszerbeli egyenlet átírása affin koordináta-rendszerbeli egyenletté

A 4.4.2. alfejezetben az \mathcal{X} m -dimenziós affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \dots, \beta_m)$ Descartes-féle koordináta-rendszeréből megszerkesztettük az $\mathcal{A} = (O, A_1 = t(\beta_1, O), \dots, A_m = t(\beta_m, O))$ affin koordináta-rendszerét. Legyen \mathcal{Y} egy n -dimenziós affin tér, amelynek $\mathcal{R}' = (O'; \beta'_1, \dots, \beta'_n)$ Descartes-féle koordináta-rendszeréből hasonló módon megszerkesztjük az $\mathcal{A}' = (O', A'_1 = t(\beta'_1, O'), \dots, A'_n = t(\beta'_n, O'))$ affin koordináta-rendszerét. Ha ismert egy $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény $[f(M)]_{\mathcal{R}'} = [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}[M]_{\mathcal{R}} + [f(O)]_{\mathcal{R}'}$ egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben, akkor az

f függvény $[f(M)]_{\mathcal{R}'} = [f]_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}[M]_{\mathcal{A}}$ egyenlete az \mathcal{A} és \mathcal{A}' affin koordináta-rendszerekben a következőképpen írható fel. Az

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{[\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}} [M]_{\mathcal{A}} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

egyenletben a szabadtag az $[f(O)]_{\mathcal{R}'}$ koordináta-mátrix, míg az

$$[\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} [\vec{f}(\overrightarrow{OA_1})]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\vec{f}(\overrightarrow{OA_m})]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(A_1)]_{\mathcal{R}'} - [f(O)]_{\mathcal{R}'} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{R}'} - [f(O)]_{\mathcal{R}'} \end{bmatrix}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$[f(O)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad [f(A_1)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad [f(A_m)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} b_{1m} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Az $[f]_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}$ mátrix oszlopaiba az $[f(O)]_{\mathcal{A}'}, [f(A_1)]_{\mathcal{A}'}, \dots, [f(A_m)]_{\mathcal{A}'}$ affin koordináta-mátrixok elemei kerülnek, amelyeket az $[f(O)]_{\mathcal{R}'}, [f(A_1)]_{\mathcal{R}'}, \dots, [f(A_m)]_{\mathcal{R}'}$ Descartes-féle koordinátra-mátrixokból úgy kapunk, hogy az első helyre olyan értéket írunk, hogy az oszlopban az összeg 1 legyen. Tehát a (6.30) egyenletből felírható a függvény affin koordináta-rendszerbeli egyenlete:

$$[f(M)]_{\mathcal{A}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n c_i & 1 - \sum_{i=1}^n (b_{i1} + c_i) & \dots & 1 - \sum_{i=1}^n (b_{im} + c_i) \\ c_1 & b_{11} + c_1 & \dots & b_{1m} + c_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & b_{n1} + c_n & \dots & b_{nm} + c_n \end{bmatrix}}_{[f]_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}} [M]_{\mathcal{A}}. \quad (6.31)$$

6.28. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ a 3-dimenziós \mathcal{X} , illetve $\mathcal{R}' = (O; \beta'_1, \beta'_2)$ a 2-dimenziós \mathcal{Y} valós affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Legyen $\mathcal{A} = (O, t(\beta_1, O), t(\beta_2, O), t(\beta_3, O))$ az \mathcal{R} , illetve $\mathcal{A}' = (O', t(\beta'_1, O'), t(\beta'_2, O'))$ az \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt affin koordináta-rendszer. Ha egy $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & -5 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

akkor az f egyenlete az \mathcal{A} és \mathcal{A}' affin koordináta-rendszerekben

$$\begin{aligned} & [f(M)]_{\mathcal{A}'} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 - (2 - 1) & 1 - (2 + 2) - (4 - 1) & 1 - (-3 + 2) - (6 - 1) & 1 - (-2 + 2) - (-5 - 1) \\ 2 & 2 + 2 & -3 + 2 & -2 + 2 \\ -1 & 4 + (-1) & 6 + (-1) & -5 + (-1) \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{A}} \\ & \iff [f(M)]_{\mathcal{A}'} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & -6 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

◇

6.3.4.3. Affin koordináta-rendszerrel adott függvény egyenlete

Legyen \mathcal{R} az \mathcal{X} , illetve \mathcal{R}' az \mathcal{Y} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. A 6.14. Tulajdonságban igazoltuk, hogy ha $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$ az \mathcal{X} egy affin koordináta-rendszere és $B_0, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{Y}$ tetszőleges pontok, akkor létezik egyetlen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény úgy, hogy $f(A_i) = B_i$, minden $i = 0, 1, \dots, m$ esetén. Feltételezzük, hogy ismertek a pontok Descartes-féle koordinátái, vagyis ismertek az $[A_0]_{\mathcal{R}}, [A_1]_{\mathcal{R}}, \dots, [A_m]_{\mathcal{R}}$, illetve $[B_0]_{\mathcal{R}'}, [B_1]_{\mathcal{R}'}, \dots, [B_m]_{\mathcal{R}'}$ koordináta-mátrixok. Célunk, hogy felírjuk az f függvény egyenletét az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben.

Két módszert mutatunk az egyenlet felírására. Az első módszer szerint előbb felírjuk a függvény egyenletét a Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt affin koordináta-rendszerekben. A 4.34. Tulajdonság szerint legyen \mathcal{B} az \mathcal{R} , illetve \mathcal{B}' az \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt affin koordináta-rendszer. Az $[A_0]_{\mathcal{R}}, [A_1]_{\mathcal{R}}, \dots, [A_m]_{\mathcal{R}}$, illetve $[B_0]_{\mathcal{R}'}, [B_1]_{\mathcal{R}'}, \dots, [B_m]_{\mathcal{R}'}$ koordináta-mátrixok könnyen átírhatók a \mathcal{B} , illetve \mathcal{B}' affin koordináta-rendszerbe, mivel az első helyre olyan értéket kell beszúrni, hogy a oszlopmátrix elemeinek összege 1 legyen. Ekkor a (6.26) áttérési képlet szerint

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} &= [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{A}} T_{\mathcal{B}\mathcal{A}}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [f(A_0)]_{\mathcal{B}'} & [f(A_1)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [f(A_m)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_0]_{\mathcal{B}} & [A_1]_{\mathcal{B}} & \dots & [A_m]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [B_0]_{\mathcal{B}'} & [B_1]_{\mathcal{B}'} & \dots & [B_m]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_0]_{\mathcal{B}} & [A_1]_{\mathcal{B}} & \dots & [A_m]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ezután a 6.3.4.1. alfejezetben tárgyalt módon felírhatjuk a függvény egyenletét a Descartes-féle koordináta-rendszerekben.

6.29. Példa

Legyen \mathcal{R} az \mathcal{X} , illetve \mathcal{R}' az \mathcal{Y} valós affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Legyenek $A_0(4, -2)_{\mathcal{R}}$, $A_1(2, 1)_{\mathcal{R}}$, $A_2(1, 3)_{\mathcal{R}}$ pontok az \mathcal{X} térből és $B_0(1, 2, 3)_{\mathcal{R}'}$, $B_1(2, 1, -1)_{\mathcal{R}'}$, $B_2(-3, 0, 1)_{\mathcal{R}'}$ pontok az \mathcal{Y} térből. Ekkor létezik egyetlen olyan $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény, amelyre $f(A_0) = B_0$, $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$, és a következőképpen írhatjuk fel az egyenletét.

Az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt \mathcal{B} affin koordináta-rendszerben írhatjuk, hogy $A_0(-1, 4, -2)_{\mathcal{B}}$, $A_1(-2, 2, 1)_{\mathcal{B}}$, $A_2(-3, 1, 3)_{\mathcal{B}}$, illetve az \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerhez rendelt \mathcal{B}' affin koordináta-rendszerben pedig $B_0(-5, 1, 2, 3)_{\mathcal{B}'}$, $B_1(-1, 2, 1, -1)_{\mathcal{B}'}$, $B_2(3, -3, 0, 1)_{\mathcal{B}'}$. A (6.32) alapján

$$[f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & -9 & -9 \\ 47 & 30 & 36 \\ 4 & 3 & 3 \\ -37 & -23 & -29 \end{bmatrix}.$$

A 6.3.4.1. alfejezet alapján ebből felírhatjuk az f függvény egyenletét az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben:

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 30 - 47 & 36 - 47 \\ 3 - 4 & 3 - 4 \\ -23 - (-37) & -29 - (-37) \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 47 \\ 4 \\ -37 \end{bmatrix}$$

$$\iff [f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} -17 & -11 \\ -1 & -1 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 47 \\ 4 \\ -37 \end{bmatrix}.$$

Az f függvény egyenletének helyessége ellenőrizhető azáltal, hogy az f egyenletébe behelyettesítjük az A_i pontok koordinátáit és visszakapjuk a B_i pontok koordinátáit, minden $i = 0, 1, 2$ esetén. \diamond

A második módszerben csak Descartes-féle koordináta-rendszerekkel fogunk dolgozni. A Descartes-féle koordináta-rendszerek felírhatók $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ és $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ alakba, ahol $O \in \mathcal{X}$, $O' \in \mathcal{Y}$, és \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$, illetve \mathbf{B}' az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa. Legyen $\mathcal{S} = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_m})$ az $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_m)$ affin koordináta-rendszerhez rendelt Descartes-féle koordináta-rendszer és jelölje $\mathbf{A} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_m})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér \mathcal{S} koordináta-rendszernek megfelelő bázisát.

Először felírjuk a függvény nyomának mátrixát a \mathbf{B} és \mathbf{B}' bázisokban.

$$\begin{aligned} [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} &= [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{A}} T_{\mathbf{AB}} = [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{A}} T_{\mathbf{BA}}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_1})]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\vec{f}(\overrightarrow{A_0A_m})]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{A_0A_1}]_{\mathbf{B}} & \dots & [\overrightarrow{A_0A_m}]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [f(A_0)f(A_1)]_{\mathbf{B}'} & \dots & [f(A_0)f(A_m)]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{A_0A_1}]_{\mathbf{B}} & \dots & [\overrightarrow{A_0A_m}]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [\overrightarrow{B_0B_1}]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\overrightarrow{B_0B_m}]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\overrightarrow{A_0A_1}]_{\mathbf{B}} & \dots & [\overrightarrow{A_0A_m}]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [B_1]_{\mathcal{R}'} - [B_0]_{\mathcal{R}'} & \dots & [B_m]_{\mathcal{R}'} - [B_0]_{\mathcal{R}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_1]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} & \dots & [A_m]_{\mathcal{R}} - [A_0]_{\mathcal{R}} \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ismerjük egy pont és képének koordinátáit az \mathcal{R} , illetve \mathcal{R}' koordináta-rendszerekbe, így az $[f(O)]_{\mathcal{R}'}$ koordináta-mátrixot a következőképpen számolhatjuk ki. Mivel ismert $[A_0]_{\mathcal{R}}$ és $[B_0]_{\mathcal{R}'} = [f(A_0)]_{\mathcal{R}'}$, ezért az

$$[f(A_0)]_{\mathcal{R}'} = [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} [A_0]_{\mathcal{R}} + [f(O)]_{\mathcal{R}'}$$

összefüggésből kapjuk, hogy

$$[f(O)]_{\mathcal{R}'} = [f(A_0)]_{\mathcal{R}'} - [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} [A_0]_{\mathcal{R}} = [B_0]_{\mathcal{R}'} - [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} [A_0]_{\mathcal{R}}. \quad (6.34)$$

A (6.33) és (6.34) összefüggésekből felírható az f függvény $[f(M)]_{\mathcal{R}'} = [\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} [M]_{\mathcal{R}} + [f(O)]_{\mathcal{R}'}$ egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' koordináta-rendszerekben.

6.30. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} , illetve $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ az \mathcal{Y} valós affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Legyenek $A_0(4, -2)_{\mathcal{R}}$, $A_1(2, 1)_{\mathcal{R}}$, $A_2(1, 3)_{\mathcal{R}}$ pontok az \mathcal{X} térből és $B_0(1, 2, 3)_{\mathcal{R}'}$, $B_1(2, 1, -1)_{\mathcal{R}'}$, $B_2(-3, 0, 1)_{\mathcal{R}'}$ pontok az \mathcal{Y} térből. Ekkor létezik egyetlen olyan $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény, amelyre $f(A_0) = B_0$, $f(A_1) = B_1$, $f(A_2) = B_2$, és a következőképpen írhatjuk fel az egyenletét.

A (6.33) alapján az f függvény nyomának mátrixa

$$[\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2-1 & -3-1 \\ 1-2 & 0-2 \\ -1-3 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-4 & 1-4 \\ 1-(-2) & 3-(-2) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -11 \\ -1 & -1 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}.$$

A (6.34) alapján az $[f(O)]_{\mathcal{R}'}$ szabadtag:

$$[f(O)]_{\mathcal{R}'} = -[\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}[A_0]_{\mathcal{R}} + [B_0]_{\mathcal{R}'} = - \begin{bmatrix} -17 & -11 \\ -1 & -1 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 4 \\ -37 \end{bmatrix}.$$

Végül az f függvény egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' Descartes-féle koordináta-rendszerekben:

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} -17 & -11 \\ -1 & -1 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 47 \\ 4 \\ -37 \end{bmatrix}.$$

Az f függvény egyenletének helyessége ellenőrizhető azáltal, hogy az f egyenletébe behelyettesítjük az A_i pontok koordinátáit és visszakapjuk a B_i pontok koordinátáit, minden $i = 0, 1, 2$ esetén. \diamond

6.3.5. Affin résztér képezése egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ a \mathbb{K} test feletti \mathcal{X} , illetve $\mathcal{S} = (Q; \mathbf{C})$ a \mathbb{K} test feletti \mathcal{Y} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$, illetve \mathbf{C} az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa.

Legyen $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ nemüres affin résztér, amelynek $P \in \mathcal{Z}$ egy pontja és a \mathcal{Z} iránytere $\vec{\mathcal{Z}} = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, ahol (w_1, \dots, w_k) az iránytér egy bázisa. Ekkor

$$\mathcal{Z} = t(\vec{\mathcal{Z}}, P) = \{t(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k, P) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

és a \mathcal{Z} affin résztér paraméteres egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$[M]_{\mathcal{R}} = [P]_{\mathcal{R}} + \lambda_1[w_1]_{\mathbf{B}} + \dots + \lambda_k[w_k]_{\mathbf{B}}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény, akkor a 6.19. Tulajdonság alapján $f(\mathcal{Z})$ az \mathcal{Y} egy nemüres affin résztere, amelynek $f(P)$ egy pontja és

$$\overrightarrow{f(\mathcal{Z})} = \vec{f}(\vec{\mathcal{Z}}) = \underbrace{\langle \vec{f}(w_1), \dots, \vec{f}(w_k) \rangle}_{\text{generátorrendszer}}$$

az iránytere. Ez alapján

$$f(\mathcal{Z}) = t(\vec{f}(\vec{\mathcal{Z}}), f(P)) = \{t(\lambda_1 \vec{f}(w_1) + \dots + \lambda_k \vec{f}(w_k), f(P)) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

Ha $\vec{f}(w_{i_1}), \dots, \vec{f}(w_{i_r})$ az $\overrightarrow{f(\mathcal{Z})}$ iránytér egy bázisa, akkor az $f(\mathcal{Z})$ paraméteres egyenlete az \mathcal{S} koordináta-rendszerben

$$[N]_{\mathcal{S}} = [f(P)]_{\mathcal{S}} + \lambda_1[\vec{f}(w_{i_1})]_{\mathbf{C}} + \dots + \lambda_r[\vec{f}(w_{i_r})]_{\mathbf{C}}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}. \quad (6.35)$$

6.31. Példa

A $\mathcal{Z}_1 = (1, 2, 3) + \langle (-1, 0, 2), (3, 1, 0) \rangle$ és $\mathcal{Z}_2 = \langle (-1, 0, 2), (3, 1, 0) \rangle$ lineáris varietások

$$f = (f_1, f_2, f_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

függvény általi képét a következőképpen számolhatjuk ki. A $P_1 = (1, 2, 3) \in \mathcal{Z}_1$ pont képe

$$[f(P_1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{ahonnan} \quad f(P) = (6, 11, 3).$$

A $\vec{\mathcal{Z}}_1$ iránytér $w_1 = (-1, 0, 2), w_2 = (3, 1, 0)$ generátorainak nyom általi képe

$$\begin{aligned} [\vec{f}(w_1)]_{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ahonnan} \quad \vec{f}(w_1) = (-4, 13, 2), \\ [\vec{f}(w_2)]_{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ahonnan} \quad \vec{f}(w_2) = (10, -2, 2). \end{aligned}$$

Végül $f(\mathcal{Z}_1) = f(P_1) + \langle \vec{f}(w_1), \vec{f}(w_2) \rangle = (6, 11, 3) + \langle (-4, 13, 2), (10, -2, 2) \rangle$.

Hasonlóan, a $\mathcal{Z}_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$ lineáris varietás esetén $P_2 = (0, 0, 0) \in \mathcal{Z}_2$, amelynek f általi képe

$$[f(P_2)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \text{ahonnan} \quad f(P_2) = (6, -1, -4),$$

ezért $f(\mathcal{Z}_2) = f(P_2) + \langle \vec{f}(w_1), \vec{f}(w_2) \rangle = (6, -1, -4) + \langle (-4, 13, 2), (10, -2, 2) \rangle$. ◇

6.32. Példa

Legyenek $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ és $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ Descartes-féle koordináta-rendszerek a 4-dimenziós \mathcal{X} , illetve a 3-dimenziós \mathcal{Y} valós affin terekben. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény, amelynek egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' koordináta-rendszerekben

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ 6 & 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \cdot [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{X} affin tér egy \mathcal{L} egyenesének egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$\frac{x_1 - 1}{-2} = \frac{x_2 + 2}{0} = \frac{x_3 - 4}{5} = \frac{x_4}{1}.$$

Az egyenes $f(\mathcal{L})$ képének egyenletét a következőképpen számolhatjuk ki. Az \mathcal{L} egyenes egy pontja $P(1, -2, 4, 0)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}$ és az iránytere $\vec{\mathcal{L}} = \langle u(-2, 0, 5, 1)_{\mathbf{B}} \rangle$. Ekkor az $f(\mathcal{L})$ affin résztér

$f(P)$ pontjának koordinátái

$$[f(P)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ 6 & 7 & 8 & -11 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[P]_{\mathcal{R}}} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 17 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Az $\overrightarrow{f(\mathcal{L})}$ iránytér generátorának koordinátái:

$$[\vec{f}(u)]_{\mathbf{B}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ 6 & 7 & 8 & -11 \end{bmatrix}}_{[\vec{f}]_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[u]_{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 24 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $f(\mathcal{L})$ paraméteres egyenlete

$$\begin{cases} y_1 = -14 + 2\lambda \\ y_2 = 17 + 24\lambda \\ y_3 = 20 + 17\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ezek alapján az \mathcal{L} egyenes $f(\mathcal{L})$ képe szintén egy egyenes, amelynek egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben

$$\frac{y_1 + 14}{2} = \frac{y_2 - 17}{24} = \frac{y_3 - 20}{17}.$$

◇

6.33. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ a 4-dimenziós \mathcal{X} , illetve $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ a 3-dimenziós \mathcal{Y} valós affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény, amelynek egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' koordináta-rendszerekben

$$[f(M)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{X} affin tér egy \mathcal{H} hipersíkjának egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4$. Az $f(\mathcal{H})$ képet és egyenletét a következőképpen határozhatjuk meg.

Megoldjuk a \mathcal{H} hipersík egyenletét, ahonnan megkaphatjuk a hipersík egy pontját és a $\vec{\mathcal{H}}$ iránytér generátorait. Legyen x_1 főismeretlen és $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$, $x_4 = \lambda_3$ mellékismeretlenek, ahonnan az egyenlet megoldáshalmaza

$$\begin{aligned} & \{(4 - \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} = \\ & = \{(4, 0, 0, 0) + \lambda_1(-1, 1, 0, 0) + \lambda_2(2, 0, 1, 0) + \lambda_3(-1, 0, 0, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} = \\ & = (4, 0, 0, 0) + \langle (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy a \mathcal{H} hipersík egy pontja $P(4, 0, 0, 0)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}$ és az iránytere

$$\vec{\mathcal{H}} = \langle w_1(-1, 1, 0, 0)_{\mathbf{B}}, w_2(2, 0, 1, 0)_{\mathbf{B}}, w_3(-1, 0, 0, 1)_{\mathbf{B}} \rangle.$$

Kiszámoljuk a P pont képét,

$$[f(P)]_{\mathcal{R}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[P]_{\mathcal{R}}} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahonnan $f(P)(2, -5, 1)_{\mathcal{R}'} \in \mathcal{Y}$. Ezután a $\vec{\mathcal{H}}$ iránytér generátorainak képét számoljuk ki:

$$\begin{aligned} [\vec{f}(w_1)]_{\mathbf{B}'} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[w_1]_{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ [\vec{f}(w_2)]_{\mathbf{B}'} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{[w_2]_{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \\ [\vec{f}(w_3)]_{\mathbf{B}'} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[w_3]_{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ahonnan a kép iránytere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(\mathcal{H})} &= \langle \vec{f}(w_1)(1, 1, 2)_{\mathbf{B}'}, \vec{f}(w_2)(5, -1, -4)_{\mathbf{B}'}, \vec{f}(w_3)(1, 1, 2)_{\mathbf{B}'} \rangle \\ &= \langle \vec{f}(w_1)(1, 1, 2)_{\mathbf{B}'}, \vec{f}(w_2)(5, -1, -4)_{\mathbf{B}'} \rangle. \end{aligned}$$

Tehát az $f(\mathcal{H})$ kép szintén egy hipersík, melynek egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben

$$\begin{vmatrix} y_1 - 2 & y_2 + 5 & y_3 - 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \iff y_1 - 7y_2 + 3y_3 - 40 = 0. \quad \diamond$$

6.3.6. Affin résztér ősképének egyenlete

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ a \mathbb{K} test feletti m -dimenziós \mathcal{X} , illetve $\mathcal{S} = (Q; \mathbf{C})$ az n -dimenziós \mathcal{Y} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$, illetve \mathbf{C} az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy bázisa.

Legyen $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$ affin résztér, amelynek algebrai egyenlete az \mathcal{Y} affin tér \mathcal{S} Descartes-féle koordináta-rendszerében

$$\mathcal{Z} : \begin{cases} c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n + d_1 = 0 \\ \vdots \\ c_{k1}y_1 + \cdots + c_{kn}y_n + d_k = 0 \end{cases}.$$

Ha az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény egyenlete

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{[f(M)]_{\mathcal{S}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{[\vec{f}]_{\mathbf{CB}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{[f(O)]_{\mathcal{S}}}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + b_1 \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m + b_n \end{cases},$$

akkor az $f^{-1}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{X}$ ősképp algebrai egyenlete az \mathcal{R} Descartes-féle koordináta-rendszerben

$$f^{-1}(\mathcal{Z}) : \begin{cases} c_{11}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + b_1) + \dots + c_{1n}(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m + b_n) + d_1 = 0 \\ \vdots \\ c_{k1}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + b_1) + \dots + c_{kn}(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m + b_n) + d_k = 0 \end{cases}.$$

6.34. Megjegyzés

Ha a rendszernek nincs megoldása, akkor $f^{-1}(\mathcal{Z}) = \emptyset$. ◇

6.35. Példa

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} , illetve $\mathcal{R}' = (O'; \mathbf{B}')$ az \mathcal{Y} valós affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy affin függvény, amelynek egyenlete az \mathcal{R} és \mathcal{R}' koordináta-rendszerekben

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{Y} affin tér egy \mathcal{Z} affin részterének egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 + 1 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Az $f^{-1}(\mathcal{Z})$ ősképp egyenletét a következőképpen határozhatjuk meg. Az f függvény egyenletét felírhatjuk

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 - 1 \\ y_2 = x_2 + 2 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

alakba, amelyet behelyettesítve a \mathcal{Z} egyenletébe megkapjuk az $f^{-1}(\mathcal{Z})$ ősképp algebrai egyenletét:

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_3 - 1) + 3(x_2 + 2) - (x_1 + x_2 + x_3 - 2) + 1 = 0 \\ (x_1 + x_3 - 1) - (x_2 + 2) + (x_1 + x_2 + x_3 - 2) - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 7 = 0 \end{cases}.$$

◇

6.36. Példa

Legyen $\mathcal{Z} = (-2, 4, 3, 0) + \langle (4, 0, -1, 2), (6, 1, 0, 3) \rangle$ az \mathbb{R}^4 egy lineáris varietása és $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az $f^{-1}(\mathcal{Z})$ ösképet a következőképpen számolhatjuk ki. Meghatározzuk a \mathcal{Z} algebrai egyenletét. Ehhez felírjuk a

$$\begin{cases} 4s_1 - s_3 + 2s_4 = 0 \\ 6s_1 + s_2 + 3s_4 = 0 \end{cases}$$

segédrendszer, amely megoldáshalmazának egy bázisa $(d_1 = (1, 0, 0, -2), (1, -6, 4, 0))$. Innen kapjuk, hogy a \mathcal{Z} algebrai egyenlete

$$\begin{cases} (y_1 + 2) - 2y_4 = 0 \\ (y_1 + 2) - 6(y_2 - 4) + 4(y_3 - 3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 - 2y_4 + 2 = 0 \\ y_1 - 6y_2 + 4y_3 + 14 = 0. \end{cases}$$

Az f egyenletét átírjuk egyenletrendszer formájába:

$$\begin{cases} y_1 = x_2 - 2x_3 + 1 \\ y_2 = -x_1 + 4x_2 - 2 \\ y_3 = 5x_1 + 2x_3 - 3 \\ y_4 = x_1 + 4x_2 - x_3 + 1 \end{cases},$$

amelyet behelyettesítve a \mathcal{Z} algebrai egyenletébe megkapjuk az $f^{-1}(\mathcal{Z})$ algebrai egyenletét:

$$\begin{cases} (x_2 - 2x_3 + 1) - 2(x_1 + 4x_2 - x_3 + 1) + 2 = 0 \\ (x_2 - 2x_3 + 1) - 6(-x_1 + 4x_2 - 2) + 4(5x_1 + 2x_3 - 3) + 14 = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} -2x_1 - 7x_2 + 1 = 0 \\ 26x_1 - 15x_2 - 6x_3 + 15 = 0 \end{cases}.$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva felírhatjuk az ösképet lineáris varietás formájában:

$$f^{-1}(\mathcal{Z}) = \left(-\frac{45}{106}, \frac{14}{53}, 0\right) + \left\langle \left(\frac{21}{106}, -\frac{3}{53}, 1\right) \right\rangle. \quad \diamond$$

6.4. Affin endomorfizmusok és automorfizmusok

Megvizsgáljuk, hogy hogyan állítható elő az affin tér affinitásainak csoportja az eltolások és az iránytér lineáris automorfizmuscsoportja segítségével.

6.4.1. Lineáris algebrai kitérő: lineáris endomorfizmusok és automorfizmusok

Egy \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortér *lineáris endomorfizmusai* a \mathcal{V} vektorteret önmagába képező lineáris függvények. Az

$$\text{End}(\mathcal{V}) = \{h: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \mid h \text{ lineáris}\}$$

halmaz a \mathcal{V} vektortér lineáris endomorfizmusainak halmaza. A \mathcal{V} vektortér *lineáris automorfizmusai* a bijektív endomorfizmusok, az

$$\text{Aut}(\mathcal{V}) = \{h \in \text{End}(\mathcal{V}) \mid h \text{ bijektív}\}$$

halmaz pedig a \mathcal{V} vektortér lineáris automorfizmusainak halmaza. A vektortér lineáris endomorfizmusai az összetétellel monoidot alkotnak, míg a lineáris automorfizmusai csoportot, tehát $(\text{End}(\mathcal{V}), \circ)$ egy monoid és $(\text{Aut}(\mathcal{V}), \circ)$ egy csoport. Ha a \mathcal{V} vektortér m -dimenziós és $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ egy bázisa, akkor

$$\phi_{\mathbf{B}}: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathcal{V}, \quad \phi_{\mathbf{B}}(k_1, \dots, k_m) = k_1\beta_1 + \dots + k_m\beta_m$$

egy lineáris izomorfizmus, amely származtat egy

$$\phi_{\mathbf{B}}: (\text{End}(\mathcal{V}), \circ) \rightarrow (\mathcal{M}_m(\mathbb{K}), \cdot), \quad \phi_{\mathbf{B}}(f) = [f]_{\mathbf{B}} \quad (6.36)$$

monoidizomorfizmust, illetve

$$\phi_{\mathbf{B}}: (\text{Aut}(\mathcal{V}), \circ) \rightarrow (GL_m(\mathbb{K}), \cdot), \quad \phi_{\mathbf{B}}(f) = [f]_{\mathbf{B}} \quad (6.37)$$

csoportizomorfizmust.

6.4.2. Affin endomorfizmusok és automorfizmusok

Vizsgáljuk az affin tér endomorfizmusait, illetve automorfizmusait, és a kapcsolatukat az iránytér endomorfizmusaival, illetve automorfizmusaival.

6.37. Értelmezés

Az \mathcal{X} affin teret önmagába képező $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ affin függvényt *affin endomorfizmusnak* nevezzük. Az \mathcal{X} affin tér affin endomorfizmusainak halmaza $\mathcal{E}nd(\mathcal{X}) = \{f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \mid f \text{ affin}\}$.

Bijektív affin endomorfizmust *affin automorfizmusnak* vagy *affinitásnak* nevezzük, és az \mathcal{X} affin tér affinitásainak halmaza $\mathcal{A}ut(\mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \mid f \text{ bijektív}\} \subseteq \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$.

6.38. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} egy affin tér.

- (i) Az \mathcal{X} affin endomorfizmusai az összetétellel monoidot alkotnak, vagyis $(\mathcal{E}nd(\mathcal{X}), \circ)$ egy monoid, és a nyom által megadott $\nu: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(f) = \vec{f}$ függvény egy szürjektív monoidmorfizmus az $(\mathcal{E}nd(\mathcal{X}), \circ)$ és $(\text{End}(\vec{\mathcal{X}}), \circ)$ monoidok között.
- (ii) Az \mathcal{X} affin automorfizmusai az összetétellel csoportot alkotnak, vagyis $(\mathcal{A}ut(\mathcal{X}), \circ)$ egy csoport, és a nyom által megadott $\nu: \mathcal{A}ut(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(f) = \vec{f}$ függvény egy szürjektív csoportmorfizmus az $(\mathcal{A}ut(\mathcal{X}), \circ)$ és $(\text{Aut}(\vec{\mathcal{X}}), \circ)$ csoportok között.

Bizonyítás.

- (i) A 6.16. Tulajdonság (i) alpontja alapján, ha $f, g \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is affin, ezért a „ \circ ” összetétel egy művelet az $\mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ halmazon. A függvények összetétele asszociatív, illetve az $1_{\mathcal{X}}$ identikus függvény affin, ezért $(\mathcal{E}nd(\mathcal{X}), \circ)$ egy monoid.

Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ affin, akkor a nyoma $\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ lineáris, így $\nu: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(f) = \vec{f}$ egy jól értelmezett függvény. A 6.16. Tulajdonság (ii) alpontja alapján, ha $f, g \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$, akkor $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$, vagyis ν egy monoidmorfizmus.

A 6.15. Tulajdonság alapján, ha adott egy $h: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$ lineáris függvény és adott egy $O \in \mathcal{X}$ pont f általi $P = f(O)$ képe, akkor létezik egyetlen olyan f affin függvény, amelyre $f(O) = P$ és az f nyoma $\vec{f} = h$. Tehát a ν függvény szürjektív.

- (ii) Mivel bijektív függvények összetétel is bijektív, ezért az előző alpont alapján a „ \circ ” összetétel egy művelet az $\mathcal{A}ut(\mathcal{X})$ halmazon, továbbá a 6.17. Tulajdonság (i) alpontja alapján bijektív affin függvény inverze is affin, ezért $(\mathcal{A}ut(\mathcal{X}), \circ)$ egy csoport.

A 6.17. Tulajdonság alapján affinitás nyoma bijektív, így $\nu: \mathcal{A}ut(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(f) = \vec{f}$ egy jól értelmezett függvény, és az előző alpont alapján egy csoportmorfizmus. A 6.17. Tulajdonság (iii) alpontja alapján, ha egy affin függvény nyoma bijektív, akkor a függvény is bijektív, így az előző alpont alapján a ν függvény szürjektív. \square

A 6.38. Tulajdonság ν függvényeit összetéve a (6.36), illetve (6.37) izomorfizmussal kapjuk az alábbi következményt.

6.39. Következmény

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti m -dimenziós affin tér és legyen \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa.

- (i) A $\nu_{\mathbf{B}}: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\nu_{\mathbf{B}}(f) = [\vec{f}]_{\mathbf{B}}$ függvény egy szürjektív monoidmorfizmus az $(\mathcal{E}nd(\mathcal{X}), \circ)$ és $(\mathcal{M}_m(\mathbb{K}), \cdot)$ monoidok között.
- (ii) A $\nu_{\mathbf{B}}: \mathcal{A}ut(\mathcal{X}) \rightarrow GL_m(\mathbb{K})$, $\nu_{\mathbf{B}}(f) = [\vec{f}]_{\mathbf{B}}$ függvény egy szürjektív csoportmorfizmus az $(\mathcal{A}ut(\mathcal{X}), \circ)$ és $(GL_m(\mathbb{K}), \cdot)$ csoportok között.

6.4.2.1. Affin endomorfizmus és automorfizmus egyenlete

Affin endomorfizmusok esetén az értelmezési tartományon és értéktartományon is ugyanazt a koordináta-rendszert szoktuk választani. Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Ekkor az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ affin endomorfizmus egyenlete

$$[f(M)]_{\mathcal{R}} = [\vec{f}]_{\mathbf{B}} \cdot [M]_{\mathcal{R}} + [f(O)]_{\mathcal{R}}, \quad M \in \mathcal{X}.$$

Az f pontosan akkor affin automorfizmus, ha $[\vec{f}]_{\mathbf{B}}$ invertálható mátrix, vagyis $\det([\vec{f}]_{\mathbf{B}}) \neq 0$ (lásd a 6.17. Tulajdonság (iii) alpontját).

6.4.3. Fixpontok

6.40. Értelmezés

Az $M \in \mathcal{X}$ pont az $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ endomorfizmus *fixpontja*, ha $f(M) = M$. Az f fixpontjainak halmaza $\text{Fix}(f) = \{M \in \mathcal{X} \mid f(M) = M\}$.

6.41. Tulajdonság

Legyen $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ az \mathcal{X} affin tér egy endomorfizmusa. Az f endomorfizmus $\text{Fix}(f)$ fixpontjainak halmaza egy affin résztér. Ha az f fixpontjainak halmaz nem üres, akkor az iránytere megegyezik a nyom fixpontjainak halmazával, vagyis $\overrightarrow{\text{Fix}(f)} = \text{Fix}(\vec{f})$.

Bizonyítás. Ha $\text{Fix}(f) = \emptyset$, akkor értelmezés szerint affin résztér. Ha $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \text{Fix}(f)$ fixpontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ affin súlyok esetén

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n) &= \lambda_1 f(A_1) + \dots + \lambda_n f(A_n) & (f \text{ affin}) \\ &= \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n & (A_1, \dots, A_n \in \text{Fix}(f)), \end{aligned}$$

tehát $\text{Fix}(f)$ zárt az affin kombinációra, ezért a 3.15. Tétel alapján $\text{Fix}(f)$ az \mathcal{X} affin résztere.

Az $\overrightarrow{\text{Fix}(f)} = \overrightarrow{\text{Fix}(\vec{f})}$ egyenlőséget két oldali bennfoglalással igazoljuk. Legyen $O \in \text{Fix}(f)$ egy rögzített pont. Mivel $\text{Fix}(f)$ egy affin résztér, ezért minden $v \in \overrightarrow{\text{Fix}(f)}$ vektor esetén létezik egyetlen $M \in \text{Fix}(f)$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM}$. Mivel f affin és $O \in \text{Fix}(f)$, ezért

$$\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{Of(M)}, \quad \forall M \in \mathcal{X}. \quad (6.38)$$

Ha $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\text{Fix}(f)}$, akkor $M \in \text{Fix}(f)$, vagyis $f(M) = M$, és a (6.38) alapján $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}$, ezért $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\text{Fix}(\vec{f})}$, tehát $\overrightarrow{\text{Fix}(f)} \subseteq \overrightarrow{\text{Fix}(\vec{f})}$.

Ha $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\text{Fix}(\vec{f})}$, akkor $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}$ és a (6.38) alapján $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(M)}$, ahonnan $f(M) = M$, vagyis $M \in \text{Fix}(f)$, ezért $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\text{Fix}(f)}$, tehát $\overrightarrow{\text{Fix}(\vec{f})} \subseteq \overrightarrow{\text{Fix}(f)}$. \square

6.5. Affin endomorfizmus felbontása transzláció és centrális endomorfizmus összetételére

Lineáris algebra esetén a (6.36) és (6.37) izomorfizmusok lehetővé teszik a lineáris endomorfizmusok, illetve automorfizmusok leírását és tanulmányozását. Célunk, hogy hasonló izomorfizmusokat adjunk affin endomorfizmusok és automorfizmusok esetén is. Igazolni fogjuk, hogy az affinitások csoportja izomorf az iránytér, mint additív csoport és az iránytér lineáris automorfizmus csoportjának féldirekt szorzatával.

6.5.1. Centrális affin endomorfizmusok és automorfizmusok

Centrális endomorfizmusok, illetve automorfizmusok olyan endomorfizmusok, illetve automorfizmusok, amelyeknek van egy rögzített fixpontja.

6.42. Értelmezés

Legyen $P \in \mathcal{X}$ az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja. Egy $g \in \text{End}(\mathcal{X})$ affin endomorfizmust P középpontú centrális affin endomorfizmusnak nevezünk, ha $g(P) = P$. A P középpontú centrális affin endomorfizmusok halmaza $\text{End}(P; \mathcal{X}) = \{g \in \text{End}(\mathcal{X}) \mid g(P) = P\}$.

Bijektív P középpontú centrális endomorfizmust P középpontú centrális automorfizmusnak (affinitásnak) nevezünk. A P középpontú centrális affinitások halmaza $\text{Aut}(P; \mathcal{X}) = \{g \in \text{End}(\mathcal{X}) \mid g(P) = P\}$.

Legyen $\mathcal{R} = (P; \mathbf{B})$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer az \mathcal{X} affin téren, ahol \mathbf{B} az \mathcal{X} iránytér egy bázisa. A $g \in \text{End}(P; \mathcal{X})$ centrális affin endomorfizmus egyenlete:

$$[g(M)]_{\mathcal{R}} = [\vec{g}]_{\mathbf{B}} \cdot [M]_{\mathcal{R}}, \quad \forall M \in \mathcal{X}.$$

6.43. Tulajdonság

Legyen P az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja.

- (i) Az \mathcal{X} affin tér P középpontú centrális affin endomorfizmusok az összetétellel monoidot alkotnak és a nyom által megadott $\nu: \text{End}(P; \mathcal{X}) \rightarrow \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(g) = \vec{g}$ leképezés egy monoidizomorfizmus az $(\text{End}(P; \mathcal{X}), \circ)$ és $(\text{End}(\vec{\mathcal{X}}), \circ)$ monoidok között.
- (ii) Az \mathcal{X} affin tér P középpontú centrális affinitásai az összetétellel csoportot alkotnak és a nyom által megadott $\nu: \text{Aut}(P; \mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(g) = \vec{g}$ leképezés egy csoportizomorfizmus az $(\text{Aut}(P; \mathcal{X}), \circ)$ és $(\text{Aut}(\vec{\mathcal{X}}), \circ)$ csoportok között.

Bizonyítás.

- (i) Mivel $g_1, g_2 \in \text{End}(P; \mathcal{X})$, ezért $g_1(P) = P$, $g_2(P) = P$, ahonnan $g_1(g_2(P)) = g_1(P) = P$, tehát $g_1 \circ g_2 \in \text{End}(P; \mathcal{X})$. Az $1_{\mathcal{X}}$ identikus függvény is P középpontú centrális endomorfizmus. Ezek alapján $(\text{End}(P; \mathcal{X}), \circ)$ egy részmonoidja az $(\text{End}(\mathcal{X}), \circ)$ monoidnak.

A 6.38. Tulajdonság (i) alpontja alapján ν egy monoidmorfizmus. Ha h egy lineáris függvény, akkor a 6.15. Tulajdonság alapján létezik egyetlen olyan g affin függvény, hogy $g(P) = P$ és amelynek a nyoma $\vec{g} = h$. Tehát ν bijektív.

- (ii) Mivel $\text{Aut}(P; \mathcal{X}) = \text{End}(P; \mathcal{X}) \cap \text{Aut}(\mathcal{X})$, ezért az előző alpont és a 6.38. Tulajdonság alapján következik az állítás. \square

A 6.43. Tulajdonság ν függvényeit összetéve a (6.36), illetve (6.37) izomorfizmussal kapjuk az alábbi következményt.

6.44. Következmény

Legyen $\mathcal{R} = (P; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere.

- (i) A $\nu_{\mathbf{B}}: \text{End}(P; \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\nu_{\mathbf{B}}(g) = [\vec{g}]_{\mathbf{B}}$ egy monoidizomorfizmus az $(\text{End}(\vec{\mathcal{X}}), \circ)$ és $(\mathcal{M}_m(\mathbb{K}), \cdot)$ monoidok között.
- (ii) A $\nu_{\mathbf{B}}: \text{Aut}(P; \mathcal{X}) \rightarrow GL_m(\mathbb{K})$, $\nu_{\mathbf{B}}(g) = [\vec{g}]_{\mathbf{B}}$ egy csoportizomorfizmus az $(\text{Aut}(\vec{\mathcal{X}}), \circ)$ és $(GL_m(\mathbb{K}), \cdot)$ csoportok között.

6.5.2. Transzlációk csoportja

Legyen \mathcal{X} egy \mathbb{K} test feletti affin tér. Az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér, mint Abel-féle csoport hat az \mathcal{X} halmazon, ahol $t: \vec{\mathcal{X}} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $(v, A) \mapsto t(v, A)$ a hatás. Bevezetjük a $t_v = t(v, -)$ és a $\mathcal{T}(\mathcal{X}) = \{t_v \mid v \in \vec{\mathcal{X}}\}$ jelöléseket.

6.45. Tulajdonság

- (i) Minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén $t_v \in \text{Aut}(\mathcal{X})$, amelynek nyoma $\vec{t}_v = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$.
- (ii) A transzlációk az összetétellel Abel-féle csoportot alkotnak és $\tau: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{X})$, $\tau(v) = t_v$ egy csoportizomorfizmus a $(\vec{\mathcal{X}}, +)$ és $(\mathcal{T}(\mathcal{X}), \circ)$ csoportok között.
- (iii) Ha \mathcal{X} egy m -dimenziós \mathbb{K} test feletti affin tér és $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa, akkor $\tau_{\mathbf{B}}: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{X})$, $\tau_{\mathbf{B}}(k_1, \dots, k_m) = t_{k_1\beta_1 + \dots + k_m\beta_m}$ egy csoportizomorfizmus a $(\mathbb{K}^m, +)$ és $(\mathcal{T}(\mathcal{X}), \circ)$ csoportok között.

Bizonyítás.

- (i) A 6.5. Példa (iii) alpontja alapján minden t_v eltolás egy affin endomorfizmus, amelynek nyoma $1_{\vec{\mathcal{X}}}$. Mivel t egy csoportthatás, ezért az 1.28. Lemma (i) alpontja alapján t_v bijektív, minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ esetén, ezért a translációk affinitások.
- (ii) Mivel t csoportthatás, ezért az 1.25. Értelmezés (i) alpontja alapján a translációk összetétele is transláció, míg az (ii) alpontja szerint az $1_{\mathcal{X}}$ identikus függvény is transláció, $t_{\vec{0}} = 1_{\mathcal{X}}$. Az 1.28. Lemma (ii) alpontja alapján a translációk inverze is transláció, $(t_v)^{-1} = t_{-v}$, minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor esetén. Ezek alapján $(\mathcal{T}(\mathcal{X}), \circ)$ az $(\text{Aut}(\mathcal{X}), \circ)$ egy részcsoporthja.
Mivel t csoportthatás, ezért az 1.25. Értelmezés (i) alpontjából következik, hogy τ egy csoportmorfizmus. A translációk értelmezése alapján τ szürjektív. A τ injektivitása következik a t csoportthatás szabadságából, de direkt is belátható. Valóban, ha létezik $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor úgy, hogy $t_v = 1_{\mathcal{X}}$, akkor tetszőleges $O \in \mathcal{X}$ pont esetén $t_v(O) = O$, ahonnan $v = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$, tehát $\ker(\tau) = \{\vec{0}\}$.
- (iii) A $\phi_{\mathbf{B}}: \mathbb{K}^m \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\phi_{\mathbf{B}}(k_1, \dots, k_m) = k_1\beta_1 + \dots + k_m\beta_m$ egy csoportizomorfizmus, így a $\tau_{\mathbf{B}} = \tau \circ \phi_{\mathbf{B}}$ szintén egy csoportizomorfizmus. \square

6.46. Tulajdonság

Az $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus egy eltolás akkor és csakis akkor, ha $\vec{f} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$, vagyis a nyoma az identikus függvény.

Bizonyítás.

- \Rightarrow A 6.5. Példa (iii) alpontjában beláttuk, hogy minden t_v , $v \in \vec{\mathcal{X}}$ eltolás nyoma az $1_{\vec{\mathcal{X}}}$ identikus függvény.
- \Leftarrow Ha az $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus nyoma $\vec{f} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$, akkor egy rögzített $O \in \mathcal{X}$ és egy tetszőleges $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Mf(M)} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \\ &= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(O)}. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Of(O)}$, ahonnan $f(M) = t(\overrightarrow{Of(O)}, M)$. Tehát $f = t(\overrightarrow{Of(O)}, -) = t_{\overrightarrow{Of(O)}}$, ami egy eltolás. \square

6.5.3. Affin endomorfizmus felbontása centrális endomorfizmus és transláció összetételére

6.47. Tétel

Legyen P az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja.

- (i) Minden $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus esetén létezik egyetlen olyan $g \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$ P középpontú centrális endomorfizmus és $t_v \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ transláció, hogy $f = t_v \circ g$.
- (ii) Minden $f \in \text{Aut}(\mathcal{X})$ affinitás esetén létezik egyetlen olyan $g \in \text{Aut}(P; \mathcal{X})$ P középpontú centrális affinitás és $t_v \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ transláció, hogy $f = t_v \circ g$.

Bizonyítás.

- (i) *Felbontás létezése.* Ha létezik $f = t_v \circ g$ felbontás, akkor $f(P) = t_v(g(P)) = t_v(P)$, ahonnan $v = \overrightarrow{Pf(P)}$. Ezért legyen az eltolás vektora $v = \overrightarrow{Pf(P)}$ és a P középpontú centrális endomorfizmus pedig $g = t_{-v} \circ f = t_{\overrightarrow{Pf(P)}} \circ f \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$, mivel

$$g(P) = (t_{\overrightarrow{Pf(P)}} \circ f)(P) = t_{\overrightarrow{Pf(P)}}(f(P)) = P.$$

Ekkor $t_v \circ g = t_v \circ (t_{-v} \circ f) = f$, tehát létezik a kért felbontás.

Felbontás egyértelmősége. Tegyük fel, hogy van két felbontás. Ha $f = t_{v_1} \circ g_1 = t_{v_2} \circ g_2$, ahol $g_1, g_2 \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$, akkor

$$\begin{aligned} (t_{v_1} \circ g_1)(P) &= (t_{v_2} \circ g_2)(P) \iff t_{v_1}(g_1(P)) = t_{v_2}(g_2(P)) \iff \\ t_{v_1}(P) &= t_{v_2}(P) \iff \overrightarrow{Pt_{v_1}(P)} = \overrightarrow{Pt_{v_2}(P)} \iff v_1 = v_2, \end{aligned}$$

tehát $t_{v_1} = t_{v_2}$. Mivel t_{v_1} invertálható, ezért a $t_{v_1} \circ g_1 = t_{v_1} \circ g_2$ egyenlőségből következik, hogy $g_1 = g_2$.

- (ii) Az előző alpont alapján minden f affinitás esetén létezik egyértelmű $f = t_v \circ g$ felbontás, ahol g egy P középpontú centrális endomorfizmus, ezért elég belátni, hogy g bijektív. A felbontás alapján $g = t_v^{-1} \circ f = t_{-v} \circ f$, tehát g két bijektív függvény összetétele, ezért bijektív. \square

6.48. Megjegyzés

Ha $f = t_v \circ g$ az $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus felbontása $g \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$ P középpontú centrális affin endomorfizmus és $t_v \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ transzláció összetételére, akkor a 6.47. Tétel bizonyítása alapján

$$v = \overrightarrow{Pf(P)} \quad \text{és} \quad \vec{f} = \overrightarrow{t_{\overrightarrow{Pf(P)}} \circ g} = \overrightarrow{t_{\overrightarrow{Pf(P)}}} \circ \vec{g} = 1_{\vec{\mathcal{X}}} \circ \vec{g} = \vec{g}. \quad (6.39)$$

\diamond

6.49. Következmény

Legyen P az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja.

- (i) A $\delta_P: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \vec{\mathcal{X}} \times \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$, $\delta_P(f) = (\overrightarrow{Pf(P)}, \vec{f})$ leképezés egy bijekció.
(ii) A $\delta_P: \mathcal{A}ut(\mathcal{X}) \rightarrow \vec{\mathcal{X}} \times \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$, $\delta_P(f) = (\overrightarrow{Pf(P)}, \vec{f})$ leképezés egy bijekció.

Bizonyítás.

- (i) A 6.47. Tétel (i) alpontja alapján minden $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus esetén létezik egyértelmű $f = t_{\overrightarrow{Pf(P)}} \circ g$ felbontás, ahol $t_{\overrightarrow{Pf(P)}} \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ eltolás és $g \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$ centrális endomorfizmus. Tehát a $\Psi_P: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{X}) \times \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$, $\Psi_P(f) = (t_{\overrightarrow{Pf(P)}}, g)$ függvény egy bijekció.

A 6.45. Tulajdonság (ii) alpontja alapján $\tau^{-1}: \mathcal{T}(\mathcal{X}) \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\tau^{-1}(t_v) = v$ egy bijekció, továbbá a 6.43. Tulajdonság (i) alpontja alapján $\nu: \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X}) \rightarrow \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$, $\nu(g) = \vec{g}$ szintén egy bijekció.

Tehát $(\tau^{-1} \times \nu) \circ \Psi_P: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \vec{\mathcal{X}} \times \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$,

$$[(\tau^{-1} \times \nu) \circ \Psi_P](f) = \left(\tau^{-1}(t_{\overrightarrow{Pf(P)}}), \nu(g) \right) = \left(\overrightarrow{Pf(P)}, \vec{g} \right) \stackrel{(6.39)}{=} \left(\overrightarrow{Pf(P)}, \vec{f} \right)$$

egy bijekció, amely megegyezik a δ_P függvénnyel.

- (ii) Az előző alponthoz hasonlóan a 6.47. Tétel (ii) alpontja, a 6.45. Tulajdonság (ii) alpontja és a 6.43. Tulajdonság (ii) alpontja alapján kapjuk, hogy δ_P bijekció affinitások esetén is. \square

6.5.4. Csoportok direkt és féldirekt szorzata

Ha (G, \bullet) és $(H, *)$ két csoport, akkor $(G \times H, \cdot)$ egy csoport a

$$(g_1, h_1) \times (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_2, h_1 * h_2), \quad \forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$$

művelettel. Ezt a csoportot nevezzük a G és H csoportok *(külső) direkt szorzatának*.

Legyen (G, \bullet) és $(H, *)$ két csoport és $\phi: H \times G \rightarrow G$, $(h, g) \mapsto \phi(h, g) = \phi_h(g)$ egy bal oldali csoportthatás (vagy vele egyenértékűen $\Phi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$, $\Phi(h) = \phi_h$ csoportmorfizmus). A $G \times H$ halmazon értelmezzük a

$$(g_1, h_1) \times_{\phi} (g_2, h_2) = (g_1 \bullet \phi_{h_1}(g_2), h_1 * h_2)$$

művelet. Ekkor $(G \times H, \times_{\phi})$ egy csoport lesz, amit $G \rtimes H$ -val jelölünk és a G és H csoportok *(külső) féldirekt szorzatának* nevezzük.

6.5.5. Az affin endomorfizmus monoid és affinitások csoportjának felbontása féldirekt szorzatra

Legyen P az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja. Legyen $f_1 = t_{v_1} \circ g_1$, illetve $f_2 = t_{v_2} \circ g_2$ az $f_1, f_2 \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmusok felbontása $g_1, g_2 \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$ P középpontú centrális affin endomorfizmusok és $t_{v_1}, t_{v_2} \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ translációk összetételére, ahol $v_1 = \overrightarrow{Pf_1(P)}$ és $v_2 = \overrightarrow{Pf_2(P)}$. Ekkor az $f_1 \circ f_2$ összetétel a következőképpen bontható fel:

$$f_1 \circ f_2 = t_{v_1} \circ g_1 \circ t_{v_2} \circ g_2 \stackrel{(6.2)}{=} t_{v_1} \circ t_{\vec{g}_1(v_2)} \circ g_1 \circ g_2 = t_{v_1 + \vec{g}_1(v_2)} \circ g_1 \circ g_2 \stackrel{(6.39)}{=} t_{v_1 + \vec{f}_1(v_2)} \circ g_1 \circ g_2, \quad (6.40)$$

ahol $t_{v_1 + \vec{g}_1(v_2)} \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ és $g_1 \circ g_2 \in \mathcal{E}nd(P; \mathcal{X})$. A felbontás egyértelműsége és a 6.48. Megjegyzés miatt

$$\overrightarrow{P(f_1 \circ f_2)(P)} = v_1 + \vec{f}_1(v_2) = \overrightarrow{Pf_1(P)} + \vec{f}_1(\overrightarrow{Pf_2(P)}). \quad (6.41)$$

A $\vec{\mathcal{X}} \times \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$ halmazon értelmezzük a következő műveletet:

$$(v_1, h_1)(v_2, h_2) = (v_1 + h_1(v_2), h_1 \circ h_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \vec{\mathcal{X}}, \quad \forall h_1, h_2 \in \text{End}(\vec{\mathcal{X}}). \quad (6.42)$$

Ez a művelet az $(\vec{\mathcal{X}}, +)$ csoport és az $\text{End}(\vec{\mathcal{X}}, \circ)$ monoid $\phi: \text{End}(\mathcal{X}) \times \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\phi(h, v) = h(v)$ monoidhatás által származtatott féldirekt szorzata, így $\vec{\mathcal{X}} \rtimes \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$ egy monoid. Hasonlóan, az $\vec{\mathcal{X}} \times \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$ halmazon értelmezzük a következő műveletet:

$$(v_1, h_1)(v_2, h_2) = (v_1 + h_1(v_2), h_1 \circ h_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \vec{\mathcal{X}}, \quad \forall h_1, h_2 \in \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}}). \quad (6.43)$$

Ez a művelet az $(\vec{\mathcal{X}}, +)$ és az $\text{Aut}(\vec{\mathcal{X}}, \circ)$ csoportok $\phi: \text{Aut}(\mathcal{X}) \times \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\phi(h, v) = h(v)$ csoportthatás által megadott féldirekt szorzata, így $\vec{\mathcal{X}} \rtimes \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$ egy csoport.

6.50. Tulajdonság

Legyen P az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja.

- (i) A $\delta_P: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \vec{\mathcal{X}} \rtimes \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$, $\delta_P(f) = (t_{\overrightarrow{Pf(P)}}, \vec{f})$ egy monoidizomorfizmus.
- (ii) A $\delta_P: \text{Aut}(\mathcal{X}) \rightarrow \vec{\mathcal{X}} \rtimes \text{Aut}(\vec{\mathcal{X}})$, $\delta_P(f) = (t_{\overrightarrow{Pf(P)}}, \vec{f})$ egy csoportizomorfizmus.

Bizonyítás.

(i) Legyenek $f_1, f_2 \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ tetszőleges affin endomorfizmusok. Ekkor

$$\begin{aligned}\delta_P(f_1 \circ f_2) &= \left(\overrightarrow{P(f_1 \circ f_2)(P)}, \overrightarrow{f_1 \circ f_2} \right) \\ &\stackrel{(6.41)}{=} \left(\overrightarrow{Pf_1(P)} + \vec{f_1}(\overrightarrow{Pf_2(P)}), \vec{f_1} \circ \vec{f_2} \right) \\ &\stackrel{(6.42)}{=} \left(\overrightarrow{Pf_1(P)}, \vec{f_1} \right) \left(\overrightarrow{Pf_2(P)}, \vec{f_2} \right) \\ &= \delta_P(f_1) \delta_P(f_2).\end{aligned}$$

Tehát δ_P egy monoidmorfizmus. A 6.49. Következmény (i) alpontja alapján δ_P bijektív is, ezért δ_P egy monoidizomorfizmus.

(ii) Az előző alponthoz hasonlóan belátható, hogy affinitások esetén δ_P csoportmorfizmus, továbbá a 6.49. Következmény (ii) alpontja alapján δ_P bijektív is, ezért δ_P egy csoportizomorfizmus. \square

A $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ halmazon értelmezzük a következő műveletet:

$$(b_1, A_1)(b_2, A_2) = (b_1 + A_1 \cdot b_2, A_1 \cdot A_2), \quad \forall b_1, b_2 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}). \quad (6.44)$$

Ez a művelet az $(\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), +)$ csoport és az $(\mathcal{M}_m(\mathbb{K}), \cdot)$ monoid

$$\phi: \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), \quad \phi(A, b) = A \cdot b$$

monoidhatás által származtatott féldirekt szorzata, így $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \rtimes \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ egy monoid. Hasonlóan, az $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ halmazon értelmezzük a következő műveletet:

$$(b_1, A_1)(b_2, A_2) = (b_1 + A_1 \cdot b_2, A_1 \cdot A_2), \quad \forall b_1, b_2 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), \quad \forall A_1, A_2 \in GL_m(\mathbb{K}). \quad (6.45)$$

Ez a művelet az $(\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}), +)$ és $(GL_m(\mathbb{K}), \cdot)$ csoportok $\phi: GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, $\phi(A, b) = A \cdot b$ csoporthatás által származtatott féldirekt szorzata, így $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \rtimes GL_m(\mathbb{K})$ egy csoport.

6.51. Következmény

Legyen $\mathcal{R} = (P; \mathbf{B})$ az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, ahol \mathbf{B} az iránytér egy bázisa.

- (i) A $\delta_{\mathcal{R}}: \mathcal{E}nd(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \rtimes \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\delta_{\mathcal{R}}(f) = ([f(P)]_{\mathcal{R}}, [\vec{f}]_{\mathbf{B}})$ leképezés egy monoidizomorfizmus.
- (ii) A $\delta_{\mathcal{R}}: \mathcal{A}ut(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}) \rtimes GL_m(\mathbb{K})$, $\delta_{\mathcal{R}}(f) = ([f(P)]_{\mathcal{R}}, [\vec{f}]_{\mathbf{B}})$ leképezés egy csoportizomorfizmus.

6.6. Projekció vagy párhuzamos vetítés

Értelmezni fogjuk az adott irány (az iránytér lineáris résztere) mentén, adott affin altérre való vetítést. Ez magába fogja foglalni a merőleges vetítést is, ahol a vetítés iránya merőleges az adott affin résztér irányterére. Előbb áttekintjük a vetítéseket a lineáris algebrában.

6.6.1. Lineáris algebrai kitérő: lineáris altér mentén lineáris altérre való vetítés

Legyen \mathcal{V} egy \mathbb{K} -vektortér, amelynek \mathcal{V}_1 és \mathcal{V}_2 két lineáris altére úgy, hogy $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$, vagyis a \mathcal{V} vektortér előáll a \mathcal{V}_1 és \mathcal{V}_2 lineáris alterek direktösszegeként.

6.52. Példa

Az \mathbb{R}^2 valós vektortér esetén, ha $\mathcal{V}_1 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ és $\mathcal{V}_2 = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathbb{R}^2 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$. \diamond

Az alábbi tulajdonságban azt mutatjuk meg, hogy a \mathcal{V} vektortér minden vektora egyértelműen felírható, mint egy \mathcal{V}_1 , illetve \mathcal{V}_2 -beli vektor összegeként.

6.53. Tulajdonság

Ha $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, akkor minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén egyértelműen léteznek $v_1 \in \mathcal{V}_1$ és $v_2 \in \mathcal{V}_2$ vektorok úgy, hogy $v = v_1 + v_2$.

Bizonyítás. Létezés. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathcal{V}_1, v_2 \in \mathcal{V}_2\}$, ezért létezik a kért felbontás.

Egyértelműség. Tegyük fel, hogy egy $v \in \mathcal{V}$ vektornak kétféle felbontása létezik, vagyis $v = v_1 + v_2 = u_1 + u_2$, ahol $v_1, u_1 \in \mathcal{V}_1$ és $v_2, u_2 \in \mathcal{V}_2$. Ekkor

$$\mathcal{V}_1 \ni v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \in \mathcal{V}_2,$$

ahonnan a $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\vec{0}\}$ feltevés miatt $v_1 - u_1 = \vec{0}$ és $u_2 - v_2 = \vec{0}$, tehát $v_1 = u_1$ és $v_2 = u_2$. \square

A $p \in \text{End}(\mathcal{V})$ lineáris endomorfizmus *projekció*, ha $p \circ p = p$. Minden direktösszeg felbontás meghatároz két projekciót.

6.54. Tulajdonság

Ha $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, akkor léteznek $p_1, p_2: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris projekciók úgy, hogy $p_1(v_1 + v_2) = v_1$ és $p_2(v_1 + v_2) = v_2$, minden $v_1 \in \mathcal{V}_1$ és $v_2 \in \mathcal{V}_2$ esetén. Továbbá $\text{Im}(p_1) = \mathcal{V}_1$ és $\ker(p_1) = \mathcal{V}_2$, illetve $\text{Im}(p_2) = \mathcal{V}_2$ és $\ker(p_2) = \mathcal{V}_1$.

Bizonyítás. A 6.53. Tulajdonság alapján p_1 és p_2 függvények jól értelmezettek.

A p_1 *lineáris*. A 6.53. Tulajdonság alapján minden $u, v \in \mathcal{V}$ vektorok esetén egyértelműen léteznek $u_1, v_1 \in \mathcal{V}_1$ és $u_2, v_2 \in \mathcal{V}_2$ vektorok úgy, hogy $u = u_1 + u_2$ és $v = v_1 + v_2$. Ekkor $u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$, ahol $u_1 + v_1 \in \mathcal{V}_1$ és $u_2 + v_2 \in \mathcal{V}_2$, ahonnan

$$p_1(u + v) = u_1 + v_1 = p_1(u) + p_1(v).$$

Ha $k \in \mathbb{K}$, akkor $k \cdot v = (k \cdot v_1) + (k \cdot v_2)$, ahol $k \cdot v_1 \in \mathcal{V}_1$ és $k \cdot v_2 \in \mathcal{V}_2$, ahonnan

$$p_1(k \cdot v) = k \cdot v_1 = k \cdot p_1(v).$$

Tehát p_1 lineáris.

A p_1 *projekció*. Minden $v_1 \in \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ vektor esetén $v_1 = v_1 + \vec{0}$ (ahol $\vec{0} \in \mathcal{V}_2$), ezért $p_1(v_1) = v_1$ és $p_1(p_1(v_1 + v_2)) = p_1(v_1) = v_1 = p_1(v_1 + v_2)$, tehát p_1 projekció.

Az értelmezés alapján $\text{Im}(p_1) \subseteq \mathcal{V}_1$, továbbá $p_1(v_1 + \vec{0}) = v_1$, minden $v_1 \in \mathcal{V}_1$ esetén, így $\text{Im}(p_1) = \mathcal{V}_1$. Végül $p_1(v_1 + v_2) = \vec{0}$ pontosan akkor, ha $v_1 = \vec{0}$, tehát $\ker(p_1) = \mathcal{V}_2$.

Hasonlóan igazolhatók az állítások a p_2 -re is. \square

6.55. Értelmezés

A p_1 projekciót a \mathcal{V}_2 mentén a \mathcal{V}_1 altérre való *lineáris projekciónak (vetítésnek)* és a p_2 projekciót pedig a \mathcal{V}_1 mentén a \mathcal{V}_2 altérre való *lineáris projekciónak (vetítésnek)* nevezzük.

A következő tulajdonságban megmutatjuk, hogy minden lineáris projekció direkt összeg felbontásból származik.

6.56. Tulajdonság

Ha $p \in \text{End}(\mathcal{V})$ egy lineáris projekció, akkor p a $\ker(p)$ mentén az $\text{Im}(p)$ -re való projekció.

Bizonyítás. Minden $v \in \mathcal{V}$ vektor esetén

$$p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = \vec{0},$$

tehát $v - p(v) \in \ker(p)$. Minden $v \in \mathcal{V}$ esetén

$$v = p(v) + (v - p(v)) \in \text{Im}(p) + \ker(p), \quad (6.46)$$

tehát $\mathcal{V} = \text{Im}(p) + \ker(p)$. Minden $v \in \text{Im}(p)$ esetén létezik $w \in \mathcal{V}$ úgy, hogy $v = p(w)$, így $p(v) = p(p(w)) = p(w) = v$. Ha $u \in \text{Im}(p) \cap \ker(p)$, akkor $u = p(u)$ és $p(u) = \vec{0}$, tehát $u = \vec{0}$. Ezzel beláttuk, hogy $\text{Im}(p) \cap \ker(p) = \{\vec{0}\}$. Tehát

$$\mathcal{V} = \text{Im}(p) \oplus \ker(p).$$

A (6.46) alapján következik, hogy p a $\ker(p)$ mentén az $\text{Im}(p)$ -re való lineáris projekció. □

6.6.2. Irány mentén (affin résztérrel párhuzamos) vetítés affin résztérre**6.57. Értelmezés**

A $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ affin endomorfizmus *projekció* vagy *párhuzamos vetítés*, ha $\pi \circ \pi = \pi$; tehát $\pi(\pi(M)) = \pi(M)$, minden $M \in \mathcal{X}$ esetén.

Minden projekciónak vannak fixpontjai.

6.58. Tulajdonság

Ha π projekció, akkor $\text{Fix}(\pi) = \text{Im}(\pi)$.

Bizonyítás.

$$\boxed{\subseteq} \text{ Ha } M \in \text{Fix}(\pi), \text{ akkor } \pi(M) = M, \text{ tehát } M \in \text{Im}(\pi).$$

$$\boxed{\supseteq} \text{ Ha } N \in \text{Im}(\pi), \text{ akkor létezik } M \in \mathcal{X} \text{ úgy, hogy } N = \pi(M), \text{ ahonnan } \pi(N) = \pi(\pi(M)) = \pi(M) = N, \text{ tehát } N \in \text{Fix}(\pi). \quad \square$$

Egy affin endomorfizmus pontosan akkor projekció, ha van fixpontja és a nyoma is egy projekció.

6.59. Tulajdonság

A $\pi \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus egy projekció, vagyis $\pi \circ \pi = \pi$ akkor és csakis akkor, ha $\text{Fix}(\pi) \neq \emptyset$ és a $\vec{\pi} \in \text{End}(\vec{\mathcal{X}})$ nyom egy lineáris projekció, vagyis $\vec{\pi} \circ \vec{\pi} = \vec{\pi}$.

Bizonyítás.

\Rightarrow Ha $\pi \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ úgy, hogy $\pi \circ \pi = \pi$, akkor $\overrightarrow{\pi \circ \pi} = \vec{\pi}$, ahonnan $\vec{\pi} \circ \vec{\pi} = \vec{\pi}$ a 6.16. Tulajdonság alapján. Tehát a $\vec{\pi}$ nyom egy lineáris projekció. A 6.58. Tulajdonság alapján $\text{Fix}(\pi) = \text{Im}(\pi)$, ezért $\text{Fix}(\pi) \neq \emptyset$.

\Leftarrow Fordítva, ha $\pi \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ úgy, hogy $\vec{\pi} \circ \vec{\pi} = \vec{\pi}$ és $\text{Fix}(\pi) \neq \emptyset$, akkor legyen $O \in \text{Fix}(\pi)$ rögzített pont, vagyis $\pi(O) = O$. Ekkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\pi(M)} &= \overrightarrow{\pi(\pi(O))\pi(M)} & (O = \pi(O) = \pi(\pi(O))) \\ &= \vec{\pi}(\overrightarrow{\pi(O)\pi(M)}) & (\pi \text{ affin}) \\ &= \vec{\pi}(\vec{\pi}(\overrightarrow{OM})) & (\pi \text{ affin}) \\ &= \vec{\pi}(\overrightarrow{OM}) & (\vec{\pi} \circ \vec{\pi} = \vec{\pi}) \\ &= \overrightarrow{\pi(O)\pi(M)} & (\pi \text{ affin}) \\ &= \overrightarrow{O\pi(M)} & (O = \pi(O)), \end{aligned}$$

ahonnan $\pi(\pi(M)) = \pi(M)$. Tehát $\pi \circ \pi = \pi$, így π egy projekció. \square

Legyen \mathcal{V} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy lineáris altere és $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ egy nemüres affin résztér úgy, hogy $\mathcal{V} \oplus \vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}}$. Tetszőleges $M \in \mathcal{X}$ pont esetén a $t(\mathcal{V}, M) \cap \mathcal{Z}$ metszet mindig egyetlen pontból áll a 3.41. Tulajdonság (iii) alpontja alapján, mert $\overrightarrow{t(\mathcal{V}, M)} = \mathcal{V}$ és $\mathcal{V} \oplus \vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}}$. Tehát értelmezhető egy $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény úgy, hogy $t(\mathcal{V}, M) \cap \mathcal{Z} = \{\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}(M)\}$.

6.60. Tulajdonság

A $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$ függvény affin és projekció, vagyis $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}} \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ és $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}} = \pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$. A $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$ projekció képe $\text{Im}(\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}) = \mathcal{Z}$ és a nyoma a \mathcal{V} mentén a $\vec{\mathcal{Z}}$ iránytérre való lineáris vetítés.

Bizonyítás. Bevezetjük a $\pi = \pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$ jelölést. Ha $M \in \mathcal{Z}$, akkor $M \in t(\mathcal{V}, M) \cap \mathcal{Z}$, ezért $\pi(M) = M$, tehát $\text{Fix}(\pi) \neq \emptyset$. A π értelmezése alapján $\pi(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Z}$, továbbá $\pi(M) = M$, minden $M \in \mathcal{Z}$ esetén, ezért $\text{Im}(\pi) = \mathcal{Z}$.

Egy $O \in \mathcal{Z}$ rögzített pont és tetszőleges $M \in \mathcal{X}$ pont esetén az \overrightarrow{OM} vektor felbontása a $\vec{\mathcal{X}} = \mathcal{V} \oplus \vec{\mathcal{Z}}$ direktösszeg szerint $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\pi(M)M} + \overrightarrow{O\pi(M)}$, ahol $\overrightarrow{O\pi(M)} \in \vec{\mathcal{Z}}$, mivel $O, \pi(M) \in \mathcal{Z}$, illetve $\overrightarrow{\pi(M)M} \in \mathcal{V} = \overrightarrow{t(\mathcal{V}, M)}$, mivel $\pi(M), M \in t(\mathcal{V}, M)$. Ezen felbontás alapján $\overrightarrow{\pi(O)\pi(M)} = \overrightarrow{O\pi(M)} = p(\overrightarrow{OM})$, ahol p a \mathcal{V} mentén az $\vec{\mathcal{Z}}$ iránytérre való lineáris projekció. Innen a 6.6. Lemma alapján következik, hogy π affin, amelynek a nyoma $\vec{\pi} = p$, továbbá a 6.59. Tulajdonság alapján π projekció. \square

6.61. Értelmezés

A $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$ függvényt a \mathcal{V} (irányok) mentén a \mathcal{Z} -re való *vetítésnek* nevezzük. Ha \mathcal{Y} egy nemüres affin résztér úgy, hogy $\vec{\mathcal{Y}} \oplus \vec{\mathcal{Z}} = \vec{\mathcal{X}}$, akkor a $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{Y}} = \pi_{\mathcal{Z}}^{\vec{\mathcal{Y}}}$ az \mathcal{Y} résztérrel párhuzamosan a \mathcal{Z} affin résztérre való *vetítés*.

6.62. Példa

Az $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

egyenletű affin leképezés projekció (az Ox_3 koordináta tengellyel párhuzamosan levetítjük a pontokat az x_1Ox_2 koordinátságokra). \diamond

A következő tulajdonságban azt mutatjuk meg, hogy minden affin projekció egy lineáris altér mentén való vetítés egy affin résztérre.

6.63. Tulajdonság

Ha $\pi \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy affin projekció, akkor $\pi = \pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$, ahol $\mathcal{Z} = \text{Im}(\pi)$ és $\mathcal{V} = \ker(\pi)$. Tehát π a \mathcal{V} mentén a \mathcal{Z} résztérre való projekció.

Bizonyítás. A π affin projekció $\vec{\pi}$ nyoma lineáris projekció, amely a 6.56. Tulajdonság alapján a $\ker(\vec{\pi})$ mentén az $\text{Im}(\vec{\pi}) = \overrightarrow{\text{Im}(\pi)} = \vec{\mathcal{Z}}$ altérre való vetítés. Tehát a π és $\pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$ projekciók nyomai megegyeznek, továbbá mindkét projekció fixen hagy minden $O \in \text{Im}(\pi)$ pontot. A 6.15. Tulajdonság alapján egyetlen olyan affin függvény létezik, amely az O pontot fixen hagyja és $\vec{\pi}$ a nyoma, ezért $\pi = \pi_{\mathcal{Z}}^{\mathcal{V}}$. \square

6.64. Példa

Az \mathbb{R}^3 -ben egy α síkra való merőleges vetítés is párhuzamos vetítés, a $\mathcal{V} = \langle \vec{n}_{\alpha} \rangle$ mentén a $\mathcal{Z} = \alpha$ síkra. \diamond

6.65. Példa

Az \mathbb{R}^3 -ben egy ℓ egyenesre való merőleges vetítés is párhuzamos vetítés, a $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp \vec{\ell}\}$ mentén a $\mathcal{Z} = \ell$ egyenesre. \diamond

6.66. Példa

Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $f(M) = P$, minden $M \in \mathcal{X}$, konstans affin endomorfizmus is párhuzamos vetítés, a $\mathcal{V} = \vec{\mathcal{X}}$ mentén a $\mathcal{Z} = \{P\}$ affin résztérre. \diamond

6.67. Példa

Az $1_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ identikus leképezés is párhuzamos vetítés a $\mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ mentén az $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$ térre. \diamond

6.68. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortérben adottak az

$$\alpha = (1, 0, 2, 4) + \langle (1, -1, 2, 1), (-2, 3, -4, -1) \rangle \quad \text{és} \quad \beta = (-1, 2, -3, 1) + \langle (3, 1, 5, 7), (-1, 3, -7, 0) \rangle$$

lineáris varietások.

(a) Igazoljuk, hogy $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \mathbb{R}^4$!

(b) Számítsuk ki az α mentén a β -ra való π_{β}^{α} projekció egyenletét az $\mathcal{E} = (O; \mathbf{E})$ kanonikus Descartes-féle koordináta-rendszerben! \diamond

Megoldás.

- (a) Az $\vec{\alpha}$ iránytér egy bázisa $(v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (-2, 3, -4, -1))$, míg a $\vec{\beta}$ iránytér egy bázisa $(w_1 = (3, 1, 5, 7), w_2 = (-1, 3, -7, 0))$. Mivel

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

ezért $\mathbf{B} = (v_1, v_2, w_1, w_2)$ az \mathbb{R}^4 egy bázisa, tehát

$$\underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{\vec{\alpha}} \oplus \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle}_{\vec{\beta}} = \mathbb{R}^4 \iff \vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \mathbb{R}^4.$$

- (b) Két módszert mutatunk a projekció egyenletének kiszámítására. Az első módszerben a projekció egyenlete könnyen felírható egy sajátos koordináta-rendszerben, amelyet át kell írni a kért koordináta-rendszerbe. A $\pi_\beta^\alpha \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ projekció nyoma $\vec{\pi}_\beta^\alpha \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ az $\vec{\alpha}$ lineáris altér mentén a $\vec{\beta}$ lineáris altérre való lineáris vetítés, ezért az $\vec{\alpha}$ altéren nulla, míg a $\vec{\beta}$ altéren identikus függvényként viselkedik, vagyis

$$\vec{\pi}_\beta^\alpha(v_1) = \vec{\pi}_\beta^\alpha(v_2) = \vec{0}, \quad \vec{\pi}_\beta^\alpha(w_1) = w_1, \quad \vec{\pi}_\beta^\alpha(w_2) = w_2.$$

Az \mathbf{B} bázisban a $\vec{\pi}_\beta^\alpha$ lineáris projekció mátrixa

$$[\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A koordinátacsere képlete segítségével kiszámoljuk a $\vec{\pi}_\beta^\alpha$ mátrixát a kanonikus bázisban:

$$\begin{aligned} [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}} &= T_{\mathbf{EB}} [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}} T_{\mathbf{BE}} = T_{\mathbf{EB}} [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}} T_{\mathbf{EB}}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{E}} & [v_2]_{\mathbf{E}} & [w_1]_{\mathbf{E}} & [w_2]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix} [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{E}} & [v_2]_{\mathbf{E}} & [w_1]_{\mathbf{E}} & [w_2]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85 & 54 & 11 & -52 \\ 29 & 19 & 4 & -18 \\ -8 & -5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -16 & -3 & 16 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -54 & -32 & -5 & 32 \\ -56 & -35 & -7 & 35 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kiszámolhatjuk a projekció egyenletének szabadtagját is tudva, hogy a π_β^α projekció a β pontjait fixen hagyja, vagyis $\pi_\beta^\alpha(B) = B$. Mivel $B = (-1, 2, -3, 1) \in \beta$, azaz $B(-1, 2, -3, 1)_{\mathcal{E}}$, ezért

$$[\pi_\beta^\alpha(O)]_{\mathcal{E}} = -[\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}}[B]_{\mathcal{E}} + [\pi_\beta^\alpha(B)]_{\mathcal{E}} = -[\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}}[B]_{\mathcal{E}} + [B]_{\mathcal{E}}$$

$$= - \begin{bmatrix} -26 & -16 & -3 & 16 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -54 & -32 & -5 & 32 \\ -56 & -35 & -7 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -1 \\ -40 \\ -41 \end{bmatrix}.$$

Végül felírhatjuk a $\pi_\beta^\alpha(B)$ projekció egyenletét az \mathcal{E} kanonikus koordináta-rendszerben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha(M)]_{\mathcal{E}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -26 & -16 & -3 & 16 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -54 & -32 & -5 & 32 \\ -56 & -35 & -7 & 35 \end{bmatrix}}_{[\vec{\pi}_\beta^\alpha]_{\mathbb{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{E}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -20 \\ -1 \\ -40 \\ -41 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha(O)]_{\mathcal{E}}}.$$

A második módszerben metszet segítségével számoljuk ki a projekció egyenletét. Rögzítünk egy $M(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\mathcal{E}}$ tetszőleges pontot és legyen $\alpha_M = t(\vec{\alpha}, M)$. Ekkor $\{\pi_\beta^\alpha(M)\} = \alpha_M \cap \beta$. Ennek a metszetnek a kiszámolásához felírjuk az α algebrai egyenletét, amely könnyen átírható az α_M algebrai egyenletébe. Felírjuk a

$$\begin{cases} s_1 - s_2 + 2s_3 + s_4 = 0 \\ -2s_1 + 3s_2 - 4s_3 - s_4 = 0 \end{cases}$$

segédrendszert, amely megoldáshalmazának $(d_1 = (-2, -1, 0, 1), d_2 = (-2, 0, 1, 0))$ egy bázisa. Ez alapján az α_M algebrai egyenlete (y_1, y_2, y_3, y_4) ismeretlenekben

$$\begin{cases} -2(y_1 - x_1) - (y_2 - x_2) + (y_4 - x_4) = 0 \\ -2(y_1 - x_1) + (y_3 - x_3) = 0 \end{cases}. \quad (6.47)$$

Az $\alpha_M \cap \beta$ metszet kiszámolásához felírjuk a β paraméteres egyenletét:

$$\begin{cases} y_1 = -1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y_2 = 2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ y_3 = -3 + 5\lambda_1 - 7\lambda_2 \\ y_4 = 1 + 7\lambda_1 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Behelyettesítjük a (6.47) egyenletbe és kiszámoljuk a λ_1, λ_2 paramétereket az M pont x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátái függvényében:

$$\begin{cases} -2(-1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - x_1) - (2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 - x_2) + (1 + 7\lambda_1 - x_4) = 0 \\ -2(-1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - x_1) + (-3 + 5\lambda_1 - 7\lambda_2 - x_3) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 + 2x_1 + x_2 - x_4 + 1 = 0 \\ -\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \end{cases},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = -8x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 - 6, \quad \lambda_2 = 2x_1 + x_2 - x_4 + 1.$$

Ezt visszahelyettesítve a β paraméteres egyenletébe megkapjuk a π_β^α projekció egyenletét egyenletrendszer alakjában:

$$\begin{cases} y_1 = -26x_1 - 16x_2 - 3x_3 + 16x_4 - 20 \\ y_2 = -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \\ y_3 = -54x_1 - 32x_2 - 5x_3 + 32x_4 - 40 \\ y_4 = -56x_1 - 35x_2 - 7x_3 + 35x_4 - 41 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha(M)]_\mathcal{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -26 & -16 & -3 & 16 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -54 & -32 & -5 & 32 \\ -56 & -35 & -7 & 35 \end{bmatrix}}_{[\vec{\pi}_\beta^\alpha]_\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[M]_\mathcal{E}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -20 \\ -1 \\ -40 \\ -41 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha(O)]_\mathcal{E}}.$$

A számolások helyesek, ha teljesülnek, hogy

$$\begin{aligned} [\pi_\beta^\alpha(B)]_\mathcal{E} &= [B]_\mathcal{E}, & [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_\mathbf{E}[v_1]_\mathbf{E} &= [\vec{0}]_\mathbf{E}, & [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_\mathbf{E}[v_2]_\mathbf{E} &= [\vec{0}]_\mathbf{E}, \\ [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_\mathbf{E}[w_1]_\mathbf{E} &= [w_1]_\mathbf{E}, & [\vec{\pi}_\beta^\alpha]_\mathbf{E}[w_2]_\mathbf{E} &= [w_2]_\mathbf{E} \end{aligned}$$

□

6.69. Példa

A 4-dimenziós \mathcal{X} affin térben tekintjük az $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3, e_4)$ Descartes-féle koordináta rendszert. Ebben a koordináta-rendszerben adottak az

$$\alpha : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \beta : \begin{cases} x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 + 2x_1 = 4 \end{cases}$$

síkok.

- Írjuk fel az α sík mentén a β síkra való π vetítés egyenletét!
- Számoljuk ki az $A(1, 1, 1, 1)_\mathcal{R}$ pont vetületét a β síkra az α sík mentén!
- Igazoljuk, hogy $\pi \circ \pi = \pi$.

◇

Megoldás.

- Legyen $M(a_1, a_2, a_3, a_4)_\mathcal{R} \in \mathcal{X}$. Az M ponton át párhuzamost húzunk az α síkkal, amely mentén szeretnénk vetíteni. Ez a sík $\alpha_M = t(\vec{\alpha}, M)$, és amelynek az egyenlete

$$\alpha_M : \begin{cases} (x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) = 0 \\ (x_2 - a_2) + (x_3 - a_3) = 0 \end{cases}.$$

Ezt az α sík egyenletéből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a szabadtagokat és az x_i változó helyére $(x_i - a_i)$ tagokat írunk, minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén.

Az M pont vetülete az α sík mentén a β síkra a $\{\pi(M)\} = \alpha_M \cap \beta$ pontosan az α_M metszete a β -vel. Ehhez meg kell oldani az α_M és β síkok egyenleteiből alkotott egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) = 0 \\ (x_2 - a_2) + (x_3 - a_3) = 0 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 + 2x_1 = 4 \end{cases},$$

ahol az x_1, x_2, x_3, x_4 a főismeretlenek és a_1, a_2, a_3, a_4 a mellékismeretlenek.

Kifejezzük $x_1 = -x_2 + a_1 + a_2$ és $x_3 = -x_2 + a_2 + a_3$ ismeretlenek az első két egyenletből és behelyettesítjük az utolsó kettőbe:

$$\begin{cases} (-x_2 + a_2 + a_3) + x_4 = 3 \\ x_4 + 2(-x_2 + a_1 + a_2) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_2 + x_4 = 3 - a_2 - a_3 \\ -2x_2 + x_4 = 4 - 2a_1 - 2a_2 \end{cases}.$$

Innen

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a_1 + a_3 \\ x_2 = -1 + 2a_1 + a_2 - a_3 \\ x_3 = 1 - 2a_1 + 2a_3 \\ x_4 = 2 + 2a_1 - 2a_3 \end{cases}.$$

Ez a π projekció egyenlete, vagyis a tetszőleges $M(a_1, a_2, a_3, a_4)_{\mathcal{R}}$ koordinátákat behelyettesítve megkapjuk a $\pi(M)$ vetület (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátáit. Ezt mátrix alakba is átírhatjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[\pi(M)]_{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) A $\pi(A)$ vetület koordinátái:

$$[\pi(A)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Le kell ellenőrizni, hogy $\pi \circ \pi = \pi$. Ehhez kiszámoljuk a $\pi \circ \pi$ egyenletét

$$\begin{aligned} [\pi(\pi(M))]_{\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} [\pi(M)]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^2 [\pi(M)]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} [\pi(M)]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [\pi(M)]_{\mathcal{R}},
\end{aligned}$$

tehát $\pi \circ \pi = \pi$. □

6.70. Példa

Tekintsük az $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$[f(M)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{E}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

leképezés, ahol \mathcal{E} a kanonikus koordináta-rendszer az \mathbb{R}^3 affin téren.

- (a) Igazoljuk, hogy f egy projekció!
- (b) Határozzunk meg a \mathcal{Z} síkot, amelyre vetít és a \mathcal{V} lineáris alteret, amellyel párhuzamosan vetít!

◇

Megoldás.

- (a) Igazolni kell, hogy $f \circ f = f$. Ehhez kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned}
[f(f(M))]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} [f(M)]_{\mathcal{E}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{E}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^2 [M]_{\mathcal{E}} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{E}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = [f(M)]_{\mathcal{E}},
\end{aligned}$$

tehát f projekció. A 6.63. Tulajdonság alapján $\mathcal{Z} = \text{Im}(f)$. Az f képe

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} = \text{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) = f((0, 0, 0) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle) \\
&\stackrel{(\dagger)}{=} f(0, 0, 0) + \langle \vec{f}(1, 0, 0), \vec{f}(0, 1, 0), \vec{f}(0, 0, 1) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2, 2, 2) + \left\langle \frac{1}{3}(2, -1, -1), \frac{1}{3}(-1, 2, -1), \frac{1}{3}(-1, -1, 2) \right\rangle \\
&= (2, 2, 2) + \langle (2, -1, -1), (-1, 2, -1) \rangle,
\end{aligned}$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben használtuk, hogy az $A + \mathcal{V}$ lineáris varietás képe $f(A + \mathcal{V}) = f(A) + \vec{f}(\mathcal{V})$ és hogy az f nyoma

$$[\vec{f}(v)]_{\mathbf{E}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} [v]_{\mathbf{E}}.$$

Végül

$$\mathcal{V} = \ker(\vec{f}) = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{f}(v) = \vec{0}\}.$$

Az α kiszámolásához meg kell oldani az

$$[\vec{f}(v(x_1, x_2, x_3)_{\mathbf{E}})]_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Ennek megoldáshalmaza

$$\mathcal{V} = \ker(\vec{f}) = \{(\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

Összegezve, az f affin leképezés a $\mathcal{V} = \langle (1, 1, 1) \rangle$ lineáris altér mentén a

$$\mathcal{Z} = (2, 2, 2) + \langle (2, -1, -1), (-1, 2, -1) \rangle$$

síkra való vetítés. □

6.7. Szimmetria vagy tükrözés

6.71. Értelmezés

A $\sigma \in \text{End}(\mathcal{X})$ *szimmetria* (vagy *tükrözés*), ha $\sigma \circ \sigma = 1_{\mathcal{X}}$, vagyis $\sigma(\sigma(M)) = M$, minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén.

6.72. Megjegyzés

Minden σ szimmetria affinitás, mivel önmaga inverze, vagyis $\sigma^{-1} = \sigma$. ◇

6.73. Példa

Legyen $P \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Az $\sigma_P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $\sigma_P(M) = 2P - M$ függvény szimmetria (a P pontra vonatkozó szimmetria). A σ a konstans és az identikus függvényel 2 és -1 súlyokkal vett affin kombinációja, ezért affin a 6.18. Tulajdonság alapján. Továbbá

$$\sigma(\sigma(M)) = 2P - \sigma(M) = 2P - (2P - M) = M, \quad \forall M \in \mathcal{X}.$$

◇

6.7.1. Szimmetria és projekció kapcsolata

Minden szimmetriához tartozik egy projekció, és fordítva. Így a 6.63. Tulajdonság alapján minden szimmetria egy lineáris altér mentén egy affin résztérre való szimmetria.

6.74. Tétel (Projekció és szimmetria kapcsolata)

Legyen \mathcal{X} egy affin tér.

- (i) Ha $\pi \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy projekció, akkor $\sigma = 2\pi - 1_{\mathcal{X}}$ egy szimmetria.
- (ii) Ha $\sigma \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy szimmetria, akkor $\pi = \frac{\sigma + 1_{\mathcal{X}}}{2}$ egy projekció.

Bizonyítás.

- (i) Mivel σ a π és $1_{\mathcal{X}}$ affin endomorfizmusok 2, -1 affin súlyokkal vett kombinációja, ezért σ affin a 6.18. Tulajdonság alapján. Minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned}
 \sigma(\sigma(M)) &= 2\pi(\sigma(M)) - \sigma(M) && (\text{mert } \sigma = 2\pi - 1_{\mathcal{X}}) \\
 &= 2\pi(2\pi(M) - M) - (2\pi(M) - M) && (\text{mert } \sigma = 2\pi - 1_{\mathcal{X}}) \\
 &= 4\pi(\pi(M)) - 2\pi(M) - 2\pi(M) + M && (\text{mert } \pi \text{ affin}) \\
 &= 4\pi(M) - 4\pi(M) + M && (\text{mert } \pi \text{ projekció}) \\
 &= M,
 \end{aligned}$$

tehát σ szimmetria.

- (ii) Mivel π a σ és $1_{\mathcal{X}}$ affin endomorfizmusok $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ affin súlyokkal vett kombinációja, ezért π affin a 6.18. Tulajdonság alapján. Minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned}
 \pi(\pi(M)) &= \frac{\sigma(\pi(M)) + \pi(M)}{2} && (\text{mert } \pi = \frac{\sigma + 1_{\mathcal{X}}}{2}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sigma \left(\frac{\sigma(M) + M}{2} \right) + \frac{\sigma(M) + M}{2} \right) && (\text{mert } \pi = \frac{\sigma + 1_{\mathcal{X}}}{2}) \\
 &= \frac{1}{4} \sigma(\sigma(M)) + \frac{1}{4} \sigma(M) + \frac{1}{4} \sigma(M) + \frac{1}{4} M && (\text{mert } \sigma \text{ affin}) \\
 &= \frac{1}{4} (2\sigma(M) + 2M) && (\text{mert } \sigma^2 = 1_{\mathcal{X}}) \\
 &= \pi(M) && (\text{mert } \pi = \frac{\sigma + 1_{\mathcal{X}}}{2}),
 \end{aligned}$$

tehát π projekció. □

6.75. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} egy affin tér. Minden $\sigma \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ szimmetriának van fixpontja és a fixpontok halmaza

$$\text{Fix}(\sigma) = \left\{ \frac{M + \sigma(M)}{2} \mid M \in \mathcal{X} \right\}. \quad (6.48)$$

Ha $\pi = \frac{\sigma + 1_{\mathcal{X}}}{2}$ a σ -hoz tartozó projekció, akkor $\text{Fix}(\sigma) = \text{Fix}(\pi)$.

Bizonyítás. A (6.48) egyenlőséget kétoldali bennfoglalással igazoljuk.

$$\boxed{\subseteq} \text{ Ha } P \in \text{Fix}(\sigma) \text{ a szimmetria egy fixpontja, akkor } \frac{P + \sigma(P)}{2} = \frac{P + P}{2} = P, \text{ ahonnan adódik,} \\
 \text{ hogy } P \in \left\{ \frac{M + \sigma(M)}{2} \mid M \in \mathcal{X} \right\}.$$

$\boxed{\supseteq}$ Ha $P = \frac{\sigma(M)+M}{2}$, akkor $\sigma(P) = \sigma\left(\frac{\sigma(M)+M}{2}\right) = \frac{\sigma(\sigma(M))+\sigma(M)}{2} = \frac{M+\sigma(M)}{2} = P$, tehát $P \in \text{Fix}(\sigma)$ a szimmetria egy fixpontja.

Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Ha $\pi = \frac{\sigma+1_{\mathcal{X}}}{2}$, akkor

$$\begin{aligned} M = \pi(M) &\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\pi(M)} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{O\sigma(M)} + \overrightarrow{OM}}{2} \iff \\ &\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\sigma(M)} \iff M = \sigma(M). \end{aligned}$$

Innen következik, hogy $\text{Fix}(\sigma) = \text{Fix}(\pi)$. □

6.76. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} egy affin tér. A $\sigma \in \text{End}(\mathcal{X})$ affin endomorfizmus akkor és csakis akkor szimmetria, ha a nyoma szimmetria és vannak fixpontjai, azaz $\vec{\sigma} \circ \vec{\sigma} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$ és $\text{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$.

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ha σ szimmetria, akkor $\sigma \circ \sigma = 1_{\mathcal{X}}$, ahonnan $\overrightarrow{\sigma \circ \sigma} = \vec{1}_{\mathcal{X}}$, tehát $\vec{\sigma} \circ \vec{\sigma} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}$, továbbá $\text{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$ a (6.48) alapján.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $\text{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$, akkor legyen $O \in \mathcal{X}$ a σ függvény egy fixpontja, vagyis $\sigma(O) = O$. Ekkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\sigma(\sigma(M))} &= \overrightarrow{\sigma(\sigma(O)\sigma(M))} && \text{(mivel } O = \sigma(O) = \sigma(\sigma(O))) \\ &= \vec{\sigma}(\overrightarrow{\sigma(O)\sigma(M)}) && \text{(mivel } \sigma \text{ affin)} \\ &= \vec{\sigma}(\vec{\sigma}(\overrightarrow{OM})) && \text{(mivel } \sigma \text{ affin)} \\ &= \overrightarrow{OM} && \text{(mivel } \vec{\sigma} \circ \vec{\sigma} = 1_{\vec{\mathcal{X}}}), \end{aligned}$$

ahonnan $\sigma(\sigma(M)) = M$. □

6.77. Példa

Az \mathbb{R}^4 valós vektortérben adottak az

$$\alpha = (1, 0, 2, 4) + \langle (1, -1, 2, 1), (-2, 3, -4, -1) \rangle \quad \text{és} \quad \beta = (-1, 2, -3, 1) + \langle (3, 1, 5, 7), (-1, 3, -7, 2) \rangle$$

lineáris varietások.

(a) Igazoljuk, hogy $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \mathbb{R}^4$!

(b) Számítsuk ki az α mentén a β -ra való σ_{β}^{α} tükrözés egyenletét az $\mathcal{E} = (O; \mathbf{E})$ kanonikus Descartes-féle koordináta-rendszerben!

◇

Megoldás.

(a) A 6.68. Példa (a) alpontjában beláttuk, hogy az $\vec{\alpha}$ iránytér $(v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (-2, 3, -4, -1))$ és $\vec{\beta}$ iránytér $(w_1 = (3, 1, 5, 7), w_2 = (-1, 3, -7, 0))$ bázisai esetén $\mathbf{B} = (v_1, v_2, w_1, w_2)$ az \mathbb{R}^4 egy bázisa, ezért $\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \mathbb{R}^4$.

- (b) Két módszert mutatunk a tükrözés egyenletének kiszámítására. Az első módszerben a tükrözés egyenlete könnyen felírható egy sajátos koordináta-rendszerben, amelyet át kell írni a kért koordináta-rendszerbe. A $\sigma_\beta^\alpha \in \mathcal{E}nd(\mathbb{R}^4)$ affin tükrözés nyoma $\vec{\sigma}_\beta^\alpha \in \mathcal{E}nd(\mathbb{R}^4)$ az $\vec{\alpha}$ lineáris altér mentén a $\vec{\beta}$ lineáris altérre való lineáris tükrözés, ezért az $\vec{\alpha}$ altéren az identikus függvény ellentettjeként, míg a $\vec{\beta}$ altéren identikus függvényként viselkedik, vagyis

$$\vec{\sigma}_\beta^\alpha(v_1) = -v_1, \quad \vec{\sigma}_\beta^\alpha(v_2) = -v_2, \quad \vec{\sigma}_\beta^\alpha(w_1) = w_1, \quad \vec{\sigma}_\beta^\alpha(w_2) = w_2.$$

A \mathbf{B} bázisban a $\vec{\sigma}_\beta^\alpha$ lineáris tükrözés mátrixa

$$[\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A koordinátacsere képlete segítségével kiszámoljuk a $\vec{\sigma}_\beta^\alpha$ mátrixát a kanonikus bázisban:

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}} &= T_{\mathbf{EB}}[\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}}T_{\mathbf{BE}} = T_{\mathbf{EB}}[\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}}T_{\mathbf{EB}}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{E}} & [v_2]_{\mathbf{E}} & [w_1]_{\mathbf{E}} & [w_2]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix} [\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{E}} & [v_2]_{\mathbf{E}} & [w_1]_{\mathbf{E}} & [w_2]_{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85 & 54 & 11 & -52 \\ 29 & 19 & 4 & -18 \\ -8 & -5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53 & -32 & -6 & 32 \\ -4 & -5 & -2 & 4 \\ -108 & -64 & -11 & 64 \\ -112 & -70 & -14 & 69 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kiszámolhatjuk a szimmetria egyenletének szabadtagját is tudva, hogy a σ_β^α szimmetria a β pontjait fixen hagyja, vagyis $\sigma_\beta^\alpha(B) = B$. Mivel $B = (-1, 2, -3, 1) \in \beta$, azaz $B(-1, 2, -3, 1)_\mathcal{E}$, ezért

$$\begin{aligned} [\sigma_\beta^\alpha(O)]_\mathcal{E} &= -[\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}}[B]_\mathcal{E} + [\sigma_\beta^\alpha(B)]_\mathcal{E} = -[\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}}[B]_\mathcal{E} + [B]_\mathcal{E} \\ &= - \begin{bmatrix} -53 & -32 & -6 & 32 \\ -4 & -5 & -2 & 4 \\ -108 & -64 & -11 & 64 \\ -112 & -70 & -14 & 69 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -2 \\ -80 \\ -82 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Végül felírhatjuk a $\sigma_\beta^\alpha(B)$ szimmetria egyenletét a \mathcal{E} kanonikus koordináta-rendszerben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{[\sigma_\beta^\alpha(B)]_\mathcal{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -53 & -32 & -6 & 32 \\ -4 & -5 & -2 & 4 \\ -108 & -64 & -11 & 64 \\ -112 & -70 & -14 & 69 \end{bmatrix}}_{[\vec{\sigma}_\beta^\alpha]_{\mathbf{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[M]_\mathcal{E}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -40 \\ -2 \\ -80 \\ -82 \end{bmatrix}}_{[\sigma_\beta^\alpha(O)]_\mathcal{E}}.$$

A második módszerben metszet segítségével előbb a π_β^α projekció egyenletét számoljuk ki, majd használjuk, hogy $\sigma_\beta^\alpha = 2\pi_\beta^\alpha - 1_{\mathbb{R}^4}$. Legyen $M(x_1, x_2, x_3, x_4)_\mathcal{E}$ egy tetszőleges pont és $\alpha_M = t(\vec{\alpha}, M)$. Ekkor $\{\pi_\beta^\alpha(M)\} = \alpha_M \cap \beta$. Ennek a metszetnek a kiszámolásához felírjuk az α algebrai egyenletét, amely könnyen átírható az α_M algebrai egyenletébe. Felírjuk az

$$\begin{cases} s_1 - s_2 + 2s_3 + s_4 = 0 \\ -2s_1 + 3s_2 - 4s_3 - s_4 = 0 \end{cases}$$

segédrendszert, amely megoldáshalmazának egy bázisa $(d_1 = (-2, -1, 0, 1), d_2 = (-2, 0, 1, 0))$. Ez alapján az α_M algebrai egyenlete (y_1, y_2, y_3, y_4) ismeretlenekben

$$\begin{cases} -2(y_1 - x_1) - (y_2 - x_2) + (y_4 - x_4) = 0 \\ -2(y_1 - x_1) + (y_3 - x_3) = 0 \end{cases}. \quad (6.49)$$

Az $\alpha_M \cap \beta$ metszet kiszámolásához felírjuk a β paraméteres egyenletét:

$$\begin{cases} y_1 = -1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y_2 = 2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ y_3 = -3 + 5\lambda_1 - 7\lambda_2 \\ y_4 = 1 + 7\lambda_1 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Behelyettesítjük a (6.49) egyenletbe és kiszámoljuk a λ_1, λ_2 paramétereket az M pont x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátái függvényében:

$$\begin{cases} -2(-1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - x_1) - (2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 - x_2) + (1 + 7\lambda_1 - x_4) = 0 \\ -2(-1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 - x_1) + (-3 + 5\lambda_1 - 7\lambda_2 - x_3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda_2 + 2x_1 + x_2 - x_4 + 1 = 0 \\ -\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2x_1 - x_3 - 1 = 0 \end{cases},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = -8x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 - 6 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 2x_1 + x_2 - x_4 + 1.$$

Ezt visszahelyettesítve a β paraméteres egyenletébe megkapjuk a π_β^α projekció egyenletét:

$$\begin{cases} y_1 = -26x_1 - 16x_2 - 3x_3 + 16x_4 - 20 \\ y_2 = -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 \\ y_3 = -54x_1 - 32x_2 - 5x_3 + 32x_4 - 40 \\ y_4 = -56x_1 - 35x_2 - 7x_3 + 35x_4 - 41 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha(B)]_\mathcal{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -26 & -16 & -3 & 16 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -54 & -32 & -5 & 32 \\ -56 & -35 & -7 & 35 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha]_\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[M]_\mathcal{E}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -20 \\ -1 \\ -40 \\ -41 \end{bmatrix}}_{[\pi_\beta^\alpha(O)]_\mathcal{E}}.$$

Végül $\sigma_\beta^\alpha = 2\pi_\beta^\alpha - 1_{\mathbb{R}^4}$, ahonnan $[\sigma_\beta^\alpha(M)]_{\mathcal{E}} = 2[\pi_\beta^\alpha(M)]_{\mathcal{E}} - [M]_{\mathcal{E}}$. Tehát a σ_β^α szimmetria egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{[\sigma_\beta^\alpha(B)]_{\mathcal{E}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -53 & -32 & -6 & 32 \\ -4 & -5 & -2 & 4 \\ -108 & -64 & -11 & 64 \\ -112 & -70 & -14 & 69 \end{bmatrix}}_{[\sigma_\beta^\alpha]_{\mathcal{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{E}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -40 \\ -2 \\ -80 \\ -82 \end{bmatrix}}_{[\sigma_\beta^\alpha(O)]_{\mathcal{E}}}.$$

□

6.78. Példa

A 4-dimenziós \mathcal{X} affin térben tekintjük az $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3, e_4)$ Descartes-féle koordináta rendszert. Ebben a koordináta-rendszerben adottak az

$$\alpha : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \beta : \begin{cases} x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 + 2x_1 = 4 \end{cases}$$

síkok.

- Írjuk fel az α sík mentén β síkra vonatkozó σ szimmetria egyenleteit!
- Számoljuk ki az $A(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$ pont szimmetrikusát a β síkra vonatkozóan az α sík mentén!
- Ellenőrizzük, hogy $\sigma \circ \sigma = 1_{\mathcal{X}}$.

◇

Megoldás.

- Az α sík mentén a β síkra vonatkozó σ szimmetria az α sík mentén a β síkra való $\pi = \pi_\beta^\alpha$ projekcióhoz rendelt szimmetria, vagyis $\sigma = 2\pi - 1_{\mathcal{X}}$.

Ezért először felírjuk az α sík mentén a β síkra való π projekció egyenletét. Ezt már kiszámoltuk a 6.69. Példa megoldásában:

$$[\pi(M)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Innen

$$\begin{aligned} [\sigma(M)]_{\mathcal{R}} &= 2[\pi(M)]_{\mathcal{R}} - [M]_{\mathcal{R}} = 2 \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \\ &= \left(2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) [M]_{\mathcal{R}} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Az $A(1, 1, 1, 1)_{\mathcal{R}}$ pont szimmetrikusa a β síkra vonatkozóan az α sík mentén:

$$[\sigma(A)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Teljesül a $\sigma \circ \sigma = 1_{\mathcal{X}}$ reláció, mivel

$$\begin{aligned} [\sigma(\sigma(M))]_{\mathcal{R}} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} [\sigma(M)]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}^2 [M]_{\mathcal{R}} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = [M]_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

□

6.8. Homotétia vagy középpontos hasonlóság

6.79. Értelmezés

Legyen $C \in \mathcal{X}$ az \mathcal{X} affin tér egy rögzített pontja és $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ egy rögzített skalár. A $h_{C,k}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $h_{C,k}(M) = (1-k) \cdot C + k \cdot M$ függvényt C középpontú és k arányú homotétiának vagy középpontos hasonlóságnak nevezzük. Az $C \in \mathcal{X}$ középpontú homotétiák halmaza

$$\mathcal{H}_C(\mathcal{X}) = \{h_{C,k} \mid k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}.$$

6.80. Tulajdonság

Minden C középpontú $k \neq 0$ arányú $h_{C,k}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ homotétia egy affin endomorfizmus, amelynek nyoma $\vec{h}_{C,k} = k \cdot 1_{\vec{\mathcal{X}}}$.

Bizonyítás. Mivel $h_{C,k}(M) = (1-k) \cdot C + k \cdot M$, minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén, ezért $h_{C,k}$ felírható a konstans $f \equiv C$ és az $1_{\mathcal{X}}$ identikus függvény $(1-k)$ és k súlyokkal vett affin kombinációjaként, így a 6.18. Tulajdonság alapján $h_{C,k}$ affin függvény.

A homotétia nyomát a következőképpen határozzuk meg: minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\begin{aligned} \vec{h}_{C,k}(\overrightarrow{AB}) &= \vec{h}_{C,k}(B - A) = \vec{h}_{C,k}(B) - \vec{h}_{C,k}(A) = \\ &= [(1-k)C + kB] - [(1-k)C + kA] = k(B - A) = k\overrightarrow{AB}, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $\vec{h}_{C,k} = k \cdot 1_{\vec{\mathcal{X}}}$.

□

A homotétia jellemezhető a $\overrightarrow{Ch_{C,k}(M)} = k \cdot \overrightarrow{CM}$, minden $M \in \mathcal{X}$, relációval.

6.81. Tulajdonság (Homotétia egyenlete)

Legyen \mathcal{R} az \mathcal{X} affin tér egy Descartes-féle koordináta-rendszere, amelynek O az origója. Ekkor minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$[h_{C,k}(M)]_{\mathcal{R}} = k \cdot [M]_{\mathcal{R}} + (1-k) \cdot [C]_{\mathcal{R}}.$$

Ha $O = C$ vagyis a koordináta-rendszer origója megegyezik a homotétia középpontjával, akkor

$$[h_{C,k}(M)]_{\mathcal{R}} = k \cdot [M]_{\mathcal{R}}.$$

Bizonyítás. Mivel $h_{C,k}(M) = (1-k) \cdot C + k \cdot M$, ezért minden $M \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$[h_{C,k}(M)]_{\mathcal{R}} = [(1-k) \cdot C + k \cdot M]_{\mathcal{R}} = (1-k) \cdot [C]_{\mathcal{R}} + k \cdot [M]_{\mathcal{R}}.$$

Ha $O = C$, akkor $[C]_{\mathcal{R}} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ a nullmátrix és $[h_{C,k}(M)]_{\mathcal{R}} = k \cdot [M]_{\mathcal{R}}$. □

6.82. Tulajdonság

Legyen \mathcal{X} affin tér.

- (i) Minden C középpontú és $k \neq 1$ arányú $h_{C,k}$ homotétiának az egyetlen fixpontja a C középpont, vagyis $\text{Fix}(h_{C,k}) = \{C\}$.
- (ii) Minden $C \in \mathcal{X}$ esetén ha $k = 1$, akkor $h_{C,1} = 1_{\mathcal{X}}$.
- (iii) Ha $k_1 k_2 \neq 1$, akkor a C_1 középpontú k_1 arányú h_{C_1,k_1} homotétia és a C_2 középpontú k_2 arányú h_{C_2,k_2} homotétia összetétele egy $C = \frac{(1-k_1)C_1 + k_1(1-k_2)C_2}{1-k_1 k_2}$ középpontú $k_1 k_2$ arányú homotétia, vagyis $h_{C_1,k_1} \circ h_{C_2,k_2} = h_{C,k_1 k_2}$.
- (iv) A C_1 középpontú k arányú $h_{C_1,k}$ homotétia és a C_2 középpontú k^{-1} arányú $h_{C_2,k^{-1}}$ homotétia összetétele egy $(1-k)\overrightarrow{C_2 C_1}$ vektorral való eltolás, vagyis $h_{C_1,k} \circ h_{C_2,k^{-1}} = t_{(1-k)\overrightarrow{C_2 C_1}}$.
- (v) A C középpontú k_1 arányú h_{C,k_1} homotétia és a C középpontú k_2 arányú h_{C,k_2} homotétia összetétele egy C középpontú és $k_1 k_2$ arányú homotétia, vagyis $h_{C,k_1} \circ h_{C,k_2} = h_{C,k_1 k_2}$.
- (vi) Minden C középpontú k arányú homotétia affinitás, amelynek inverze szintén C középpontú, de k^{-1} arányú homotétia, vagyis $(h_{C,k})^{-1} = h_{C,k^{-1}}$.
- (vii) A (\mathcal{H}_C, \circ) egy csoport és $\chi: (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathcal{H}_C, \circ)$, $\chi(k) = h_{C,k}$ egy csoportizomorfizmus.
- (viii) Legyen $C \in \mathcal{X}$ egy pont, $k \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ skalár és $v \in \vec{\mathcal{X}}$ egy vektor. Ekkor $h_{C,k} \circ t_v = h_{C',k}$, ahol $C' = t(\frac{k}{1-k}v, C) \in \mathcal{X}$, illetve $t_v \circ h_{C,k} = h_{C'',k}$, ahol $C'' = t(\frac{1}{1-k}v, C) \in \mathcal{X}$.
- (ix) A homotétiák és eltolások halmaza az összetétellel csoportot alkot, amelyet homotétia-eltolás csoportnak nevezünk.

Bizonyítás.

- (i) Ha $M \in \mathcal{X}$ a $h_{C,k}$, $k \neq 1$ homotétia fixpontja, akkor

$$\begin{aligned} h_{C,k}(M) = M &\iff (1-k)C + kM = M \iff (1-k)\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM} \\ &\iff (1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{MC} = \vec{0} \iff M = C. \end{aligned}$$

(ii) Minden $M \in \mathfrak{X}$ pont esetén $h_{C,1}(M) = (1-1) \cdot C + 1 \cdot M = M = 1_{\mathfrak{X}}(M)$, tehát $h_{C,1} = 1_{\mathfrak{X}}$.

(iii) Minden $M \in \mathfrak{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} (h_{C_1,k_1} \circ h_{C_2,k_2})(M) &= h_{C_1,k_1}((1-k_2)C_2 + k_2M) \\ &= (1-k_1)C_1 + k_1(1-k_2)C_2 + k_1k_2M \\ &= (1-k_1k_2) \frac{(1-k_1)C_1 + k_1(1-k_2)C_2}{1-k_1k_2} + k_1k_2M \\ &= h_{C,k_1k_2}(M), \end{aligned}$$

ahol $C = \frac{(1-k_1)C_1 + k_1(1-k_2)C_2}{1-k_1k_2}$ a C_1 és C_2 pontok $\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}$ és $\frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}$ súlyokkal vett affin kombinációja.

(iv) Minden $M \in \mathfrak{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} (h_{C_1,k} \circ h_{C_2,k^{-1}})(M) &= h_{C_1,k}((1-k^{-1})C_2 + k^{-1}M) \\ &= (1-k)C_1 + k(1-k^{-1})C_2 + kk^{-1}M \\ &= (1-k)C_1 - (1-k)C_2 + M \\ &= (1-k)(C_1 - C_2) + M \\ &= t((1-k)\overrightarrow{C_2C_1}, M). \end{aligned}$$

(v) Minden $M \in \mathfrak{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} (h_{C,k_1} \circ h_{C,k_2})(M) &= h_{C,k_1}((1-k_2)C + k_2M) \\ &= (1-k_1)C + k_1(1-k_2)C + k_1k_2M \\ &= (1-k_1k_2)C + k_1k_2M \\ &= h_{C,k_1k_2}(M). \end{aligned}$$

(vi) A (v) alpont alapján $h_{C,k}$ és $h_{C,k^{-1}}$ homotétiák egymás inverzei, ezért minden homotétia affinitás.

(vii) A (v) és (vi) alpontok alapján.

(viii) Legyenek $A, B \in \mathfrak{X}$ pontok úgy, hogy $v = \overrightarrow{AB} = B - A$. Minden $M \in \mathfrak{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} (h_{C,k} \circ t_v)(M) &= h_{C,k}(M + B - A) = (1-k)C + k(M + B - A) \\ &= (1-k) \left(C + \frac{k}{1-k}B - \frac{k}{1-k}A \right) + kM = h_{C',k}(M), \end{aligned}$$

ahol $C' = C + \frac{k}{1-k}(B - A) = t(k(1-k)^{-1}\overrightarrow{AB}, C) = t(k(1-k)^{-1}v, C)$.

Minden $M \in \mathfrak{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} (t_v \circ h_{C,k})(M) &= t_v((1-k)C + kM) = (1-k)C + kM + B - A \\ &= (1-k) \left(C + \frac{1}{1-k}B - \frac{1}{1-k}A \right) + kM \\ &= h_{C'',k}(M), \end{aligned}$$

ahol $C'' = (1-k) \left(C + \frac{1}{1-k}B - \frac{1}{1-k}A \right) = t((1-k)^{-1}\overrightarrow{AB}, C) = t((1-k)^{-1}v, C)$.

(ix) A (viii) alpont alapján.

□

7. fejezet

Osztásviszony

Kollineáris vektorok összehasonlíthatók egymással anélkül, hogy a hossz fogalmára lenne szükség és erre fog szolgálni az osztásviszony fogalma. A leggyakrabban valós affin terekkel van dolgunk és ebben az esetben az osztásviszony szakaszok előjeles arányának felel meg, vagyis az osztásviszony visszaírható a már megszokott szakaszok hosszának arányaként. Ez fordítva is igaz. Egy egyenesen lévő és egy közös végponttal rendelkező szakaszok arányát átírhatjuk osztásviszonyra, ha figyelembe vesszük a szakaszok által meghatározott vektorok irányítását is. Az osztásviszony másik előnye a szakaszok hosszának arányához képest, hogy segítségével általánosabban megfogalmazhatók, kezelhetők a problémák, ahogy a Thalész fordított tételénél is látni fogjuk.

Az osztásviszonyt párhuzamosság, összefutás, kollinearitás/koplanaritás jellemzésére fogjuk használni. Ehhez igazoljuk és általánosítjuk Thalész tételét, illetve fordított tételét, Meneláosz tételét, illetve fordított tételét, Ceva tételét, illetve fordított tételét, végül pedig Desargues tételét. A 7.2.4. alfejezetben igazolunk egy metszés lemmát, amely hasznos eszköz bizonyos típusú problémák megoldásában. Ebbe a témakörbe tartozó megoldott feladatok találhatók az [1] könyv 2. fejezetében.

7.1. Kollineáris pontok osztásviszonya

Legyen \mathcal{X} egy affin tér, melynek $\vec{\mathcal{X}}$ iránytere egy \mathbb{K} -vektortér.

7.1.1. Kollineáris vektorok összehasonlítása

Ha az A, B, C pontok kollineárisak és $B \neq C$, akkor létezik egyetlen $\mu \in \mathbb{K}$ skalár úgy, hogy $\overrightarrow{CA} = \mu \cdot \overrightarrow{CB}$. Ezt a μ skalárt $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ -vel fogjuk jelölni és azt fejezi ki, hogy a \overrightarrow{CA} vektor hányszorosa a \overrightarrow{CB} vektornak, vagyis

$$\overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \overrightarrow{CB}. \quad (7.1)$$

Mivel $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, ezért $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{BC}} = -\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ és $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$, továbbá ha $A = B$, akkor $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CA}} = 1$.

A 7.1.4. alfejezetben látni fogjuk valós affin tér esetén $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ a $[CA]$ és $[CB]$ szakaszok hosszának előjeles arányával egyezik meg, ezért is vezettük be ezt a jelölést. Ennek a jelölésnek a hátránya, hogy azt sugallja, hogy a \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} értékek arányáról van szó, de valójában ezek az értékek kanonikusan nem értelmezettek. Szükség esetén a \overrightarrow{CA} -nak és \overrightarrow{CB} -nek tudunk értéket adni úgy,

hogy ezen értékek aránya egyenlő legyen a $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ -vel, de ehhez a \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorokat egy velük kollineáris vektorhoz fogjuk hasonlítani. Ilyen vektort többféleképpen is megválaszthatunk, ezért a választás nem kanonikus, így a \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} értékei sem lesznek kanonikusan adottak.

Mivel az A, B, C pontok kollineárisak és $C \neq B$, ezért a \overrightarrow{CA} és $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ lineárisan függő vektorok felírhatók egy $v \in \vec{\mathcal{X}}$, $v \neq \vec{0}$ vektor többszöröseként, vagyis léteznek $k_A, k_B \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy $\overrightarrow{CA} = k_A \cdot v$ és $\overrightarrow{CB} = k_B \cdot v$. Ekkor a $\overrightarrow{CA} = k_A$ és $\overrightarrow{CB} = k_B \neq 0$ értékek választása esetén

$$\overrightarrow{CA} = k_A \cdot v = \frac{k_A}{k_B} \cdot k_B \cdot v = \frac{k_A}{k_B} \cdot \overrightarrow{CB}$$

és a (7.1) alapján $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{k_A}{k_B}$. Ha $w \in \vec{\mathcal{X}}$ egy olyan vektor, hogy $v = h \cdot w$, ahol $h \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor $\overrightarrow{CA} = k'_A \cdot w$ és $\overrightarrow{CB} = k'_B \cdot w$, ahol $k'_A = k_A h$ és $k'_B = k_B h$. Ekkor választhatjuk a $\overrightarrow{CA} = k'_A$ és $\overrightarrow{CB} = k'_B \neq 0$ értékeket is, és szintén $\frac{k'_A}{k'_B} = \frac{k_A h}{k_B h} = \frac{k_A}{k_B} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$. Tehát \overrightarrow{CA} -nak és \overrightarrow{CB} -nek többféleképpen adhatók olyan értékek, amelyekre az arányuk megegyezik a $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ -vel.

Minden D pontra, amely szintén kollineáris az A, B, C pontokkal teljesül, hogy $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$, ezért

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \overrightarrow{CB},$$

ahonnan $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{CB}} + \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{CB}}$ és formálisan írhatjuk, hogy $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{CB}}$. Tehát a számlálóban levő \overrightarrow{CA} szimbólummal formálisan úgy dolgozhatunk, mint vektorokkal, vagyis „ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ ”.

7.1.2. Három kollineáris pont osztásviszonya

Az A és B különböző pontok által meghatározott AB egyenes minden C pontja egyértelműen felírható

$$C = (1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B \quad (7.2)$$

alakba, ahol $\lambda \in \mathbb{K}$. Ez a $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár meghatározza a C pont helyzetét az AB egyenesen, az A és B pontokhoz képest. Az affin kombináció értelmezése alapján a (7.2) összefüggés egyenértékű a

$$\overrightarrow{OC} = (1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB} \quad (7.3)$$

egyenlőséggel tetszőleges $O \in \mathcal{X}$ pontra. Az $O = C$ esetben a (7.3) alapján

$$\vec{0} = \overrightarrow{CC} = (1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{CA} + \lambda \cdot \overrightarrow{CB},$$

ahonnan kapjuk, hogy $(\lambda - 1) \cdot \overrightarrow{CA} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Ha $\lambda \neq 1$, vagyis $C \neq B$, akkor oszthatunk $(\lambda - 1)$ -gyel és kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{CA} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \overrightarrow{CB}. \quad (7.4)$$

Ez alapján bevezetjük a következő fogalmat.

7.1. Értelmezés

Legyenek $A \neq B$ és $C = (1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B$ pontok az \mathcal{X} affin térben, ahol $C \neq B$, vagyis $\lambda \neq 1$.

Az A, B, C pontok *osztásviszonya* (más szóval *osztóviszonya*)

$$R(A, B; C) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \in \mathbb{K}.$$

7.2. Megjegyzés

A gyakorlatban sokszor az A , B és $C = \alpha A + \beta B$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \neq 0$ pontok osztásviszonyát kell felírni:

$$R(A, B; C) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\beta}{\beta - 1} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad (7.5)$$

mivel $\lambda = \beta$ és $\lambda - 1 = \beta - 1 = -\alpha$. \diamond

7.1.3. Osztásviszony tulajdonságai

Az osztásviszony meghatározza a pont helyzetét az egyenesen, továbbá az osztásviszony nem veszi fel az $1 \in \mathbb{K}$ értéket, mivel $A \neq B$.

7.3. Tulajdonság

Ha $A \neq B$, akkor az osztásviszony egy bijektív

$$R(A, B; -): AB \setminus \{B\} \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{1\}, \quad C \mapsto R(A, B; C) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

leképezést értelmez, amelynek inverze

$$R(A, B; -)^{-1}: \mathbb{K} \setminus \{1\} \rightarrow AB \setminus \{B\}, \quad \mu \mapsto C = \frac{-1}{\mu - 1}A + \frac{\mu}{\mu - 1}B.$$

Bizonyítás. Legyen $C = (1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B$, ahol $\lambda \neq 1$, mivel $C \neq B$. Ekkor a 7.1. Értelmezés alapján $R(A, B; C) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, így ha $R(A, B; C) = 1$, akkor

$$1 = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \iff \lambda - 1 = \lambda \iff -1 = 0,$$

ami ellentmondáshoz vezet. Tehát $R(A, B; C) \neq 1$ és az $R(A, B; -)$ leképezés jól értelmezett.

Az $R(A, B; -)$ bijektivitásának igazolásához kiszámítjuk az inverzét. Ha $\mu = R(A, B; C)$, akkor törtek származtatásával

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \iff \frac{\mu}{1 - \mu} = \frac{\lambda}{(\lambda - 1) - \lambda} \iff \frac{\mu}{1 - \mu} = -\lambda \iff \frac{\mu}{\mu - 1} = \lambda,$$

vagyis ha $R(A, B; C) = \mu \neq 1$, akkor $C = \frac{-1}{\mu - 1}A + \frac{\mu}{\mu - 1}B$ és $C \neq B$. \square

7.4. Következmény

Az $R(A, B; C) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ osztásviszony egyértelműen meghatározza az AB egyenes $C \neq B$ pontjának helyzetét az A és B pontokhoz képest. Pontosabban,

$$R(A, B; C) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \mu \iff C = \frac{-1}{\mu - 1}A + \frac{\mu}{\mu - 1}B.$$

Ha az osztásviszonyban felcseréljük a pontok sorrendjét, akkor a következő relációkat kapjuk.

7.5. Tulajdonság

Ha A, B, C páronként különböző kollineáris pontok, akkor

$$(i) \quad R(A, C; B) = 1 - R(A, B; C), \quad \text{vagyis} \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 1 - \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}};$$

$$(ii) \quad R(B, A; C) = \frac{1}{R(A, B; C)}, \text{ vagyis } \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} = \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \right)^{-1}.$$

Bizonyítás.

$$(i) \quad \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(1 - \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \right) \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ ahonnan } \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = 1 - \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}.$$

$$(ii) \quad \overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} \cdot \overrightarrow{CA}, \text{ ezért } \overrightarrow{CA} = \left(\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} \right)^{-1} \cdot \overrightarrow{CB}, \text{ így } \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} = \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \right)^{-1}.$$

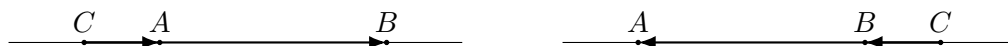
□

7.1.4. Osztásviszony, mint szakaszok hosszának előjeles aránya

Valós \mathcal{X} affin tér (vagyis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) esetén az osztásviszony a szakaszok hosszának arányával hozható kapcsolatba. Eddig még nem beszéltünk szakaszok hosszáról, erre majd az euklideszi affin terek bevezetése után kerül sor. Ezért ebben az alfejezetben a már tanult analitikus geometriai ismeretekre és intuícióira fogunk támaszkodni. Röviden az $[AB]$ szakasz $|AB|$ hossza alatt az \overrightarrow{AB} vektor hosszát értjük.

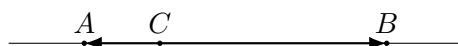
Legyenek $A, B, C \in \mathcal{X}$ kollineáris pontok ($C \neq B$). Jelölje $|CA|$ a \overrightarrow{CA} , illetve $|CB|$ a \overrightarrow{CB} vektorok (vagyis a $[CA]$ és $[CB]$ szakaszok) hosszát.

- Ha a \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorok azonos irányításúak (vagyis a C pont az AB egyenesről nem az A és B pontok között van) akkor $\overrightarrow{CA} = \frac{|CA|}{|CB|} \cdot \overrightarrow{CB}$, ahonnan $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{|CA|}{|CB|} > 0$.



Ha C és B az A pont különböző oldalán vannak, akkor $0 < \frac{|CA|}{|CB|} < 1$, illetve ha C és B az A pont azonos oldalán vannak, akkor $1 < \frac{|CA|}{|CB|}$.

- Ha \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorok ellentétes irányításúak (vagyis a C pont az A és B pontok között van), akkor $\overrightarrow{CA} = -\frac{|CA|}{|CB|} \cdot \overrightarrow{CB}$, ahonnan $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{|CA|}{|CB|} < 0$.



- Ha $\overrightarrow{CA} = \vec{0}$, vagyis $C = A$, akkor $\overrightarrow{CA} = 0 \cdot \overrightarrow{CB}$, ahonnan $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = 0$.

Tehát valós affin tér esetén a $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ osztásviszony a $[CA]$ és $[CB]$ szakaszok előjeles arányának tekinthető, amely figyelembe veszi a szakaszok végpontjai által meghatározott vektorok egymáshoz viszonyított irányítását is.

Általános affin tér esetén, mikor a test $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$, akkor nem beszélünk a $[CA]$ és $[CB]$ szakaszokról (így a hosszúkról sem), mivel nem tudjuk, hogy milyen pontok vannak a C és A , illetve C és B végpontok között. Ehhez arra lenne szükség, hogy tudjunk beszélni a \mathbb{K} test két eleme között található elemekről, tehát a \mathbb{K} (teljesen) rendezett test kellene legyen.

7.1.5. Az affin függvény megőrzi az osztásviszonyt

7.6. Tulajdonság

Az \mathcal{X} és \mathcal{Y} valós affin terek közötti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény az $A, B \in \mathcal{X}$ különböző pontokat az $f(A), f(B) \in \mathcal{Y}$ különböző pontokba képezi. Ha $C \in AB$ úgy, hogy $C \neq B$, akkor $f(C) \in f(A)f(B)$, $f(C) \neq f(B)$ és

$$\frac{\overline{f(C)f(A)}}{\overline{f(C)f(B)}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.$$

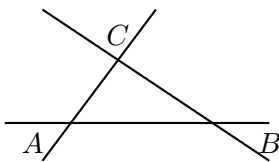
Bizonyítás. Mivel $C \in AB$, $C \neq B$ ezért létezik egyetlen $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ úgy, hogy $C = (1-\gamma)A + \gamma B$, ahonnan a (7.5) alapján $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Mivel az f függvény affin, ezért

$$f(C) = f((1-\gamma)A + \gamma B) = (1-\gamma)f(A) + \gamma f(B) \in f(A)f(B),$$

továbbá $f(C) \neq f(B)$ és $\frac{\overline{f(C)f(A)}}{\overline{f(C)f(B)}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ a (7.5) alapján. \square

7.2. Az osztásviszony alkalmazásai

Egy \mathcal{X} affin térben az ABC háromszög alatt az A, B, C nem kollineáris ponthármast értjük, ami egyenértékű azzal, hogy az A, B, C pontok affin függetlenek (vagyis az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ vektorok lineárisan függetlenek). Ha \mathcal{X} egy általános affin tér, amelynek iránytere egy \mathbb{K} -vektortér, akkor nem beszélhetünk az ABC háromszög oldalairól (az $[AB], [BC], [CA]$ szakaszokról), csak a háromszög oldalegyeneséről (az AB, BC, CA egyenesekről). Hasonlóan nem beszélhetünk a háromszög belsejében lévő pontokról sem. Csak valós affin tér esetén tudunk a háromszög oldalairól és a belsejében lévő pontokról beszélni.



7.1. ábra. Az ABC háromszög oldalegyenesei.

7.7. Értelmezés

Egy \mathcal{X} affin térben $A_0 A_1 \dots A_n$ egy n -szimplex, ha az A_0, A_1, \dots, A_n pontok affin függetlenek, vagyis az $\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Az n -szimplex általánosítja a háromszög és a tetraéder fogalmát. A 2-szimplex a háromszög, míg a 3-szimplex a tetraéder. Az értelmezésből az is következik, hogy az \mathcal{X} affin tér legalább n -dimenziós kell legyen, hogy létezzen benne n -szimplex (ahogy az analitikus mértanban tanult intuitív síkban sem létezik tetraéder, csak háromszög).

7.2.1. Thalész tétele és fordított tétele

Ebben az alfejezetben Thalész tételét és fordított tételét fogjuk igazolni általános affin tér esetén. Általában az oldalhosszak arányának segítségével fogalmazzák meg ezt a tételt. Az általunk bizonyított verzióban az oldalhosszak aránya helyett osztásviszonyt használunk, és ezzel azt

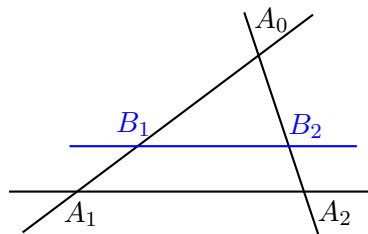
látjuk be, hogy a hossz fogalma nélkül is igazolható Thalész tétele. Továbbá az osztásviszony fogalma (vagy valós esetben a szakaszok hosszának előjeles aránya) egyszerűbbé teszi a fordított tétel megfogalmazását. Ez a tétel szolgál az első alkalmazásként, amelyben az osztásviszonyt a párhuzamosság jellemzésére használjuk. Először Thalész tételét és fordított tételét a háromszögre igazoljuk, majd általánosítjuk n -szimplexre.

7.2.1.1. Thalész tétele a háromszögre

7.8. Tétel (Thalész tétele a háromszögre)

Egy affin tér $A_0A_1A_2$ háromszögének A_0A_1 és A_0A_2 oldalegyenesein felvesszük a B_1 és B_2 pontokat, amelyek nem esnek egybe az A_0 csúccsal. Ha $B_1B_2 \parallel A_1A_2$, akkor

$$\frac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{B_1A_0}} = \frac{\overrightarrow{B_2A_2}}{\overrightarrow{B_2A_0}}.$$



7.2. ábra. Thalész tétele az $A_0A_1A_2$ háromszögre és B_1B_2 szellőre.

Első bizonyítás. Mivel $B_1 \in A_0A_1$ és $B_2 \in A_0A_2$, ezért egyértelműen léteznek $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ skalárok úgy, hogy $B_1 = (1 - \beta_1)A_1 + \beta_1A_0$ és $B_2 = (1 - \beta_2)A_2 + \beta_2A_0$, ahonnan

$$\overrightarrow{A_0B_1} = (1 - \beta_1)\overrightarrow{A_0A_1} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{A_0B_2} = (1 - \beta_2)\overrightarrow{A_0A_2}. \quad (7.6)$$

A 7.4. Következmény alapján elég igazolni, hogy $\beta_1 = \beta_2$.

Megjegyezzük, hogy létezik a B_1B_2 egyenes, mert $B_1 \neq B_2$, különben az A_0, A_1, A_2 pontok kollineárisak lennének. Ha $\mathcal{D}(A_1A_2)$ az A_1A_2 , illetve $\mathcal{D}(B_1B_2)$ a B_1B_2 egyenes iránytere, akkor a következő egyenértékű állításokból

$$B_1B_2 \parallel A_1A_2 \iff \mathcal{D}(B_1B_2) = \mathcal{D}(A_1A_2) \iff \langle \overrightarrow{B_1B_2} \rangle = \langle \overrightarrow{A_1A_2} \rangle \quad (7.7)$$

következik, hogy létezik $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ skálár úgy, hogy $\overrightarrow{B_1B_2} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}$. Felbontjuk a vektorokat

$$\overrightarrow{B_1A_0} + \overrightarrow{A_0B_2} = \lambda \overrightarrow{A_1A_0} + \lambda \overrightarrow{A_0A_2}.$$

A bal oldalra behelyettesítjük a (7.6) összefüggéseket és kapjuk, hogy

$$(1 - \beta_1)\overrightarrow{A_1A_0} + (1 - \beta_2)\overrightarrow{A_0A_2} = \lambda \overrightarrow{A_1A_0} + \lambda \overrightarrow{A_0A_2}. \quad (7.8)$$

Mivel $A_0A_1A_2$ háromszög, ezért az A_0, A_1, A_2 affin független pontok, így az $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}$ vektorok lineárisan függetlenek. Ezért a (7.8) két oldalán azonosíthatjuk a megfelelő vektorok együtthatóit

és kapjuk, hogy $1 - \beta_1 = \lambda = 1 - \beta_2$, tehát $\beta_1 = 1 - \lambda = \beta_2$ és ahonnan az osztásviszony

7.1. Értelmezése szerint

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_0}}.$$

□

Második bizonyítás. Legyen $\mathcal{X} = \text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ az $A_0A_1A_2$ háromszög síkja és legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az A_1A_2 egyenessel párhuzamosan az A_0A_2 egyenesre való vetítés. Ekkor $f(A_0) = A_0$ és $f(A_1) = f(A_2) = A_2$, továbbá a $B_1B_2 \parallel A_1A_2$ és $B_2 \in A_0A_2$ miatt $f(B_1) = f(B_2) = B_2$. Mivel f affin, ezért a 7.6. Tulajdonság alapján

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\overline{f(B_1)f(A_1)}}{\overline{f(B_1)f(A_0)}} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_0}}.$$

□

Valós affin tér ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) esetén a $\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_0}}$ osztásviszonyok egyenlőségéből következik a szakaszok hosszára vonatkozó $\frac{|B_1A_1|}{|B_1A_0|} = \frac{|B_2A_2|}{|B_2A_0|}$ egyenlőség is, így ebben az esetben a következőképpen fogalmazható meg Thalész tétele.

7.9. Tétel (Thalész tétele a háromszögre valós affin terekben)

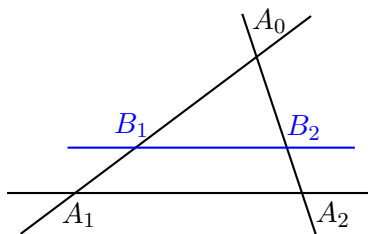
Egy valós affin tér $A_0A_1A_2$ háromszögének A_0A_1 és A_0A_2 oldalegyenesein felvesszük a B_1 és B_2 pontokat, amelyek nem esnek egybe az A_0 csúccsal. Ha $B_1B_2 \parallel A_1A_2$, akkor

$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1A_0|} = \frac{|A_2B_2|}{|B_2A_0|}.$$

7.2.2. Thalész fordított tétele a háromszögre

7.10. Tétel (Thalész fordított tétele a háromszögre)

Egy affin tér $A_0A_1A_2$ háromszögének A_0A_1 és A_0A_2 oldalegyenesein felvesszük a B_1 és B_2 pontokat, amelyek nem esnek egybe az A_0 csúccsal. Ha $\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_0}}$, akkor $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.



7.3. ábra. Thalész fordított tétele az $A_0A_1A_2$ háromszögre és B_1B_2 szellőre.

Első bizonyítás. A (7.7) egyenértékű állítások miatt elég igazolni, hogy létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy $\overrightarrow{B_1B_2} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}$. Tulajdonképpen az előző bizonyítást visszafele fogjuk leírni.

A 7.3. Tulajdonság szerint a $\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_0}}$ egyenlőségből következik, hogy a B_1 és B_2 pontoknak megegyeznek az (A_0, A_1) , illetve (A_0, A_2) pontrendszerek szerinti baricentrikus koordinátái, vagyis

$$B_1 = (1 - \beta)A_0 + \beta A_1 \quad \text{és} \quad B_2 = (1 - \beta)A_0 + \beta A_2. \quad (7.9)$$

A (7.9) alapján $\overrightarrow{A_0B_1} = \beta \overrightarrow{A_0A_1}$ és $\overrightarrow{A_0B_2} = \beta \overrightarrow{A_0A_2}$, amelyeket kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_0B_2} - \overrightarrow{A_0B_1} = \beta \overrightarrow{A_0A_2} - \beta \overrightarrow{A_0A_1} = \beta \overrightarrow{A_1A_2},$$

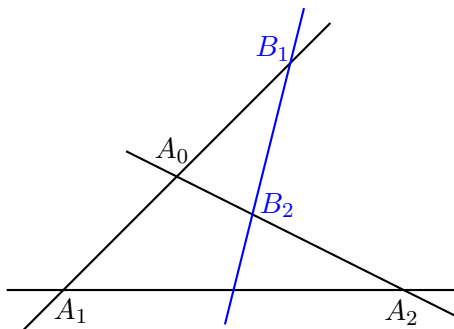
tehát $\mathcal{D}(B_1B_2) = \langle \overrightarrow{B_1B_2} \rangle = \langle \overrightarrow{A_1A_2} \rangle = \mathcal{D}(A_1A_2)$, vagyis $B_1B_2 \parallel A_1A_2$. \square

Második bizonyítás. Legyen $\mathcal{X} = \text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ az $A_0A_1A_2$ háromszög síkja, továbbá legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az A_1A_2 egyenessel párhuzamosan az A_0A_2 egyenesre való vetítés. Ekkor $f(A_0) = A_0$ és $f(A_1) = f(A_2) = A_2$. Legyen $C \in A_0A_1$ pont úgy, hogy $f(C) = B_2 \in A_0A_2$, így $CB_2 \parallel A_1A_2$.

A 7.6. Tulajdonság alapján

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{B_2A_0}} = \frac{\overline{f(C)f(A_1)}}{\overline{f(C)f(A_0)}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_0}},$$

ahonnan a 7.4. Következmény alapján $B_1 = C$, így $B_1B_2 \parallel A_1A_2$. \square



7.4. ábra. Ellenpélda Thalész fordított tételére, ha osztásviszony helyett csak szakaszok hosszának arányát vesszük.

7.11. Megjegyzés

Valós affin tér esetén csak a $\frac{|B_1A_1|}{|B_1A_0|} = \frac{|B_2A_2|}{|B_2A_0|}$ egyenlőségből nem következik a $B_1B_2 \parallel A_1A_2$ párhuzamosság. Ahogy a 7.4. ábrán látható, ha $|A_1A_0| = |A_0B_1|$, $2|A_0B_2| = |B_2A_2|$, akkor $\frac{|B_1A_1|}{|B_1A_0|} = \frac{|B_2A_2|}{|B_2A_0|} = 2$, de $B_1B_2 \nparallel A_1A_2$. Szükséges még a következő feltétel is: a B_1 , illetve B_2 pontok egyidejűleg az $[A_0A_1]$, illetve $[A_0A_2]$ oldalakon vannak vagy az oldalak meghosszabbításain. Tehát az osztásviszony a szakaszok hosszának arányaival ellentétben különbséget tud tenni a között, hogy az osztópont a szakaszon belül vagy kívül helyezkedik el. \diamond

7.12. Tétel (Thalész fordított tétele a háromszögre valós affin terek esetén)

Egy valós affin tér $A_0A_1A_2$ háromszögének A_0A_1 és A_0A_2 oldalegyenesein felvesszük a B_1 és B_2 pontokat, amelyek nem esnek egybe az A_0 csúccsal. Ha B_1 , illetve B_2 pont az (A_0A_1) , illetve (A_0A_2) szakaszokon található (vagy mindkettő azokon kívül) és $\frac{|A_1B_1|}{|B_1A_0|} = \frac{|A_2B_2|}{|B_2A_0|}$, akkor $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

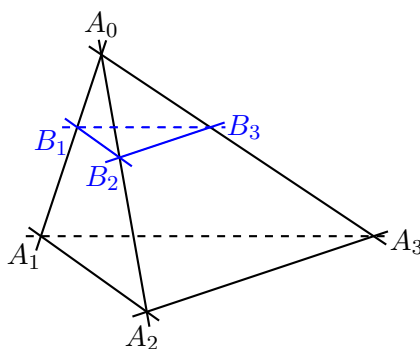
Thalész tételének és fordított tételének általánosítása

Emlékeztetünk, hogy az $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\}$ affin burkoló a B_1, \dots, B_n pontok által kifeszített affin részteret (síkot) jelenti.

7.13. Tétel (Thalész tétele az n -szimplexre)

Egy affin tér $A_0A_1 \dots A_n$ n -szimplexének az A_0 csúcson áthaladó élegyenesein felvesszük a $B_i \in A_0A_i$ pontokat úgy, hogy $B_i \neq A_0$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ha a B_1, B_2, \dots, B_n pontok síkja párhuzamos az A_1, A_2, \dots, A_n pontok síkjával, vagyis $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\} \parallel \text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$, akkor

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \dots = \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{B_nA_0}}.$$



7.5. ábra. Thalész-tétele az $A_0A_1A_2A_3$ tetraéderre (3-szimplexre) és a $B_0B_1B_2$ metsző síkra.

Első bizonyítás. Mivel $A_0A_1 \dots A_n$ egy n -szimplex, ezért értelmezés szerint az A_0, A_1, \dots, A_n pontok affin függetlenek, és így $\dim \text{af}\{A_1, \dots, A_n\} = n - 1$. A B_0, B_1, \dots, B_n pontok is affin függetlenek, különben valamelyik B_i pont benne van az $\text{af}\{B_0, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_n\}$ síkban és ekkor

$$A_i \in \text{af}\{A_0, B_i\} \subset \text{af}\{A_0, B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_n\} \subseteq \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n\},$$

ami ellentmond annak, hogy A_0, A_1, \dots, A_n affin függetlenek. Tehát $\dim \text{af}\{B_1, \dots, B_n\} = n - 1$.

Párhuzamos síkok metszete egy harmadik síkkal párhuzamos síkokat (vagy egyeneseket) eredményez. Valóban, az $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\}$ és $\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$ azonos dimenziós síkok párhuzamosak, ezért az irányterei egyenlőek, $\overrightarrow{\text{af}\{B_1, \dots, B_n\}} = \overrightarrow{\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}}$. Továbbá a B_1B_k egyenes az $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\}$ és az $\text{af}\{A_0, A_1, A_k\}$ síkok metszete, míg az A_1A_k egyenes az $\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$ és az $\text{af}\{A_0, A_1, A_k\}$ síkok metszete, így

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B_1B_k) &= \overrightarrow{\text{af}\{B_1, \dots, B_n\} \cap \text{af}\{A_0, A_1, A_k\}} = \overrightarrow{\text{af}\{B_1, \dots, B_n\}} \cap \overrightarrow{\text{af}\{A_0, A_1, A_k\}} = \\ &= \overrightarrow{\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}} \cap \overrightarrow{\text{af}\{A_0, A_1, A_k\}} = \overrightarrow{\text{af}\{A_1, \dots, A_n\} \cap \text{af}\{A_0, A_1, A_k\}} = \mathcal{D}(A_1A_k), \end{aligned}$$

tehát $B_1B_k \parallel A_1A_k$, minden $k = 2, \dots, n$ esetén.

Alkalmazva Thalész tételét (7.8. Tétel) az $A_0A_1A_k$ háromszögben adódik, hogy

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_0}} = \frac{\overline{B_kA_k}}{\overline{B_kA_0}}.$$

Minden $k = 2, \dots, n$ esetén ezt elvégezve következik, hogy

$$\frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_0}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_k}}{\overline{B_k A_0}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}}.$$

□

Második bizonyítás. Legyen $\mathcal{X} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ és legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az $A_1 \dots A_n$ hipersíkkal párhuzamosan az $A_0 A_n$ egyenesre való vetítés. Ekkor $f(A_0) = A_0$ és $f(A_1) = \dots = f(A_n) = A_n$, továbbá az $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\} \parallel \text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$ és $B_n \in A_0 A_n$ miatt $f(B_1) = \dots = f(B_n) = B_n$. Mivel f affin, ezért a 7.6. Tulajdonság alapján

$$\frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_0}} = \frac{\overline{f(B_i) f(A_i)}}{\overline{f(B_i) f(A_0)}} = \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

□

A síkbeli Thalész fordított tétele a következőképpen általánosítható magasabb dimenzióra.

7.14. Tétel (Thalész fordított tétele az n -szimplexre)

Egy affin tér $A_0 A_1 \dots A_n$ n -szimplexének A_0 csúcsán áthaladó élegyenesein felvesszük a $B_i \in A_0 A_i$ pontokat úgy, hogy $B_i \neq A_0$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ha

$$\frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_0}} = \dots = \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}},$$

akkor $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\} \parallel \text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$, vagyis a B_1, \dots, B_n , illetve az A_1, \dots, A_n pontok által kifeszített síkok párhuzamosak.

Első bizonyítás. Az $A_0 A_1 A_i$ háromszögben $B_1 \in A_0 A_1$ és $B_i \in A_0 A_i$, továbbá $\frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_0}} = \frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_0}}$, minden $i = 2, \dots, n$ esetén a feltevés alapján. Alkalmazhatjuk Thalész fordított tételét (7.10. Tétel) az $A_0 A_1 A_i$ háromszögekben és ahonnan adódik, hogy $B_1 B_i \parallel A_1 A_i$, vagyis $\langle \overrightarrow{B_1 B_i} \rangle = \langle \overrightarrow{A_1 A_i} \rangle$, minden $i = 2, \dots, n$ esetén. Innen következik, hogy

$$\langle \overrightarrow{B_1 B_2}, \dots, \overrightarrow{B_1 B_n} \rangle = \langle \overrightarrow{B_1 B_2} \rangle + \dots + \langle \overrightarrow{B_1 B_n} \rangle = \langle \overrightarrow{A_1 A_2} \rangle + \dots + \langle \overrightarrow{A_1 A_n} \rangle = \langle \overrightarrow{A_1 A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_n} \rangle,$$

ahonnan a 3.11.5. alfejezet szerint $\text{af}\{B_1, \dots, B_n\} \parallel \text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$. □

Második bizonyítás. Legyen $\mathcal{X} = \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ és legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az $\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}$ hipersíkkal párhuzamosan az $A_0 A_n$ egyenesre való vetítés. Ekkor $f(A_0) = A_0$ és $f(A_1) = \dots = f(A_n) = A_n$. Minden $i = 1, \dots, n-1$ esetén legyen $C_i \in A_0 A_i$ pont úgy, hogy $f(C_i) = B_n \in A_0 A_n$, tehát $\overrightarrow{C_i B_n} \in \overrightarrow{\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}}$. A 7.6. Tulajdonság alapján

$$\frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_0}} = \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} = \frac{\overline{f(C_i) f(A_i)}}{\overline{f(C_i) f(A_0)}} = \frac{\overline{C_i A_i}}{\overline{C_i A_0}}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

ahonnan a 7.4. Következmény alapján $B_i = C_i$, minden $i = 1, \dots, n-1$ esetén, így teljesül, hogy $\overrightarrow{\text{af}\{B_1, \dots, B_n\}} = \langle \overrightarrow{B_1 B_n}, \dots, \overrightarrow{B_{n-1} B_n} \rangle \subseteq \overrightarrow{\text{af}\{A_1, \dots, A_n\}}$, vagyis

$$\text{af}\{B_1, \dots, B_n\} \parallel \text{af}\{A_1, \dots, A_n\}.$$

□

7.2.3. Thalész tétele hipersíkokra

7.15. Tétel (Thalész tétele hipersíkokra)

Az n -dimenziós ($n \geq 2$) \mathcal{X} affin térben legyen $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ három különböző hipersík úgy, hogy $\mathcal{H}_1 \parallel \mathcal{H}_2$. A $\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{X}$ hipersík párhuzamos a \mathcal{H}_1 hipersíkkal akkor és csakis akkor, ha minden $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \subset \mathcal{X}$ egyenesekre, amelyek metszik a hipersíkokat teljesül, hogy $\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\overline{B_1 B_3}}{\overline{B_1 B_2}}$, ahol A_1, A_2, A_3 , illetve a B_1, B_2, B_3 az $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ hipersíkok metszete az \mathcal{L} , illetve \mathcal{L}' egyenessel.

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ hipersíkok párhuzamosak. Legyenek \mathcal{L} és \mathcal{L}' egyenesek, amely metszik a hipersíkokat. Ha $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ a \mathcal{H}_1 hipersíkkal párhuzamosan az \mathcal{L}' egyenesre való vetítés, akkor $f(A_1) = f(B_1) = B_1$, $f(A_2) = f(B_2) = B_2$ és $f(A_3) = f(B_3) = B_3$. Mivel f affin, ezért a 7.6. Tulajdonság alapján

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_2}} = \frac{\overline{f(A_1) f(A_3)}}{\overline{f(A_1) f(A_2)}} = \frac{\overline{B_1 B_3}}{\overline{B_1 B_2}}.$$

\Leftarrow Tegyük fel, hogy \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_3 nem párhuzamosak. Ekkor \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_3 metszik egymást és legyen C egy pont a metszetben. Mivel \mathcal{H}_2 és \mathcal{H}_3 különbözőek, ezért létezik $D \in \mathcal{H}_2 \setminus \mathcal{H}_3$. Legyen $\mathcal{L} = CD$ és \mathcal{L}' egyenes úgy, hogy \mathcal{L}' metszi a hipersíkokat, de nem metszi a $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ -t. Ekkor

$$\frac{\overline{A_1 A_3}}{\overline{A_1 A_2}} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\overline{B_1 B_3}}{\overline{B_1 B_2}} \neq 0,$$

ami ellentmondáshoz vezet.

□

7.2.4. Metszés lemma

7.16. Lemma (Metszés lemma)

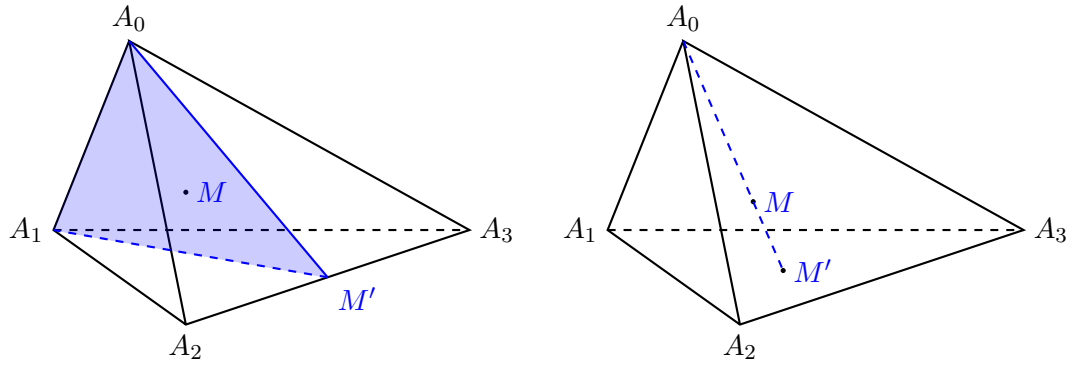
Egy \mathcal{X} affin térben adott egy $A_0 A_1, \dots, A_n$ n -szimplex és egy $M = \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_n A_n$ pont, $\mu_0 + \dots + \mu_n = 1$.

- (i) Az $\text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\}$ sík pontosan akkor metszi az $\text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ $(n-k-1)$ -dimenziós oldalsíkot, vagyis $\text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\} \cap \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\} \neq \emptyset$, ha $\mu_{k+1} + \dots + \mu_n \neq 0$.
- (ii) Ha $M' \in \text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\} \cap \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$, akkor $M' = \frac{\mu_{k+1} A_{k+1} + \dots + \mu_n A_n}{\mu_{k+1} + \dots + \mu_n}$. Sajátosan $\{M'\} = \text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\} \cap \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$, vagyis az $\text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\}$ és $\text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ síkok egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás.

- (i) \Leftarrow Tegyük fel, hogy $\mu_{k+1} + \dots + \mu_n \neq 0$ és legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Az $M = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_n A_n$ affin kombináció átírható, mint

$$\overrightarrow{OM} = \mu_0 \overrightarrow{OA_0} + \dots + \mu_k \overrightarrow{OA_k} + \mu_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OA_n},$$

(a) Az $n = 3$ és $k = 1$ eset.(b) Az $n = 3$ és $k = 0$ eset.

7.6. ábra. Metszés lemma két esetben.

ahonnan $\overrightarrow{OM} - \mu_0 \overrightarrow{OA_0} - \dots - \mu_k \overrightarrow{OA_k} = \mu_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OA_n}$. Mindkét oldalt elosztva az $1 - \mu_0 - \dots - \mu_k = \mu_{k+1} + \dots + \mu_n \neq 0$ számmal kapjuk, hogy

$$\frac{\overrightarrow{OM} - \mu_0 \overrightarrow{OA_0} - \dots - \mu_k \overrightarrow{OA_k}}{1 - \mu_0 - \dots - \mu_k} = \frac{\mu_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + \mu_n \overrightarrow{OA_n}}{\mu_{k+1} + \dots + \mu_n}.$$

Azért osztottunk el, hogy mindkét oldalon az együtthatók összege 1 legyen, tehát mindkét oldalon vektorok affin kombinációja álljon elő és átírhatjuk pontok affin kombinációjára

$$\underbrace{\frac{M - \mu_0 A_0 - \dots - \mu_k A_k}{1 - \mu_0 - \dots - \mu_k}}_{\in \text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\}} = \underbrace{\frac{\mu_{k+1} A_{k+1} + \dots + \mu_n A_n}{\mu_{k+1} + \dots + \mu_n}}_{\in \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}} \quad (7.10)$$

A bal oldalon az A_0, \dots, A_k, M , míg a jobb oldalon az A_k, \dots, A_n pontok egy-egy affin kombinációja áll, így a (7.10) egy olyan pont kétféle felírása, ami benne van az $\text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\}$ és az $\text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ síkokban is. Tehát

$$\text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\} \cap \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\} \neq \emptyset.$$

\Rightarrow Fordítva, tegyük fel, hogy a metszet nem üres, tehát legyen

$$M' \in \text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\} \cap \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$$

egy közös pont. Egyrészt $M' \in \text{af}\{A_0, \dots, A_k, M\}$, ezért léteznek olyan $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k + \alpha = 1$ affin súlyok, hogy

$$M' = \alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_k A_k + \alpha M. \quad (7.11)$$

Másrészt $M' \in \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$, így léteznek olyan $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n = 1$ affin súlyok, hogy

$$M' = \alpha_{k+1} A_{k+1} + \dots + \alpha_n A_n. \quad (7.12)$$

A (7.11) és (7.12) alapján

$$\alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k + \alpha M = \alpha_{k+1} A_{k+1} + \dots + \alpha_n A_n. \quad (7.13)$$

Ha $\alpha = 0$, akkor a (7.13) összefüggésből kapjuk, hogy

$$\alpha_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{A_0 A_k} = \alpha_{k+1} \overrightarrow{A_0 A_{k+1}} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{A_0 A_n},$$

ahonnan következik, hogy $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ vektorok lineárisan függőek, mert nem minden együttható nulla. Ez pedig ellentmond annak, hogy A_0, \dots, A_n pontok affin függetlenek, tehát $\alpha \neq 0$.

A (7.13) összefüggésből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \alpha_0 A_0 + \cdots + \alpha_k A_k + \alpha M &= \alpha_{k+1} A_{k+1} + \cdots + \alpha_n A_n \\ \Leftrightarrow \alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{OA_k} + \alpha \overrightarrow{OM} &= \alpha_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= -\frac{\alpha_0}{\alpha} \overrightarrow{OA_0} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha} \overrightarrow{OA_k} + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha} \overrightarrow{OA_{k+1}} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} \overrightarrow{OA_n} \\ \Leftrightarrow M &= -\frac{\alpha_0}{\alpha} A_0 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha} A_k + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha} A_{k+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} A_n, \end{aligned}$$

mert $-\frac{\alpha_0}{\alpha} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha} + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha} = 1$. A feltevés alapján $M = \mu_0 A_0 + \cdots + \mu_n A_n$, de az A_0, A_1, \dots, A_n pontok affin függetlensége miatt az M pont csak egyféleképpen írható fel az A_0, \dots, A_n pontok affin kombinációjaként, ezért azonosíthatjuk a két felírásban a pontok együtthatóit és kapjuk, hogy

$$-\frac{\alpha_0}{\alpha} = \mu_0, \dots, -\frac{\alpha_k}{\alpha} = \mu_k, \dots, \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha} = \mu_{k+1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha} = \mu_n.$$

Összeadva az utolsó $n - k$ egyenlőség megfelelő oldalait kapjuk, hogy

$$\mu_{k+1} + \cdots + \mu_n = \frac{\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \neq 0.$$

(ii) Ha $M' \in \text{af}\{A_0, A_1, \dots, A_k, M\} \cap \text{af}\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ és $M' = \alpha_{k+1} A_{k+1} + \cdots + \alpha_n A_n$, $\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n = 1$, akkor az előző pont bizonyításának második fele alapján

$$\alpha_{k+1} = \alpha \mu_{k+1} = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_{k+1} + \cdots + \mu_n}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \alpha \mu_n = \frac{\mu_n}{\mu_{k+1} + \cdots + \mu_n},$$

tehát

$$M' = \frac{\mu_{k+1} A_{k+1} + \cdots + \mu_n A_n}{\mu_{k+1} + \cdots + \mu_n}. \quad \square$$

7.17. Következmény

Ha az ABC háromszögben $M = \mu_A A + \mu_B B + \mu_C C$, $\mu_A + \mu_B + \mu_C = 1$ és $\{A'\} = AM \cap BC$, akkor

$$A' = \frac{\mu_B B + \mu_C C}{\mu_B + \mu_C} = \frac{\mu_B B + \mu_C C}{1 - \mu_A}.$$

7.18. Példa

Ha egy ABC háromszögben $M = \frac{A+2B+3C}{6}$ és $\{A'\} = AM \cap BC$, $\{B'\} = BM \cap CA$, $\{C'\} = CM \cap AB$, akkor $A' = \frac{2B+3C}{5}$, $B' = \frac{A+3C}{4}$ és $C' = \frac{A+2B}{3}$. \diamond

7.19. Következmény

Egy \mathcal{X} affin térben adott egy $A_0 A_1 \dots A_n$ n -szimplex és egy $M = \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \cdots + \mu_n A_n$ pont, $\mu_0 + \cdots + \mu_n = 1$.

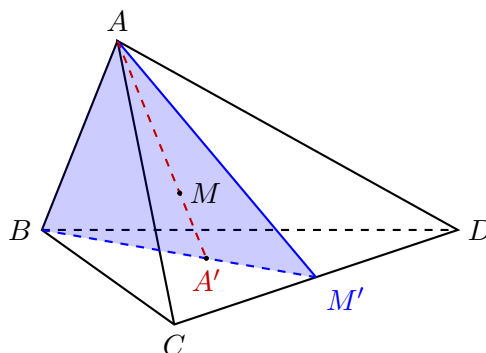
(i) Ha $M_k \in A_k M \cap \text{af}\{A_0, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_n\}$, akkor

$$M_k = \frac{\mu_0 A_0 + \dots + \mu_{k-1} A_{k-1} + \mu_{k+1} A_{k+1} + \dots + \mu_n A_n}{\mu_0 + \dots + \mu_{k-1} + \mu_{k+1} + \dots + \mu_n}.$$

(ii) Ha $B_k \in A_{k-1} A_k \cap \text{af}\{A_0, \dots, A_{k-1}, M, A_{k+1}, \dots, A_n\}$, akkor $B_k = \frac{\mu_{k-1} A_{k-1} + \mu_k A_k}{\mu_{k-1} + \mu_k}$.

7.20. Példa

Ha egy $ABCD$ tetraéderben $M = \frac{A+2B+3C+4D}{10}$ és $\{A'\} = AM \cap BCD$, illetve $\{M'\} = ABM \cap CD$, akkor $A' = \frac{2B+3C+4D}{2+3+4} = \frac{2B+3C+4D}{9}$ és $M' = \frac{3C+4D}{3+4} = \frac{3C+4D}{7}$. \diamond



7.7. ábra

7.2.5. Ceva tétele és fordított tétele

A Ceva tétele és fordított tétele segítségével egy háromszög csúcsain átmenő egyenesek összefutása vagy párhuzamossága jellemezhető osztásviszonyok segítségével. A Ceva tételét és fordított tételét általánosítjuk magasabb dimenzióra is.

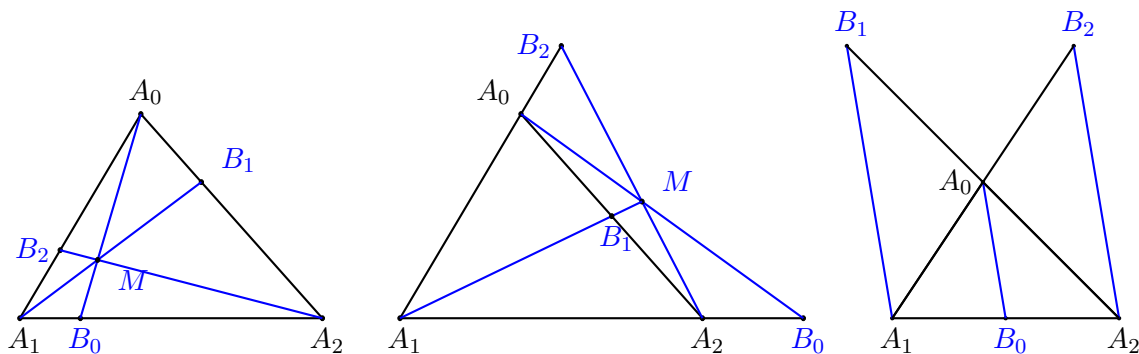
7.2.5.1. Ceva tétele a háromszögre

7.21. Tétel (Ceva tétele a háromszögre)

Egy affin tér $A_0 A_1 A_2$ háromszögének oldalegyenesein felvesszük a $B_0 \in A_1 A_2$, $B_1 \in A_2 A_0$, $B_2 \in A_0 A_1$ pontokat úgy, hogy ne essenek egybe a háromszög csúcsaival. Ha $A_0 B_0 \cap A_1 B_1 \cap A_2 B_2 \neq \emptyset$ (az egyenesek összefutóak), vagy $A_0 B_0 \parallel A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$ (az egyenesek párhuzamosak), akkor

$$\frac{\overline{B_2 A_0}}{\overline{B_2 A_1}} \cdot \frac{\overline{B_0 A_1}}{\overline{B_0 A_2}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{B_1 A_0}} = -1.$$

Bizonyítás. Először tételezzük fel, hogy $A_0 B_0 \cap A_1 B_1 \cap A_2 B_2 \neq \emptyset$ (lásd a 7.8a és 7.8b. ábrákat). Legyen $\{M\} = A_0 B_0 \cap A_1 B_1 \cap A_2 B_2$ az összefutó egyenesek metszéspontja. Mivel $M \in \text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ és amely síkban (A_0, A_1, A_2) egy affin koordináta-rendszert alkot, ezért léteznek olyan $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 1$ affin súlyok, hogy $M = \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$.



(a) Belső metszéspont.

(b) Külső metszéspont.

(c) Párhuzamos eset.

7.8. ábra. Ceva tétele.

A 7.17. Következmény szerint az M pont affin koordinátáinak függvényében felírhatók a B_0 , B_1 , B_2 pontok affin koordinátái is

$$B_0 = \frac{\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad B_1 = \frac{\mu_0 A_0 + \mu_2 A_2}{\mu_0 + \mu_2}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1}{\mu_0 + \mu_1}.$$

Így a (7.5) képlet segítségével könnyen felírhatók a

$$\frac{\overline{B_0 A_1}}{\overline{B_0 A_2}} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{B_1 A_0}} = -\frac{\mu_0}{\mu_2}, \quad \frac{\overline{B_2 A_0}}{\overline{B_2 A_1}} = -\frac{\mu_1}{\mu_0}$$

osztásviszonyok, s ahonnan

$$\frac{\overline{B_0 A_1}}{\overline{B_0 A_2}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{B_1 A_0}} \cdot \frac{\overline{B_2 A_0}}{\overline{B_2 A_1}} = \left(-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \cdot \left(-\frac{\mu_0}{\mu_2}\right) \cdot \left(-\frac{\mu_1}{\mu_0}\right) = (-1)^3 = -1.$$

Ha $A_0 B_0 \parallel A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$ (lásd a 7.8c. ábrát), akkor az $A_1 A_2 B_2$ háromszögben az $A_2 B_2$ oldalegyenessel párhuzamos $A_0 B_0$ párhuzamos szellőre alkalmazva Thalész tételét (7.8. Tétel) kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{B_0 A_1}}{\overline{B_0 A_2}} = \frac{\overline{A_0 A_1}}{\overline{A_0 B_2}} \quad (7.14)$$

Hasonlóan az $A_0 A_2 B_2$ háromszögben az $A_2 B_2$ oldalegyenessel párhuzamos $A_1 B_1$ párhuzamos szellőre alkalmazva Thalész tételét (7.8. Tétel) kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{B_1 A_0}} = \frac{\overline{A_1 B_2}}{\overline{A_1 A_0}} \quad (7.15)$$

A (7.14) és (7.15) összefüggések alapján kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{B_2 A_0}}{\overline{B_2 A_1}} \cdot \frac{\overline{B_0 A_1}}{\overline{B_0 A_2}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_2}}{\overline{B_1 A_0}} = \frac{\overline{B_2 A_0}}{\overline{B_2 A_1}} \cdot \frac{\overline{A_0 A_1}}{\overline{A_0 B_2}} \cdot \frac{\overline{A_1 B_2}}{\overline{A_1 A_0}} = (-1)^3 = -1,$$

ahol az egyszerűsítéshez használjuk, hogy a $\overline{B_2 A_0}$, $\overline{A_0 A_1}$, $\overline{A_1 B_2}$ -höz érték rendelhető. \square

Valós affin terek esetén ha a Ceva-tételben szereplő $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ egyenesek összefutóak, akkor mindhárom B_0 , B_1 , B_2 osztópont az oldalak belsejében van, vagy kettő van az oldalakon kívül és egy az oldalon. Ha a Ceva-tételben szereplő $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ egyenesek párhuzamosak,

akkor az osztópontok közül kettő a oldalakon kívül, míg egy az oldalon található. Tehát mindkét esetben

$$\frac{\overline{B_2A_0}}{\overline{B_2A_1}} \cdot \frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{B_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{B_1A_0}} = -\frac{|B_2A_0|}{|B_2A_1|} \cdot \frac{|B_0A_1|}{|B_0A_2|} \cdot \frac{|B_1A_2|}{|B_1A_0|}.$$

Így valós esetben Ceva tétele a következőképpen fogalmazható meg.

7.22. Tétel (Ceva tétele a háromszögre valós affin tér esetén)

Egy valós affin térben található $A_0A_1A_2$ háromszög oldalegyenesein felvesszük a $B_0 \in A_1A_2$, $B_1 \in A_2A_0$, $B_2 \in A_0A_1$ pontokat úgy, hogy ne essenek egybe a háromszög csúcaival. Ha $A_0B_0 \cap A_1B_1 \cap A_2B_2 \neq \emptyset$ (az egyenesek összefutóak), vagy $A_0B_0 \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (az egyenesek párhuzamosak), akkor

$$\frac{|A_0B_2|}{|B_2A_1|} \cdot \frac{|A_1B_0|}{|B_0A_2|} \cdot \frac{|A_2B_1|}{|B_1A_0|} = 1.$$

7.2.5.2. Ceva fordított tétele a háromszögre

7.23. Tétel (Ceva fordított-tétele a háromszögre)

Az $A_0A_1A_2$ háromszög oldalegyenesein felvesszük a $B_0 \in A_1A_2$, $B_1 \in A_2A_0$, $B_2 \in A_0A_1$ pontokat úgy, hogy ne essenek egybe a csúcsokkal. Ha

$$\frac{\overline{B_2A_0}}{\overline{B_2A_1}} \cdot \frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{B_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{B_1A_0}} = -1,$$

akkor $A_0B_0 \cap A_1B_1 \cap A_2B_2 \neq \emptyset$ (az egyenesek összefutóak) vagy $A_0B_0 \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (az egyenesek párhuzamosak).

Bizonyítás. Elég belátni, hogy az A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 egyenesek közül, ha kettő metszi egymást, akkor a harmadik is átmegy a metszésponton. Ebből következik a párhuzamos eset is, mert az A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 egyenesek hipersíkok az $\text{af}\{A_0, A_1, A_2\}$ síkban, így ha nem metszik egymást, akkor párhuzamosak (lásd a 3.59. Tulajdonságot).

Tegyük fel, hogy A_0B_0 és A_1B_1 metszi egymást és legyen $\{M\} = A_0B_0 \cap A_1B_1$ a metszet. Igazolni fogjuk, hogy az M pont rajta van az A_2B_2 egyenesen is. Felírjuk az M pontot az (A_0, A_1, A_2) affin koordináta-rendszerben: léteznek egyértelmű $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 1$ affin súlyok úgy, hogy

$$M = \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2.$$

A 7.17. Következmény alapján az M pont affin koordinátáinak függvényében felírhatók a B_0 , B_1 , B_2 pontok koordinátái is, és pedig

$$B_0 = \frac{\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{és} \quad B_1 = \frac{\mu_0 A_0 + \mu_2 A_2}{\mu_0 + \mu_2},$$

ahonnan a (7.5) képlet segítségével könnyen felírhatjuk a

$$\frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{B_0A_2}} = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{és} \quad \frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{B_1A_0}} = -\frac{\mu_0}{\mu_2}$$

osztásviszonyokat. Ezeket felhasználva a $\frac{\overline{B_2A_0}}{\overline{B_2A_1}} \cdot \frac{\overline{B_0A_1}}{\overline{B_0A_2}} \cdot \frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{B_1A_0}} = -1$ összefüggésből kiszámolható, hogy

$$\frac{\overline{B_2A_0}}{\overline{B_2A_1}} = -\frac{\mu_1}{\mu_0} = \mu.$$

A 7.3. Tulajdonságból következik, hogy $\mu \neq 1$, vagyis $\mu_0 + \mu_1 \neq 0$, így az osztásviszonyokból felírható a B_2 pont az A_0 és A_1 pontok affin kombinációjaként

$$B_2 = \frac{-1}{\mu - 1}A_0 + \frac{\mu}{\mu - 1}A_1 = \frac{-1}{\frac{\mu_1}{\mu_0} + 1}A_0 + \frac{\frac{\mu_1}{\mu_0}}{\frac{\mu_1}{\mu_0} + 1}A_1 = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_1}A_0 + \frac{\mu_1}{\mu_0 + \mu_1}A_1.$$

Az $M \in A_2B_2$, mert felírható az A_2 és B_2 pontok affin kombinációjaként:

$$\begin{aligned} M &= \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \\ &= \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + (1 - (\mu_0 + \mu_1))A_2 \\ &= (\mu_0 + \mu_1) \cdot \left(\frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_1}A_0 + \frac{\mu_1}{\mu_0 + \mu_1}A_1 \right) + (1 - (\mu_0 + \mu_1))A_2 \\ &= \lambda \cdot B_2 + (1 - \lambda) \cdot A_2, \end{aligned}$$

ahol $\lambda = \mu_0 + \mu_1$. □

A valós esetben, ha szakaszok hossza segítségével szeretnénk megfogalmazni Ceva fordított tételét, akkor figyelembe kell venni, hogy például egy AB egyenesen két pont is van, amely teljesíti az $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$ feltételt, éspedig az $M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$, illetve az $M = 2B - A$. Így direkt módon nem írható át a fordított tétel szakaszok arányára. A következő sajátos esetet fogalmazzuk meg.

7.24. Tétel (Ceva fordított-tétele a háromszögre valós affin tér esetén)

Egy valós affin tér $A_0A_1A_2$ háromszögének oldalain felvesszük a $B_0 \in (A_1A_2)$, $B_1 \in (A_2A_0)$, $B_2 \in (A_0A_1)$ pontokat. Ha

$$\frac{|A_0B_2|}{|A_1B_2|} \cdot \frac{|A_1B_0|}{|B_0A_2|} \cdot \frac{|A_2B_1|}{|B_1A_0|} = 1,$$

akkor $A_0B_0 \cap A_1B_1 \cap A_2B_2 \neq \emptyset$ (az egyenesek összefutóak).

Ceva tételének és fordított tételének általánosítása

7.25. Tétel (Ceva tételének általánosítása az n -szimplexre)

Az $A_0A_1 \dots A_n$ n -szimplex oldalegyenesein felvesszük a $B_i \in A_iA_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$, ($A_{n+1} = A_0$) pontokat úgy, hogy ne essenek egybe a szimplex csúcaival. Ha

$$\bigcap_{i=0}^n \text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots, A_n, B_i\} \neq \emptyset$$

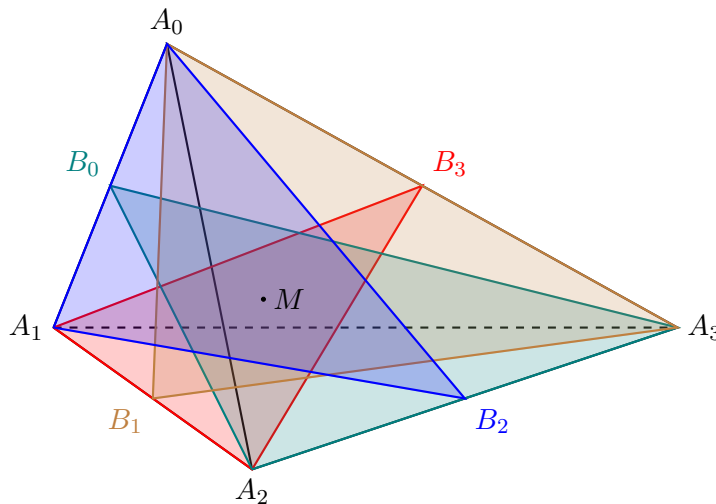
síkok metszete nem üres, akkor $\frac{\overline{B_0A_0}}{\overline{B_0A_1}} \cdot \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{B_nA_0}} = (-1)^{n+1}$.

Bizonyítás. Legyen a metszet egy pontja

$$M = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_n A_n \in \bigcap_{i=0}^n \text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots, A_n, B_i\},$$

ahol $\mu_0 + \dots + \mu_n = 1$. Ekkor a B_i pont tulajdonképpen az A_iA_{i+1} egyenes és az

$$\text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots, A_n, M\}$$

7.9. ábra. Ceva tétele az n -szimplexre.

sík metszete, ezért a 7.19. Következmény (ii) alpontja szerint

$$B_i = \frac{\mu_i A_i + \mu_{i+1} A_{i+1}}{\mu_i + \mu_{i+1}}, \quad (A_{n+1} = A_0 \text{ és } \mu_{n+1} = \mu_0),$$

ahonnan a (7.5) segítségével felírhatjuk a $\frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_{i+1}}} = -\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}$ osztásviszonyt. Elvégezve ezt a számolást minden $i = 0, \dots, n$ esetén és összeszorozva az osztásviszonyokat kapjuk, hogy

$$\prod_{i=0}^n \frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_{i+1}}} = \prod_{i=0}^n \left(-\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \right) = \left(-\frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \cdot \left(-\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \cdots \left(-\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} \right) \cdot \left(-\frac{\mu_0}{\mu_n} \right) = (-1)^{n+1}. \quad \square$$

7.26. Tétel (Ceva fordított tételének általánosítása az n -szimplexre)

Az $A_0 A_1 \dots A_n$ n -szimplex oldalegyenesein felvesszük a $B_i \in A_i A_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$, ($A_{n+1} = A_0$) pontokat úgy, hogy ne essenek egybe a szimplex csúcaival. Ha

$$\frac{\overline{B_0 A_0}}{\overline{B_0 A_1}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_2}} \cdots \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} = (-1)^{n+1}$$

és az $\text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots, A_n, B_i\}$, $i = 0, \dots, n$ síkok közül n egy pontban metszi egymást, akkor az $(n+1)$ -dik is átmegy ezen a metszésponton, vagyis

$$\bigcap_{i=0}^n \text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots, A_n, B_i\} \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az első n sík metszi egymást. Legyenek $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$, $\mu_0 + \dots + \mu_n = 1$ affín súlyok úgy, hogy

$$M = \mu_0 A_0 + \dots + \mu_n A_n \in \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{af}\{A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+2}, \dots, A_n, B_i\}.$$

Igazolni fogjuk, hogy $M \in \text{af}\{A_1, \dots, A_{n-1}, B_n\}$. A 7.19. Következmény (ii) alpontja alapján

$$B_i = \frac{\mu_i A_i + \mu_{i+1} A_{i+1}}{\mu_i + \mu_{i+1}}, \quad \forall i = 0, \dots, n-1,$$

és ahonnan felírhatjuk a $\frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_{i+1}}} = -\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}$ osztásviszonyt, minden $i = 0, \dots, n-1$ -re a (7.5) szerint. Ezeket felhasználva a $\frac{\overline{B_0 A_0}}{\overline{B_0 A_1}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} = (-1)^{n+1}$ feltevésből kiszámolhatjuk, hogy

$$\frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} = -\frac{\mu_0}{\mu_n} = \mu.$$

A 7.3. Tulajdonságból következik, hogy $\frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} \neq 1$, s így $\mu_0 + \mu_n \neq 0$, továbbá

$$B_n = \frac{-1}{\mu - 1} A_n + \frac{\mu}{\mu - 1} A_0 = \frac{\mu_0 A_0 + \mu_n A_n}{\mu_0 + \mu_n}.$$

Az $M \in \text{af}\{A_1, \dots, A_{n-1}, B_n\}$, mert az M felírható az A_1, \dots, A_{n-1}, B_n pontok affin kombinációjaként:

$$\begin{aligned} M &= (\mu_0 + \mu_n) \frac{\mu_0 A_0 + \mu_n A_n}{\mu_0 + \mu_n} + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_{n-1} A_{n-1} \\ &= (\mu_0 + \mu_n) B_n + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_{n-1} A_{n-1} \\ &\in \text{af}\{A_1, \dots, A_{n-1}, B_n\}. \end{aligned}$$

□

7.2.6. Meneláosz tétele és fordított tétele

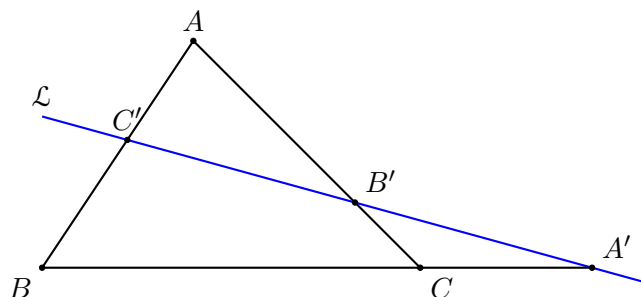
Az osztásviszony használható pontok egy egyenesre esésének (kollinearitás) vagy egy síkba esésének (koplanaritás) jellemzésére.

7.2.6.1. Meneláosz tétele és fordított tétele a háromszögre

7.27. Tétel (Meneláosz tétele és fordított tétele a háromszögre)

Az ABC háromszög oldalegyenesein felvesszük az $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ pontokat, amelyek nem esnek egybe a csúcsokkal. Ekkor az A', B', C' pontok egy egyenesen vannak (kollinearitás) akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$



7.10. ábra. Meneláosz tétele és fordított tétele a háromszögre.

Első bizonyítás. Mivel $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ és ezek a pontok nem esnek egybe a csúcsokkal, ezért léteznek $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$ úgy, hogy $A' = (1 - \alpha) \cdot B + \alpha \cdot C$, $B' = (1 - \beta) \cdot C + \beta \cdot A$,

$C' = (1 - \gamma) \cdot A + \gamma \cdot B$, és innen a (7.5) képlet szerint

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\beta}{\beta - 1}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (7.16)$$

Az A', B', C' pontok egy egyenesen vannak pontosan akkor, ha affin függőek. A 4.30. Tulajdonság alapján ez egyenértékű azzal, hogy az (A, B, C) affin koordináta-rendszerben felírt együtthatók-ból alkotott mátrix rangja kisebb, mint 3, vagyis

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & 1 - \gamma \\ 1 - \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & 1 - \beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.17)$$

Kiszámítjuk a determinánst:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & \beta & 1 - \gamma \\ 1 - \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & 1 - \beta & 0 \end{vmatrix} &= (\alpha - 1) \cdot (\beta - 1) \cdot (\gamma - 1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta}{\beta - 1} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{\gamma}{\gamma - 1} \\ \frac{\alpha}{\alpha - 1} & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - 1) \cdot (\beta - 1) \cdot (\gamma - 1) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Mivel $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$, ezért $(\alpha - 1) \cdot (\beta - 1) \cdot (\gamma - 1) \neq 0$, így a (7.17) egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} = 1$, ami a (7.16) alapján egyenértékű az

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

egyenlőséggel. □

Második bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy az A', B', C' pontok kollineárisak és jelölje \mathcal{L} az általuk meghatározott egyenest. Jelölje \mathcal{X} az ABC háromszög síkját és legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az \mathcal{L} egyenessel párhuzamosan a BC egyenesre való vetítés. Mivel f affin, ezért megőrzi az osztásviszonyt, így

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{f(A')f(B)}}{\overline{f(A')f(C)}} \cdot \frac{\overline{f(B')f(C)}}{\overline{f(B')f(A)}} \cdot \frac{\overline{f(C')f(A)}}{\overline{f(C')f(B)}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'f(A)}} \cdot \frac{\overline{A'f(A)}}{\overline{A'B}} = 1,$$

felhasználva, hogy az $\overline{A'B}, \overline{A'C}, \overline{A'f(A)}$ kifejezésekhez érték rendelhető.

\Leftarrow Jelölje \mathcal{X} az ABC háromszög síkját. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az $A'B'$ egyenessel párhuzamosan a BC egyenesre való vetítés. Mivel f affin, ezért megőrzi az osztásviszonyt, így

$$1 = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{f(A')f(B)}}{\overline{f(A')f(C)}} \cdot \frac{\overline{f(B')f(C)}}{\overline{f(B')f(A)}} \cdot \frac{\overline{f(C')f(A)}}{\overline{f(C')f(B)}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'f(A)}} \cdot \frac{\overline{f(C')f(A)}}{\overline{f(C')B}},$$

ahonnan kapjuk, hogy $\frac{\overline{f(C')f(A)}}{\overline{f(C')B}} = \frac{\overline{A'f(A)}}{\overline{A'B}}$. Innen következik, hogy $f(C') = A'$, tehát $C' \in A'B'$. □

7.28. Megjegyzés

A direkt irányú állítás Meneláosz tétele: ha egy d egyenes az ABC oldalegyeneseit az $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ pontokban metszi, akkor $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

A fordított irányú állítás Meneláosz fordított tétele: ha ABC oldalegyenesein felvesszük az $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ pontokat úgy, hogy $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, akkor az A', B', C' pontok egy egyenesen vannak (kollineárisak).

Valós affin térben ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) az $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ összefüggés egyenértékű a szakaszok hosszára vonatkozó $\frac{|A'B|}{|A'C|} \cdot \frac{|B'C|}{|B'A|} \cdot \frac{|C'A|}{|C'B|} = 1$ összefüggéssel, mivel egy egyenes a háromszög oldalait közül egyet sem vagy pontosan kettőt metszhet. \diamond

7.29. Tétel (Meneláosz tétele és fordított tétele a háromszögre valós affin síkban)

Az ABC háromszög oldalegyenesein felvesszük az $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ pontokat, amelyek nem esnek egybe a csúcsokkal. Ekkor az A', B', C' pontok egy egyenesen vannak (kollineárisak) akkor és csakis akkor, ha

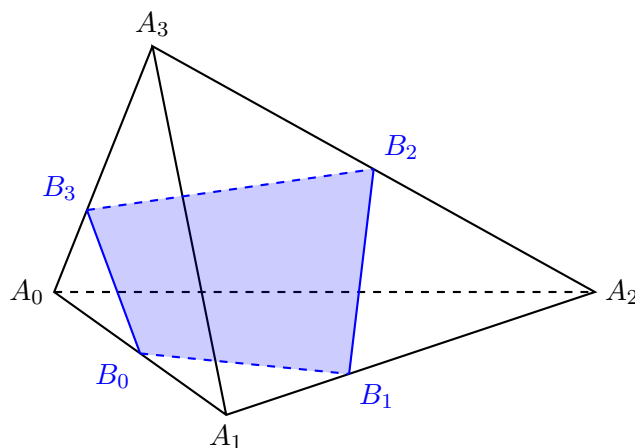
$$\frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} \cdot \frac{|AC'|}{|C'B|} = 1.$$

7.2.6.2. Meneláosz tételének és fordított tételének általánosítása

7.30. Tétel (Meneláosz tétele és fordított tétele az n -szimplexre)

Egy n -dimenziós affin tér $A_0A_1 \dots A_n$ n -szimplexének oldalegyenesein felvesszük a $B_i \in A_iA_{i+1}$, $i = 0, \dots, n$ ($A_{n+1} = A_0$) pontokat, amelyek nem esnek egybe a csúcsokkal. Ekkor a B_0, \dots, B_n pontok egy hipersíkban vannak (affin függőek) akkor és csakis akkor, ha

$$\frac{\overline{B_0A_0}}{\overline{B_0A_1}} \cdot \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{B_1A_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{B_nA_0}} = 1.$$



7.11. ábra. Meneláosz tétele a tetraéderre (3-szimplexre).

Első bizonyítás. Mivel $B_i \in A_i A_{i+1}$, ami nem esik egybe a csúcsokkal, ezért létezik egyértelmű $\beta_i \in \mathbb{K}$, $\beta_i \neq 1$ úgy, hogy

$$B_i = (1 - \beta_i)A_i + \beta_i A_{i+1}, \quad (7.18)$$

minden $i = 0, \dots, n$ esetén. Ebből a (7.5) alapján felírhatjuk az

$$\frac{\overline{B_i A_i}}{\overline{B_i A_{i+1}}} = \frac{\beta_i}{\beta_i - 1} \quad (7.19)$$

osztásviszonyt, minden $i = 0, \dots, n$ esetén. A B_0, \dots, B_n pontok pontosan akkor vannak egy hipersíkban, ha affin függőek, ami a 4.30. Tulajdonság alapján az (A_0, A_1, \dots, A_n) affin koordináta-rendszerben felírt koordinátákra azt jelenti, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n \\ \beta_0 & 1 - \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 1 - \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 1 - \beta_n \end{vmatrix} = 0 \quad (7.20)$$

Kiszámítjuk ezt a determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta_0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n \\ \beta_0 & 1 - \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & 1 - \beta_n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n (\beta_i - 1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\beta_n}{\beta_n - 1} \\ \frac{\beta_0}{\beta_0 - 1} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} & -1 \end{vmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy $\prod_{i=0}^n (\beta_i - 1) \neq 0$. Kifejtjük a jobb oldalon álló determinánst az első sor szerint:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\beta_n}{\beta_n - 1} \\ \frac{\beta_0}{\beta_0 - 1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} & -1 \end{vmatrix} = \\ & = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} \frac{\beta_n}{\beta_n - 1} \begin{vmatrix} \frac{\beta_0}{\beta_0 - 1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} \end{vmatrix} = \\ & = (-1) \cdot (-1)^n + (-1)^{n+2} \frac{\beta_n}{\beta_n - 1} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_0 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} = \\ & = (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{\beta_0}{\beta_0 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_n - 1} \right). \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy a (7.20) egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\frac{\beta_0}{\beta_0 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} - 1} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_n - 1} = 1,$$

ami a (7.19) alapján egyenértékű a $\frac{\overline{B_1 A_0}}{\overline{B_1 A_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{B_n A_{n-1}}}{\overline{B_n A_n}} \cdot \frac{\overline{B_0 A_n}}{\overline{B_0 A_0}} = 1$ összefüggéssel. \square

Második bizonyítás. Legyen $\mathcal{X} = \text{af}\{A_0, \dots, A_n\}$.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy a B_1, \dots, B_n pontok egy \mathcal{H} hipersíkban vannak. Legyen \mathcal{L} egy egyenes, mely metszi a \mathcal{H} hipersíkot. Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ a \mathcal{H} hipersíkkal párhuzamosan az \mathcal{L} egyenesre való vetítés. Ekkor $f(B_0) = \dots = f(B_n) = C$ és f az $A_0 A_1, \dots, A_n A_0$ egyeneseket egyenesekbe képezi. Mivel f affin, ezért megőrzi az osztásviszonyt, így

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B_0 A_0}}{\overline{B_0 A_1}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} &= \frac{\overline{f(B_0)f(A_0)}}{\overline{f(B_0)f(A_1)}} \cdot \frac{\overline{f(B_1)f(A_1)}}{\overline{f(B_1)f(A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{f(B_n)f(A_n)}}{\overline{f(B_n)f(A_0)}} = \\ &= \frac{\overline{Cf(A_0)}}{\overline{Cf(A_1)}} \cdot \frac{\overline{Cf(A_1)}}{\overline{Cf(A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{Cf(A_n)}}{\overline{Cf(A_0)}} = 1. \end{aligned}$$

\Leftarrow Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ az $\text{af}\{B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}$ hipersíkkal párhuzamosan az $A_0 A_n$ egyenesre való vetítés. Ekkor $f(B_0) = \dots = f(B_{n-1}) = C$. Mivel f affin, ezért megőrzi az osztásviszonyt, így

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\overline{B_0 A_0}}{\overline{B_0 A_1}} \cdot \frac{\overline{B_1 A_1}}{\overline{B_1 A_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{B_n A_n}}{\overline{B_n A_0}} = \\ &= \frac{\overline{f(B_0)f(A_0)}}{\overline{f(B_0)f(A_1)}} \cdot \frac{\overline{f(B_1)f(A_1)}}{\overline{f(B_1)f(A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{f(B_{n-1})f(A_{n-1})}}{\overline{f(B_{n-1})f(A_n)}} \cdot \frac{\overline{f(B_n)f(A_n)}}{\overline{f(B_n)f(A_0)}} = \\ &= \frac{\overline{C A_0}}{\overline{C f(A_1)}} \cdot \frac{\overline{C f(A_1)}}{\overline{C f(A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\overline{C f(A_{n-1})}}{\overline{C A_n}} \cdot \frac{\overline{f(B_n) A_n}}{\overline{f(B_n) A_0}} = \frac{\overline{C A_0}}{\overline{C A_n}} \cdot \frac{\overline{f(B_n) A_n}}{\overline{f(B_n) A_0}} \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy $\frac{\overline{f(B_n) A_n}}{\overline{f(B_n) A_0}} = \frac{\overline{C A_n}}{\overline{C A_0}}$. Innen következik, hogy $f(B_n) = C$, tehát

$$B_n \in \text{af}\{B_0, \dots, B_{n-1}\}. \quad \square$$

7.2.7. Desargues tétele

7.31. Tétel (Desargues-tétel, 1. változat)

Adottak az ABC és $A'B'C'$ háromszögek, amelyeknek nincs közös csúcsuk, továbbá

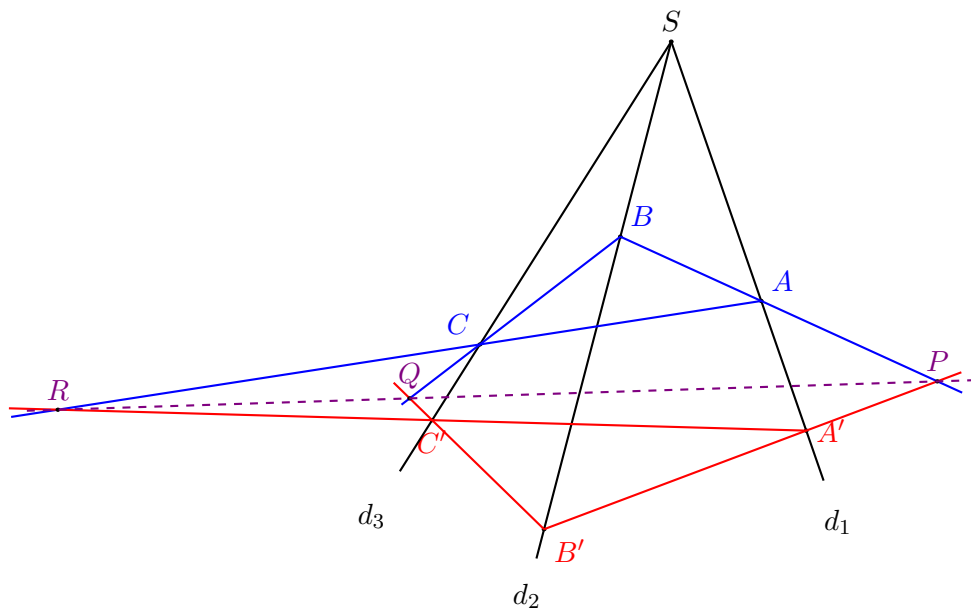
$$\{P\} = AB \cap A'B', \quad \{Q\} = BC \cap B'C', \quad \{R\} = CA \cap C'A'.$$

Ha az AA' , BB' , CC' különböző egyenesek összefutóak, akkor a P , Q , R pontok kollineárisak.

Első bizonyítás. Jelölje S az AA' , BB' , CC' egyenesek összefutási pontját. Ha az S pont egybeesik például a B ponttal, akkor $Q = C'$, $P = A'$, amelyekkel R kollineáris a feltevés miatt. Ezek alapján feltehető, hogy S nem esik egybe az A , B , C , A' , B' , C' pontokkal.

Mivel $S \in AA'$, $S \in BB'$, $S \in CC'$, ezért léteznek olyan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{K}$, hogy

$$S = \sigma_1 A + (1 - \sigma_1) A', \quad S = \sigma_2 B + (1 - \sigma_2) B', \quad S = \sigma_3 C + (1 - \sigma_3) C'. \quad (7.21)$$



7.12. ábra. Desargues tétele (1. változat).

A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{K}$ skalárok mind különbözőek. Ha $\sigma_1 = \sigma_2$, akkor $\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}}$, ahonnan a Thalész fordított tétele (7.10. Tétel) alapján következik, hogy $AB \parallel A'B'$, amit ellentmondáshoz vezet.

Felírjuk a P pontot az A és B pontok affin kombinációjaként. A (7.21) összefüggések alapján

$$\begin{aligned} \sigma_1 \overrightarrow{SA} + (1 - \sigma_1) \overrightarrow{SA'} &= \sigma_2 \overrightarrow{SB} + (1 - \sigma_2) \overrightarrow{SB'} \\ \iff \sigma_1 \overrightarrow{SA} - \sigma_2 \overrightarrow{SB} &= (\sigma_1 - 1) \overrightarrow{SA'} + (1 - \sigma_2) \overrightarrow{SB'}. \end{aligned}$$

Mindkét oldalt elosztjuk $\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 - 1) + (1 - \sigma_2)$ -vel, hogy affin kombinációkat kapjunk

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 \overrightarrow{SA} - \sigma_2 \overrightarrow{SB}}{\sigma_1 - \sigma_2} &= \frac{(\sigma_1 - 1) \overrightarrow{SA'} + (1 - \sigma_2) \overrightarrow{SB'}}{(\sigma_1 - 1) + (1 - \sigma_2)} \\ \iff \frac{\sigma_1 A - \sigma_2 B}{\sigma_1 - \sigma_2} &= \frac{(\sigma_1 - 1) A' + (1 - \sigma_2) B'}{(\sigma_1 - 1) + (1 - \sigma_2)} \end{aligned}$$

A bal oldalon egy AB egyenesen lévő pont, míg a jobb oldalon egy $A'B'$ egyenesen fekvő pont szerepel, tehát csak az AB és $A'B'$ egyenesek metszéspontjáról lehet szó, vagyis $P = \frac{\sigma_1 A - \sigma_2 B}{\sigma_1 - \sigma_2}$.

Hasonlóan kiszámolható, hogy

$$Q = \frac{\sigma_2 B - \sigma_3 C}{\sigma_2 - \sigma_3} \quad \text{és} \quad R = \frac{\sigma_3 C - \sigma_1 A}{\sigma_3 - \sigma_1}. \quad (7.22)$$

Észrevehetjük, hogy az R pont felírható a P és Q pontok affin kombinációjaként

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)P + (\sigma_2 - \sigma_3)Q}{(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3)} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} P + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} Q \\ &= \frac{\sigma_1 A - \sigma_2 B}{\sigma_1 - \sigma_3} + \frac{\sigma_2 B - \sigma_3 C}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_3 C - \sigma_1 A}{\sigma_3 - \sigma_1} = R, \end{aligned}$$

vagyis a P , Q és R pontok egy egyenesen vannak. \square

Második bizonyítás. Jelölje S az AA' , BB' , CC' egyenesek összefutási pontját. Ha az S pont egybeesik például az B ponttal, akkor $Q = C'$, $P = A'$, amelyekkel R kollineáris a feltevés miatt. Ezek alapján feltehető, hogy S nem esik egybe az A , B , C , A' , B' , C' pontokkal.

Az SBC háromszögben felírva Meneláosz tételét a $B' - C' - Q$ kollineáris pontokra kapjuk, hogy $\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'S}} \cdot \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} = 1$, ahonnan

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}}. \quad (7.23)$$

Az SBA háromszögben felírva Meneláosz tételét a $B' - A' - P$ kollineáris pontokra azt kapjuk, hogy $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'S}} \cdot \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} = 1$, ahonnan

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'S}}. \quad (7.24)$$

Az SAC háromszögben felírva Meneláosz tételét a $A' - C' - R$ kollineáris pontokra azt kapjuk, hogy $\frac{\overline{RA}}{\overline{RC}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}} \cdot \frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} = 1$, ahonnan

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'S}}. \quad (7.25)$$

A (7.23), (7.24), (7.25) összefüggések alapján

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{C'S}} \cdot \frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'S}} \cdot \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'S}} = 1,$$

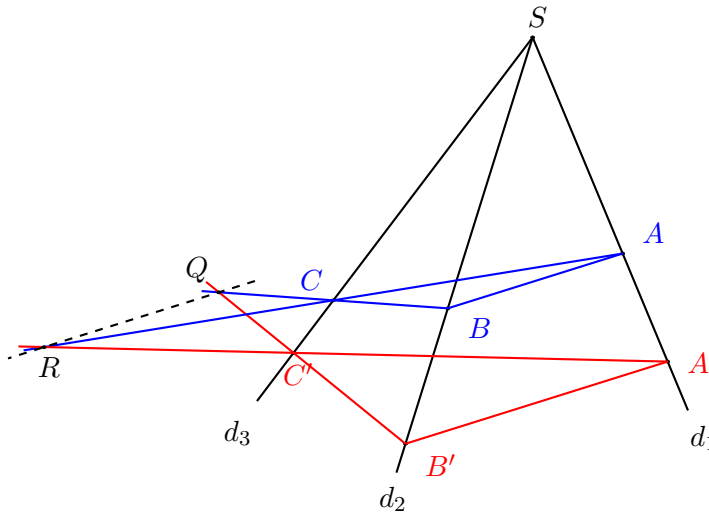
így az ABC háromszögben Meneláosz fordított tétele alapján a P, Q, R pontok kollineárisak. \square

7.32. Tétel (Desargues-tétel, 2. változat)

Adottak az ABC és $A'B'C'$ háromszögek, amelyeknek nincs közös csúcsuk, továbbá

$$AB \parallel A'B', \quad \{Q\} = BC \cap B'C', \quad \{R\} = CA \cap C'A'.$$

Ha az AA', BB', CC' különböző egyenesek összefutóak, akkor $QR \parallel AB$.



7.13. ábra. Desargues tétele (2. változat).

Bizonyítás. Jelölje S az AA', BB', CC' egyenesek összefutási pontját. Ha $S = A$, akkor az A, B, B' pontok kollineárisak és az $AB \parallel A'B'$ miatt az AB és $A'B'$ egyenesek egybeesnek, ami

ellentmondáshoz vezet. Hasonlóan belátható, hogy az S nem eshet egybe az A, B, A', B' pontok egyikével sem.

Mivel $S \in AA', S \in BB', S \in CC'$, ezért léteznek olyan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{K}$, hogy

$$S = \sigma_1 A + (1 - \sigma_1) A', \quad S = \sigma_2 B + (1 - \sigma_2) B', \quad S = \sigma_3 C + (1 - \sigma_3) C'. \quad (7.26)$$

Mivel $AB \parallel A'B'$, ezért az SAB háromszögben alkalmazva Thalész tételét kapjuk, hogy $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$, vagyis $\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}$, ahonnan $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Thalész fordított tételéből következik, hogy ha BC és $B'C'$ egyenesek metszik egymást, akkor $\sigma \neq \sigma_3$. Hasonlóan az előbbi bizonyításhoz kiszámolhatjuk a (7.22) összefüggéseket, vagyis $Q = \frac{\sigma B - \sigma_3 C}{\sigma - \sigma_3}$ és $R = \frac{\sigma_3 C - \sigma A}{\sigma_3 - \sigma}$. Innen

$$\overrightarrow{SQ} = \frac{\sigma \overrightarrow{SB} - \sigma_3 \overrightarrow{SC}}{\sigma - \sigma_3} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{SR} = \frac{\sigma_3 \overrightarrow{SC} - \sigma \overrightarrow{SA}}{\sigma_3 - \sigma},$$

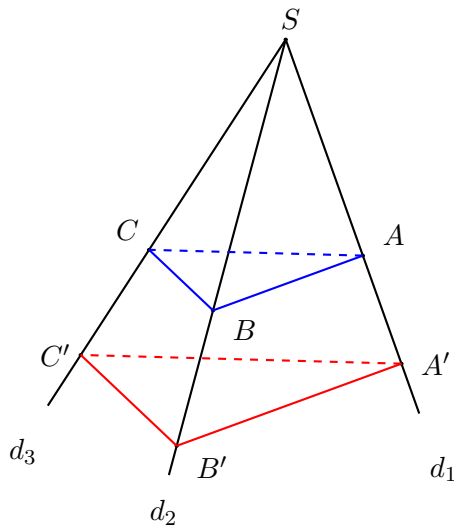
amelyek megfelelő oldalait kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{QR} = \frac{\sigma \overrightarrow{SA} - \sigma \overrightarrow{SB}}{\sigma - \sigma_3} = \frac{-\sigma}{\sigma - \sigma_3} \overrightarrow{AB},$$

tehát $QR \parallel AB$. □

7.33. Tétel (Desargues-tétel, 3. változat)

Adottak az ABC és $A'B'C'$ háromszögek, amelyeknek nincs közös csúcsuk, továbbá $AB \parallel A'B'$ és $BC \parallel B'C'$. Ha az AA', BB', CC' különböző egyenesek összefutóak, akkor $CA \parallel C'A'$.



7.14. ábra. Desargues tétele (3. változat).

Bizonyítás. Jelölje S az AA', BB', CC' egyenesek összefutási pontját. A 7.32. tétel bizonyításának első feléhez hasonlóan belátható, hogy az S pont nem eshet egybe az A, A', B, B', C, C' pontok egyikével sem.

Az SAB és SBC háromszögekre alkalmazva Thalész tételét kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}},$$

ahonnan Thalész fordított tétele alapján az SBC háromszögben kapjuk, hogy $BC \parallel A'B'$. □

8. fejezet

Valós affin terek

Eddig az affin tereink iránytere általános \mathbb{K} kommutatív test feletti vektortér volt. Ezen affin terek esetén nem beszélhattünk szakaszokról, háromszögek (szimplexek) belsejéről. A továbbiakban valós affin tereket fogunk tekinteni, vagyis olyan affin tereket, amelyek iránytere valós vektortér. Mivel \mathbb{R} egy rendezett test, ezért valós affin terek esetén beszélhetünk szakaszokról, háromszöglapokról, félsíkokról, félterekről. A valós affin terek esetén fontos fogalom a konvexitás, értelmezzük a konvex burkoló fogalmát. A konvexitással kapcsolatosan igazoljuk Radon, Helly és Charathéodory tételét. Ebbe a témakörbe tartozó megoldott feladatok találhatók az [1] könyv 4. fejezetében.

8.1. Speciális halmazok egy valós affin térben

Legyen \mathcal{X} egy valós affin tér, vagyis az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy valós vektortér ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Ebben az alfejezetben a geometriában gyakran használt speciális halmazokat vezetünk be valós affin terek esetén.

8.1.1. Három pont helyzete egy egyenesen

Az $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ kommutatív testen „ \leq ” egy rendezési reláció, mely kompatibilis a műveletekkel, vagyis ha $x \leq y$, akkor minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $x + a \leq y + a$, illetve ha $a \geq 0$, akkor $a \cdot x \leq a \cdot y$. Ha $x \leq y$ és $x \neq y$, akkor használjuk az $x < y$ jelölést. Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén vagy $x = y$ vagy $x < y$ vagy $y < x$. Tehát bármely két valós számot össze tudunk hasonlítani. Ez lehetővé teszi, hogy beszéljünk az x és y közötti számokról. Az $x < y$ esetén a z valós szám az x és y között van, ha $x < z$ és $z < y$. Az x és y közötti számok halmaza az $(x, y) \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum.

Valós affin terek esetén is hasonlóan szeretnénk beszélni az egyenes két adott pontja közötti pontokról. Legyen A és B két különböző pont az \mathcal{X} valós affin térben. Létezik egyetlen $\phi_{A,B}: \mathbb{R} \rightarrow AB$ affin függvény az \mathbb{R} valós affin térről az AB egyenesre, amelyre $\phi_{A,B}(0) = A$ és $\phi_{A,B}(1) = B$, és pedig $\phi_{A,B}(\lambda) = (1 - \lambda)A + \lambda B$. Ez bijektív megfeleltetést ad az \mathbb{R} elemei és az AB egyenes pontjai között, amely 0-nak az A pontot, míg 1-nek a B pontot felelteti meg. Az A és B közötti pontok a 0 és 1 közötti értékek $\phi_{A,B}$ általi képei.

8.1. Értelmezés

Az AB egyenes egy C pontja az A és B pontok között van (jelölés: $A-B-C$), ha $C \in \phi_{A,B}((0, 1))$, vagyis létezik egyetlen $\lambda \in (0, 1)$ úgy, hogy $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$.

Az A és B pontok szerepe felcserélhető. Ha $\phi_{B,A}: \mathbb{R} \rightarrow AB$ bijektív affin függvény úgy, hogy $\phi_{B,A}(0) = B$ és $\phi_{B,A}(1) = A$, akkor $\phi_{B,A}(\mu) = (1 - \mu)B + \mu A$. Ha $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$, akkor $\mu = 1 - \lambda$ esetén $C = \mu A + (1 - \mu)B$, illetve $\lambda \in (0, 1)$ egyenértékű azzal, hogy $\mu = 1 - \lambda \in (0, 1)$. Tehát $A - C - B$ akkor és csakis akkor, ha $B - C - A$.

8.2. Megjegyzés

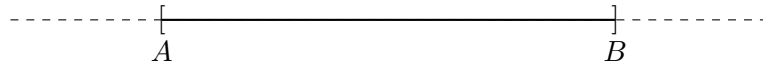
Legyen $\mathcal{R} = (O; e)$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer az AC egyenesen. Ekkor $B(\beta)_{\mathcal{R}}$ pont pontosan akkor van az $A(\alpha)_{\mathcal{R}}$ és $C(\gamma)_{\mathcal{R}}$ pontok között, ha $\alpha < \beta < \gamma$ vagy $\alpha > \beta > \gamma$. \diamond

8.1.2. Szakaszok

8.1.2.1. Zárt szakasz

Az A és B végpontú $[AB] \subset \mathcal{X}$ zárt szakasz az AB egyenes azon pontjainak a halmaza, amelyek az A és B pontok között vannak az AB egyenesen, beleértve az A és B végpontokat is:

$$\begin{aligned} [AB] &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0\} \\ &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in [0, 1]\} \\ &= \{M = (1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

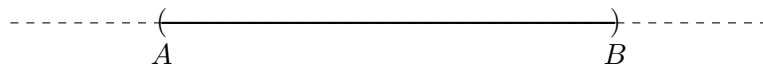


Megjegyezzük, hogy $[AB] = [BA]$.

8.1.2.2. Nyílt szakasz

Az A és B végpontú $(AB) \subset \mathcal{X}$ nyílt szakasz az AB egyenes azon pontjainak a halmaza, amelyek az A és B között vannak (kivéve az A és B végpontokat):

$$\begin{aligned} (AB) &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta > 0\} \\ &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in (0, 1)\} \\ &= \{M = (1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in (0, 1)\}. \end{aligned}$$

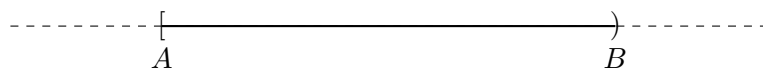


Megjegyezzük, hogy $(AB) = (BA)$.

8.1.2.3. Félig nyílt és zárt szakaszok

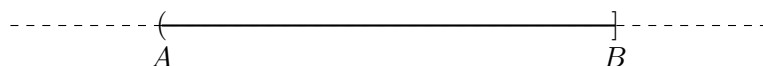
Az A -ban zárt és B -ben nyílt $[AB) \subset \mathcal{X}$ szakasz az AB egyenes azon pontjainak a halmaza, amelyek az A és B között vannak (kivéve a B végpontot és beleértve az A végpontot):

$$\begin{aligned} [AB) &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta \geq 0\} \\ &= \{M = (1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in [0, 1)\}. \end{aligned}$$



Az A -ban nyílt és B -ben zárt $(AB] \subset \mathcal{X}$ szakasz az AB egyenes azon pontjainak a halmaza, amelyek az A és B között vannak (kivéve az A végpontot és beleértve az B végpontot):

$$\begin{aligned} (AB] &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta > 0\} \\ &= \{M = (1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in (0, 1]\}. \end{aligned}$$



Megjegyezzük, hogy $[AB) = (BA]$ és $(AB] = [BA)$.

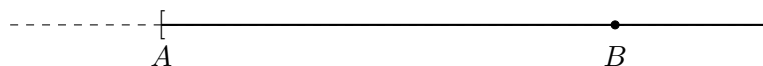
8.1.3. Félegyenesek

8.1.3.1. Zárt félegyenes

Az A kezdőpontú, B ponton átmenő $[AB \subset \mathcal{X}$ zárt félegyenes:

$$\begin{aligned} [AB &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \beta \geq 0\} \\ &= \{M = (1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda \geq 0\}. \end{aligned}$$

Használjuk még a $BA]$ jelölést is. Megjegyezzük, hogy $M \in [AB$ akkor és csak akkor, ha $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, ahol $\lambda \geq 0$.

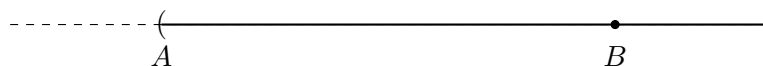


Nyílt félegyenes

Az A kezdőpontú, B ponton átmenő $(AB \subset \mathcal{X}$ nyílt félegyenes:

$$\begin{aligned} (AB &= \{M = \alpha A + \beta B \mid \alpha + \beta = 1, \beta > 0\} \\ &= \{M = (1 - \lambda)A + \lambda B \mid \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

Használjuk még a $BA)$ jelölést is. Megjegyezzük, hogy $M \in (AB$ akkor és csak akkor, ha $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, ahol $\lambda > 0$.



8.1.4. Féltér

Az $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ két összefüggő intervallum egyesítése. Emiatt egy $A \in \mathcal{L}$ pont az \mathcal{L} egyenest két diszjunkt (nyílt) félegyenesre osztja. Ha $\mathcal{R} = (A; \beta)$ egy Descartes-féle koordináta-rendszer az \mathcal{L} egyenesen, akkor

$$\mathcal{L} \setminus \{A\} = \{M(\mu)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L} \mid \mu < 0\} \cup \{M(\mu)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L} \mid \mu > 0\}.$$

Legyen \mathcal{H} egy hipersík az \mathcal{X} affin térben, amelynek egyenlete

$$\mathcal{H} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

valamely $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \dots, \beta_n)$ Descartes-féle koordináta-rendszerben. Bevezetjük az $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt,

$$h(x) = h(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b.$$

Ezzel a jelöléssel a \mathcal{H} egyenlete $h(x) = 0$ alakba is írható.

A \mathcal{H} hipersík két diszjunkt *nyílt féltérre* osztja az \mathcal{X} affin teret

$$\mathcal{X} \setminus \mathcal{H} = \{M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid h(x) < 0\} \cup \{M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid h(x) > 0\},$$

vagyis az egyik féltér azon $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pontok halmaza, amelyeknek $x = (x_1, \dots, x_n)$ koordinátáira teljesül, hogy $f(x) < 0$, illetve a másik féltér azon $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pontok halmaza, amelyeknek $x = (x_1, \dots, x_n)$ koordinátáira teljesül, hogy $f(x) > 0$. A \mathcal{H} hipersík által meghatározott (határolt) *zárt félterek* alatt az

$$\{M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid h(x) \geq 0\} = \mathcal{H} \cup \{M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid h(x) > 0\},$$

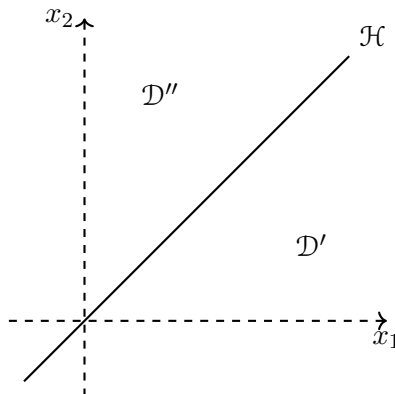
illetve az

$$\{M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid h(x) \leq 0\} = \mathcal{H} \cup \{M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid h(x) < 0\}$$

halmazokat értjük, amelyek a megfelelő nyílt félterek egyesítései a \mathcal{H} hipersíkkal.

8.3. Példa

Legyen $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ -ben a $\mathcal{H} : x_1 - x_2 = 0$ egyenletű hipersík (az első szögfelező). Ha $h(x) = h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, akkor $\mathcal{D}' = \{M(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) > 0\}$ az első szögfelező alatti féltér (felső), míg $\mathcal{D}'' = \{M(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) < 0\}$ az első szögfelező feletti féltér (felső).



◇

8.1.5. Háromszöglap, szimplex pontjai

Egy \mathcal{X} valós affin tér esetén minden A, B, C affin független pontok esetén beszélhetünk a ABC *háromszöglapról* (az ABC háromszög pontjairól):

$$\{\alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{X} \mid \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}.$$

Hasonlóan, ha A_0, A_1, \dots, A_n affin független pontok, akkor az $A_0 A_1 \dots A_n$ n -szimplex pontjainak halmaza

$$\{\lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_n A_n \in \mathcal{X} \mid \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_0, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$

Az $A_0 A_1 \dots A_n$ szimplex belseje:

$$\{\lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_n A_n \in \mathcal{X} \mid \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_0, \dots, \lambda_n \in (0, 1)\}.$$

Az $A_0 A_1 \dots A_n$ szimplex k -dimenziós lapjai az $A_{i_0} A_{i_1} \dots A_{i_k}$ szimplexek, ahol $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$. Az 1-dimenziós lapokat *éleknek* nevezzük.

8.2. Konvex halmazok

Valós affin tér egy részhalmaza konvex, ha bármely két pontja által meghatározott szakasz is a halmazban van. Legyen \mathcal{X} egy valós affin tér.

8.4. Értelmezés

Egy \mathcal{X} valós affin tér \mathcal{Q} részhalmaza *konvex*, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{Q}$ pontok esetén $[AB] \subseteq \mathcal{Q}$, vagyis minden $A, B \in \mathcal{Q}$ pontok és minden $\lambda \in [0, 1]$ skalárok esetén $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{Q}$.

8.5. Megjegyzés

Vegyük észre a hasonlóságot a konvex halmaz értelmezése és az affin résztelek jellemzése egyenesekkel között (3.60. Tétel). \diamond

8.6. Példa

- (i) $\mathcal{Q} = \emptyset$ konvex.
- (ii) Ha \mathcal{Z} affin résztere \mathcal{X} -nek, akkor \mathcal{Z} konvex (affin résztér jellemzése egyenesekkel/affin kombinációval).
- (iii) Szakaszok, félegyenesek, félterek, háromszöglapok, szimplexek konvex halmazok. \diamond

8.2.1. Konvex kombináció

A konvex kombináció egy sajátos affin kombináció, amelyben az affin súlyok a $[0, 1]$ intervallumból vannak. Ez a fogalom hasonló szerepet játszik konvex halmazok esetén, mint az affin kombináció affin résztelek esetén.

8.7. Értelmezés

Az $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{X}$ pontok $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ súlyokkal vett $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$ affin kombinációját *konvex kombinációnak* nevezzük.

Egy halmaz pontosan akkor konvex, ha bármely két pontjának konvex kombinációja is a halmazban van.

8.8. Megjegyzés

Konvex kombináció esetén az a feltétel, hogy a súlyok $[0, 1]$ intervallumból vannak egyenértékű azzal, hogy a súlyok nem negatívak, vagyis

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1], \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1. \quad \diamond$$

8.2.2. Konvex halmaz jellemzése konvex kombinációval

8.9. Tétel (Konvex halmazok jellemzése konvex kombinációval)

A $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{X}$ nemüres halmaz akkor és csakis akkor konvex, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{Q}$ pontok és tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ konvex súlyok esetén $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \in \mathcal{Q}$.

Bizonyítás.

\Rightarrow Feltételezzük, hogy a \mathcal{Q} nemüres halmaz konvex. A pontok száma szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m \in \mathcal{Q}$. Az $m = 1$ esetben (egy pont esetén) nincs mit igazolni. Az $m = 2$ eset (két pont esete) pontosan a \mathcal{Q} halmaz konvexitását jelenti.

Tegyük fel, hogy $m = N$ pontra igaz az állítás és igazolni fogjuk $m = (N + 1)$ pontra. Ha $\lambda_{N+1} = 1$, akkor a $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_{N+1} \in [0, 1]$ és $\lambda_1 + \dots + \lambda_N + \lambda_{N+1} = 1$ feltétel miatt $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$ és $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{N+1} A_{N+1} = A_{N+1} \in \mathcal{Q}$. Ha $\lambda_{N+1} \neq 1$, akkor $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 - \lambda_{N+1} > 0$ és

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_N A_N + \lambda_{N+1} A_{N+1} &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_N) \frac{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_N A_N}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} + \lambda_{N+1} A_{N+1} \\ &= (1 - \lambda_{N+1}) \frac{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_N A_N}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} + \lambda_{N+1} A_{N+1}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Az indukciós feltevés szerint $B = \frac{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_N A_N}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} \in \mathcal{Q}$, mivel B az $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{Q}$ pontok konvex kombinációja. Ezért a (8.1) összefüggés alapján

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{N+1} A_{N+1} = (1 - \lambda_{N+1})B + \lambda_{N+1} A_{N+1} \in \mathcal{Q}$$

az \mathcal{Q} konvexitása miatt, mert a jobb oldalon a B és A_{N+1} pontok konvex kombinációja áll.

\Leftarrow Fordítva, ha tetszőleges $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{Q}$ pontok konvex kombinációja is \mathcal{Q} részhalmazban van, akkor $m = 2$ esetén pontosan az \mathcal{Q} konvexitásának értelmezését kapjuk vissza. □

8.2.3. Konvex halmaz affin függvény általi képe és ősképe

Egy konvex halmaz affin függvény általi képe, illetve ősképe is konvex. Mivel a projekciók affin függvények, így sajátosan a konvex halmazok vetületei is konvexek.

8.10. Tétel

Legyen $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ egy valós affin terek közötti affin függvény.

- (a) Ha a $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz konvex, akkor az $f(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Y}$ képhalmaz is konvex.
- (b) Ha a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y}$ halmaz konvex, akkor az $f^{-1}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{X}$ őskép is konvex.

Bizonyítás.

- (a) Ha a \mathcal{Q} halmaz üres, akkor az $f(\mathcal{Q})$ is üres, tehát konvex. Ha a \mathcal{Q} halmaz nem üres, akkor $f(\mathcal{Q})$ sem üres. Meg akarjuk mutatni, hogy két tetszőleges $A', B' \in f(\mathcal{Q})$ pont és tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ skalár esetén $(1 - \lambda)A' + \lambda B' \in f(\mathcal{Q})$. Mivel $A', B' \in f(\mathcal{Q})$, ezért léteznek $A, B \in \mathcal{Q}$

pontok úgy, hogy $A' = f(A)$ és $B' = f(B)$. A \mathcal{Q} halmaz konvex, így értelmezés szerint $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{Q}$, ahonnan $f((1 - \lambda)A + \lambda B) \in f(\mathcal{Q})$. Végül az f függvény affin, tehát felcserélhető az affin kombinációval (sajátosan a konvex kombinációval is), ezért

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) = (1 - \lambda)A' + \lambda B' \in f(\mathcal{Q}).$$

Ezzel beláttuk, hogy az $f(\mathcal{Q})$ halmaz is konvex.

- (b) Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Y}$ konvex halmaz. Ha az $f^{-1}(\mathcal{P})$ halmaz üres, akkor nincs mit igazolni, ezért feltehetjük, hogy $f^{-1}(\mathcal{P})$ nemüres. Legyen $A, B \in f^{-1}(\mathcal{P})$ két tetszőleges pont, vagyis $A, B \in \mathcal{X}$ úgy, hogy $f(A), f(B) \in \mathcal{P}$. Mivel a \mathcal{P} halmaz konvex és az f függvény affin, ezért tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ skalár esetén

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) \in \mathcal{P},$$

ahonnan következik hogy $(1 - \lambda)A + \lambda B \in f^{-1}(\mathcal{P})$. Ezzel beláttuk, hogy az $f^{-1}(\mathcal{P})$ halmaz is konvex. \square

8.2.4. Konvex halmazok metszete

Az affin részterekhez hasonlóan a konvex halmazok tetszőleges metszete is konvex.

8.11. Tulajdonság

Ha $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{X}$ halmazok konvex, minden $i \in I$ indexre, akkor a $\cap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ metszet is konvex.

Bizonyítás. Ha $\cap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ üres halmaz, akkor nincs mit bizonyítani, mert az üres halmaz konvex. Ha $\cap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ nem üres, akkor legyen $A, B \in \cap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ két tetszőleges pont. Ekkor $A, B \in \mathcal{Q}_i$, minden $i \in I$ index esetén. Mivel a \mathcal{Q}_i halmazok konvexek, minden $i \in I$ esetén, ezért tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ skalárra $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \mathcal{Q}_i$, minden $i \in I$ esetén. Ebből következik, hogy $(1 - \lambda)A + \lambda B \in \cap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$, tehát $\cap_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ metszet is konvex. \square

A síkban minden konvex sokszög felírható zárt félsíkok metszeteként. A zárt (illetve nyílt) körlap is előállítható végtelen sok zárt (illetve nyílt) olyan félsík metszeteként, amelyeket határoló egyenes érinti a körlapot határoló kört.

8.2.5. A konvex burkoló és jellemzése konvex kombinációval

8.2.5.1. Konvex burkoló

Az affin részterekhez hasonlóan a konvex halmazokra sem igaz általában, hogy az egyesítésük konvex. Például $[0, 1], [3, 4] \subseteq \mathbb{R}$ konvex halmazok, de $[0, 1] \cup [3, 4] \subseteq \mathbb{R}$ nem konvex, mivel $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2 \notin [0, 1] \cup [3, 4]$. Ezért az affin burkoló mintájára bevezetjük a konvex burkoló fogalmát.

Emlékeztetünk, hogy \mathcal{X} részhalmazain a bennfoglalás egy (részleges) rendezés.

8.12. Értelmezés

Az $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmaz *konvex burka* (vagy *konvex burkolója*) a legkisebb konvex halmaz (a bennfoglalásra nézve), amely tartalmazza az \mathcal{M} halmazt, vagyis $\text{konv}(\mathcal{M})$ olyan konvex halmaz, hogy minden $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{X}$ konvex halmaz esetén ha $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}$, akkor $\text{konv}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{Q}$. Jelölés: $\text{konv}(\mathcal{M})$.

A konvex burkoló létezését és egyértelműségét a következő tulajdonságban látjuk be.

8.13. Tulajdonság (Konvex halmaz létezése és egyértelműsége)

A $\text{konv}(\mathcal{M})$ konvex burok az \mathcal{X} valós affin tér azon konvex részhalmazainak a metszete, amelyek tartalmazzák az \mathcal{M} halmazt, vagyis

$$\text{konv}(\mathcal{M}) = \bigcap_{Q \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}} Q,$$

ahol $\mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}} = \{K \subseteq \mathcal{X} \mid \mathcal{M} \subseteq K, K \text{ konvex}\}$ az \mathcal{M} halmazt tartalmazó konvex részhalmazok halmaza.

Bizonyítás. Egyértelműség. Ha létezik két konvex halmaz Q_1 és Q_2 , amely rendelkezik a $\text{konv}(\mathcal{M})$ konvex burkoló tulajdonságaival, akkor Q_1 benne kell legyen Q_2 halmazban, mert Q_2 konvex és tartalmazza az \mathcal{M} halmazt. Hasonló megfontolásból Q_2 is benne kell legyen Q_1 -ben, ezért $Q_1 = Q_2$.

Létezés. Ha a jobb oldali metszetről belátjuk, hogy konvex, tartalmazza az \mathcal{M} halmazt és minden olyan konvex halmazban benne van, amely tartalmazza az \mathcal{M} halmazt, akkor meg fog egyezni a $\text{konv}(\mathcal{M})$ konvex burkolóval. A 8.11. Tulajdonság alapján a $\bigcap_{Q \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}} Q$ halmaz konvex, mert konvex halmazok metszete. Továbbá a $\mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}$ halmaz értelmezése szerint $\mathcal{M} \subseteq Q$, minden $Q \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}$ esetén, ezért $\mathcal{M} \subseteq \bigcap_{Q \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}} Q$. Végül legyen $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$ egy olyan konvex halmaz úgy, hogy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Ekkor a $\mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}$ halmaz értelmezése miatt $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}$, ahonnan kapjuk, hogy $\bigcap_{Q \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}} Q \subseteq \mathcal{N}$. Ezzel beláttuk, hogy $\bigcap_{Q \in \mathcal{K}_{\text{onv}\mathcal{M}}} Q$ a legkisebb olyan konvex halmaz, ami tartalmazza \mathcal{M} halmazt, így az egyértelműség miatt megegyezik az \mathcal{M} konvex burkolójával. \square

A konvex burkoló az affin burkolóhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik.

8.14. Tulajdonság

- (i) $\text{konv}(\emptyset) = \emptyset$.
- (ii) Az $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ részhalmaz pontosan akkor konvex, ha $\text{konv}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.
- (iii) Ha $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, akkor $\text{konv}(\mathcal{M}) \subseteq \text{konv}(\mathcal{N})$. Sajátosan, ha $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ affin résztér úgy, hogy $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$, akkor $\text{konv}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}$, mivel \mathcal{L} konvex.

Bizonyítás.

- (i) Az üres halmaz a legkisebb konvex halmaz, ami tartalmazza az üres halmazt.
- (ii) Az értelmezés alapján $\mathcal{M} \subseteq \text{konv}(\mathcal{M})$, illetve ha \mathcal{M} konvex, akkor $\text{konv}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Ez alapján beláttuk, hogy ha \mathcal{M} konvex, akkor $\text{konv}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Fordítva, ha $\text{konv}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, akkor \mathcal{M} is konvex kell legyen, mivel $\text{konv}(\mathcal{M})$ konvex.
- (iii) Az $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \text{konv}(\mathcal{N})$ bennfoglalás és a konvex burkoló értelmezése alapján következik, hogy $\text{konv}(\mathcal{M}) \subseteq \text{konv}(\mathcal{N})$.

\square

Egy \mathcal{X} valós affin tér Q nemüres halmazának tartósíkja $\text{af}(Q)$ a legkisebb affin résztér, amely tartalmazza a Q halmazt. Az ABC háromszög esetén az $[AB] = \text{konv}(\{A, B\})$ szakasz a há-

romszög egyik oldala, melynek tartóegyenes az $AB = \text{af}(\{A, B\})$ egyenes. Hasonlóan egy kocka egyik oldallapjának tartósíkja az a sík, amelyben benne van az adott oldallap.

8.2.5.2. Konvex burkoló jellemzése konvex kombinációval

Az affin burkoló jellemzése affin kombináció tétel (3.34. Tétel) mintájára jellemezhetjük a konvex burkolót konvex kombináció segítségével.

8.15. Tétel (Konvex burkoló jellemzése konvex kombinációval)

Legyen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ egy nemüres részhalmaz. Ekkor

$$\text{konv}(\mathcal{M}) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i \mid m \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}. \quad (8.2)$$

Bizonyítás. Bevezetjük az

$$\overline{\mathcal{M}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i \mid m \in \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

jelölést és igazolni szeretnénk, hogy $\text{konv}(\mathcal{M}) = \overline{\mathcal{M}}$. Ezt az egyenlőséget kétoldali bennfoglalással fogjuk igazolni.

\subseteq A 8.9. Tétel alapján az $\overline{\mathcal{M}}$ minden eleme benne van a $\text{konv}(\mathcal{M})$ konvex halmazban, vagyis $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \text{konv}(\mathcal{M})$.

\supseteq A fordított irányú bennfoglaláshoz elég belátni, hogy $\overline{\mathcal{M}}$ konvex és tartalmazza az \mathcal{M} halmazt, mert a konvex burkoló értelmezése alapján következni fog, hogy $\text{konv}(\mathcal{M}) \subseteq \overline{\mathcal{M}}$. Ha az $\overline{\mathcal{M}}$ értelmezésében $m = 1$ -et választunk, akkor azt kapjuk, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{M}$ pont esetén $A \in \overline{\mathcal{M}}$, ezért $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$.

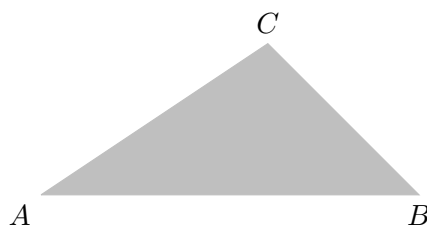
Belátjuk, hogy $\overline{\mathcal{M}}$ konvex. Legyen $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m \in \overline{\mathcal{M}}$ és $B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_n B_n \in \overline{\mathcal{M}}$ két tetszőleges pont és $\lambda \in [0, 1]$ tetszőleges skalár, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in [0, 1]$ és $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \beta_1 + \dots + \beta_n = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)A + \lambda B &= (1 - \lambda)(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m) + \lambda(\beta_1 B_1 + \dots + \beta_n B_n) \\ &= (1 - \lambda)\alpha_1 A_1 + \dots + (1 - \lambda)\alpha_m A_m + \lambda\beta_1 B_1 + \dots + \lambda\beta_n B_n \in \overline{\mathcal{M}}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

mert $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{M}$ és $(1 - \lambda)\alpha_1, \dots, (1 - \lambda)\alpha_m, \lambda\beta_1, \dots, \lambda\beta_n \in [0, 1]$ úgy, hogy $(1 - \lambda)\alpha_1 + \dots + (1 - \lambda)\alpha_m + \lambda\beta_1 + \dots + \lambda\beta_n = (1 - \lambda)(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) + \lambda(\beta_1 + \dots + \beta_n) = (1 - \lambda) + \lambda = 1$. Tehát a (8.3) összefüggés alapján $\overline{\mathcal{M}}$ konvex. \square

8.16. Példa

- (i) Az $\mathcal{M} = \{A, B\}$ két különböző pontból álló halmaz konvex burka a $\text{konv}\{A, B\} = [AB]$ szakasz.
- (ii) Az $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$ három affin független pontból álló halmaz konvex burka az ABC háromszöglap (beleértve a csúcsokat, oldalakat és a belsejét is.)



- (iii) Egy paralelogramma a csúcsainak konvex burka.
- (iv) Egy \mathcal{D} zárt körlap megegyezik a határán lévő \mathcal{C} kör konvex burkolójával.

◇

A sík konvex sokszöglapjai a sokszöglap csúcsainak konvex burkolója, továbbá megadható, mint az oldalak által meghatározott azon zárt félsíkok metszeteként is, amelyek tartalmazzák a sokszöglap egy belső pontját. Hasonlóképpen a tér azon konvex részhalmazait, amelyeket véges sok sokszöglapok határol poliédereknek nevezzük. A poliéderek megadhatók véges sok zárt féltér metszeteként, amelyeket a sokszöglapok síkjai határolnak. Véges sok pont konvex burkát politópoknak nevezzük. Korlátos poliéderek egyben politópok is, tehát minden politóp megadható véges sok zárt féltér metszeteként, illetve minden korlátos poliéder megadható véges sok pont konvex burkaként.

8.3. Konvex halmazokkal kapcsolatos tételek

8.3.1. Radon tétele

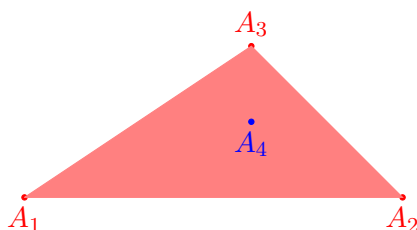
8.17. Tétel (Radon tétele)

Egy n -dimenziós \mathcal{X} valós affin térben bármely $m \geq n + 2$ pontból álló $\mathcal{M} = \{A_1, \dots, A_m\}$ halmaz felírható két, \mathcal{M}_1 és \mathcal{M}_2 nemüres diszjunkt részhalmazok egyesítéseként (vagyis $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ és $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$) úgy, hogy

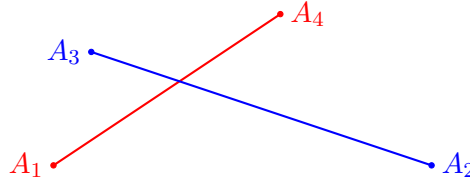
$$\text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset.$$

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra, nézzük meg pár példán keresztül, hogy mit is mond a tétel. Ha az \mathcal{X} valós affin tér 1-dimenziós, vagyis egy valós egyenes, akkor a feltevés alapján \mathcal{M} -nek legalább három pontja kell legyen, vagyis létezik $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}$ három különböző pont. Ekkor az egyik (például az A_1 pont) a másik kettő (A_2 és A_3 pontok) közé esik (vagyis $A_1 \in [A_2 A_3] = \text{konv}(\{A_2, A_3\})$). Ha az A_1 pontot az \mathcal{M}_1 -be soroljuk és az A_2, A_3 pontokat az \mathcal{M}_2 -be, illetve a többi tetszőlegesen szétosztva a két halmaz között kapjuk, hogy $A_1 \in \text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset$.

Ha \mathcal{X} két dimenziós valós affin tér, vagyis egy sík, akkor a feltétel alapján az \mathcal{M} halmaznak legalább 4 eleme kell legyen. Az első példában legyen $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ az alábbi ábrának megfelelően.



Ha $\mathcal{M}_1 = \{A_1, A_2, A_4\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{A_3\}$, akkor $\text{konv}(\mathcal{M}_1)$ a piros háromszög, amiben benne van $\text{konv}(\mathcal{M}_2) = \{A_3\}$ kékkel jelölt pont, tehát $\text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) = \{A_3\} \neq \emptyset$. A második példában legyen $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ az alábbi ábrának megfelelően.



Ekkor az $\mathcal{M}_1 = \{A_1, A_4\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{A_2, A_3\}$ halmazok esetén a $\text{konv}(\mathcal{M}_1) = [A_1A_4]$ pirossal jelölt szakasz metszi a $\text{konv}(\mathcal{M}_2) = [A_2A_3]$ kékkel jelölt szakaszt. Tehát $\text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset$. Ha az \mathcal{M} síkbeli halmaznak több pontja van mint 4, akkor bármely négyet kiválasztva lényegében a fenti két eset valamelyike fog előfordulni.

Bizonyítás. Egy n -dimenziós affin térben bármely $m \geq n + 2$ pont affin függő. Valóban, $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_m}$, $m - 1 \geq n + 1$ vektorok lineárisan függőek az n -dimenziós $\vec{\mathcal{X}}$ valós vektortérben, amely a 6.53. Tulajdonság alapján pontosan azt jelenti, hogy A_1, \dots, A_m pontok affin függőek. Az értelmezés alapján az egyik pont benne van a többi pont affin burkában, tehát az egyik pont felírható a többi pont affin kombinációjaként. Legyen ez a pont az A_m (különben újraindexeljük a pontokat). Tehát léteznek olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_{m-1} = 1$ affin súlyok, hogy $A_m = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{m-1} A_{m-1}$. A $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ affin súlyok közül valahány nagyobb, mint 0 és valahány kisebb vagy egyenlő, mint 0. Mivel $\lambda_1 + \dots + \lambda_{m-1} = 1$, ezért kell létezzen legalább egy pozitív súly. Ha minden súly pozitív, akkor a fenti affin kombináció tulajdonképpen egy konvex kombináció lesz, így $\mathcal{M}_1 = \{A_1, \dots, A_{m-1}\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{A_m\}$ esetén

$$A_m \in \text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset.$$

Ha nem mindegyik súly pozitív, akkor az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ és $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{m-1} \leq 0$ (a pontok újraindexelésével ezt elérhetjük). Ha $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont, akkor

$$\begin{aligned} A_m &= \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{m-1} A_{m-1} \\ \iff \overrightarrow{OA_m} &= \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_{m-1} \overrightarrow{OA_{m-1}} \\ \iff \overrightarrow{OA_m} - \lambda_{k+1} \overrightarrow{OA_{k+1}} - \dots - \lambda_{m-1} \overrightarrow{OA_{m-1}} &= \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőség mindkét oldalt elosztjuk a $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} - \dots - \lambda_{m-1}$ pozitív számmal, hogy konvex kombinációkat kapjunk:

$$B = \frac{A_m - \lambda_{k+1} A_{k+1} - \dots - \lambda_{m-1} A_{m-1}}{1 - \lambda_{k+1} - \dots - \lambda_{m-1}} = \frac{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}. \quad (8.4)$$

A (8.4) egyenlőség két oldala értelmez egy B pontot az \mathcal{X} affin térben, amelyet kétféleképpen fejeztünk ki, először mint az A_{k+1}, \dots, A_m pontok konvex kombinációja, s másodszor mint az A_1, \dots, A_k pontok konvex kombinációja. Tehát,

$$B \in \text{konv}\{A_1, \dots, A_k\} \cap \text{konv}\{A_{k+1}, \dots, A_m\} \neq \emptyset,$$

ezért legyenek $\mathcal{M}_1 = \{A_1, \dots, A_k\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{A_{k+1}, \dots, A_m\}$. □

8.3.2. Helly tétele

8.18. Tétel (Helly tétele)

Ha $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r$ ($r \geq n+1$) konvex halmazok egy n -dimenziós valós affin térben úgy, hogy bármely $n+1$ halmaz metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres, vagyis $\bigcap_{i=1}^r \mathcal{K}_i \neq \emptyset$.

Bizonyítás. A tételt r , a halmazok száma szerinti indukcióval igazoljuk. Ha $r = n+1$, akkor a feltevés alapján az összes halmaz metszete nem üres. Tegyük fel, hogy igaz a tétel $r = N$ esetén, és igazolni fogjuk az $r = N+1$ esetben, vagyis hogy $\bigcap_{i=1}^{N+1} \mathcal{K}_i \neq \emptyset$.

Bevezetjük a következő halmazokat:

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_{i-1} \cap \mathcal{K}_{i+1} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{N+1}, \quad \forall i = 1, \dots, N+1 \quad (8.5)$$

(vesszük az összes halmaz metszetét, kivéve az i -diket). Ezek a halmazok N konvex halmaz metszeteként állnak elő és az indukciós feltevés alapján nem üres konvex halmazok.

Mindegyik ilyen halmazból kiválasztunk egy-egy pontot, legyenek $A_i \in \mathcal{Q}_i$ minden $i = 1, \dots, N+1$ esetén. Feltehetjük, hogy az A_i , $i = 1, \dots, N+1$ pontok mind különbözőek, mivel ha $A_i = A_j$ valamely $i \neq j$ esetén, akkor $A_i = A_j \in \mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j = \mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_{N+1}$, így $\bigcap_{i=1}^{N+1} \mathcal{K}_i \neq \emptyset$.

Képezzük az $\mathcal{M} = \{A_1, \dots, A_{N+1}\}$ halmazt, aminek $N+1 \geq (n+1)+1 = n+2$ eleme van, mivel a feltevés alapján $N \geq n+1$. Az \mathcal{M} halmazra alkalmazhatjuk Radon tételét (8.17. Tétel), tehát léteznek olyan $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}$ nem üres diszjunkt részhalmazok ($\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$), hogy $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ és

$$\text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset. \quad (8.6)$$

Feltehetjük, hogy $\mathcal{M}_1 = \{A_1, \dots, A_k\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{A_{k+1}, \dots, A_{N+1}\}$, különben újraindexeljük a konvex halmazokat és pontokat. A (8.5) értelmezésből látható, hogy $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k \subseteq \mathcal{K}_{k+1} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{N+1}$, ezért $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{K}_{k+1} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{N+1}$, sőt

$$\text{konv}(\mathcal{M}_1) = \text{konv}(\{A_1, \dots, A_k\}) \subseteq \mathcal{K}_{k+1} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{N+1}, \quad (8.7)$$

mivel a $\mathcal{K}_{k+1}, \dots, \mathcal{K}_{N+1}$ halmazok konvexek. Hasonlóan beláthatjuk, hogy

$$\text{konv}(\mathcal{M}_2) = \text{konv}(\{A_{k+1}, \dots, A_{N+1}\}) \subseteq \mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_k. \quad (8.8)$$

Végül a (8.6), (8.7) és (8.8) összefüggések alapján

$$\emptyset \neq \text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \subseteq (\mathcal{K}_{k+1} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{N+1}) \cap (\mathcal{K}_1 \cap \dots \cap \mathcal{K}_k) = \bigcap_{i=1}^{N+1} \mathcal{K}_i,$$

tehát $\bigcap_{i=1}^{N+1} \mathcal{K}_i \neq \emptyset$. □

8.19. Következmény

Ha a (valós) síkban adott $n \geq 3$ darab körlap (háromszöglap, ellipszis alakú lap) úgy, hogy bármely 3 metszete nem üres, akkor az összes körlapnak (háromszöglapnak, ellipszis alakú lapnak) van közös pontja.

Ha a (valós) térben adott $n \geq 4$ darab golyó (tetraéder) úgy, hogy bármely 4 metszete nem üres, akkor az összes golyónak (tetraédernek) van közös pontja.

8.3.3. Carathéodory tétele

A következő tétel az \mathcal{X} valós affin tér dimenziója függvényében korlátot ad arra, hogy a konvex burkoló esetén legfeljebb hány pontnak kell a konvex kombinációját venni (lásd a 8.15. Tételt).

8.20. Tétel (Carathéodory tétele)

Tetszőleges $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ nemüres részhalmaz esetén az n -dimenziós \mathcal{X} valós affin térben

$$\text{konv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k A_k \mid A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1], \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1 \right\}. \quad (8.9)$$

Bizonyítás. Jelöljük $\bar{\mathcal{A}}$ -val a (8.9) jobb oldalán álló halmazt. A 8.15. Tétel alapján $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \text{konv}(\mathcal{A})$, mert a konvex burkoló jellemzése konvex kombinációval során hasonló halmazról igazoltuk, hogy megegyezik a konvex burkolóval. A különbség csak az volt, hogy nem korlátoztuk a pontok számát a konvex kombinációban.

Fordított irányú bennfoglaláshoz legyen $M \in \text{konv}(\mathcal{A})$. A 8.15. Tétel alapján léteznek $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ pontok és $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ konvex súlyok úgy, hogy

$$M = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m. \quad (8.10)$$

Ha $m \leq n+1$, akkor $M \in \bar{\mathcal{A}}$. Ha $m > n+1$, akkor igazolni fogjuk, hogy M felírható $m-1$ pont konvex kombinációjaként is. Ha valamelyik $\lambda_i = 0$, akkor M felírható a maradék $m-1$ pont konvex kombinációjaként is, ezért feltehetjük, hogy $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$.

Mivel $m > n+1$, vagyis $m \geq n+2$, ezért az $\mathcal{M} = \{A_1, \dots, A_m\}$ halmazra alkalmazhatjuk Radon tételét, tehát léteznek $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}$ nemüres diszjunkt ($\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$) részhalmazok úgy, hogy $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$ és

$$\text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset. \quad (8.11)$$

Feltételezhetjük, hogy $\mathcal{M}_1 = \{A_1, \dots, A_k\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{A_{k+1}, \dots, A_m\}$, különben újraindexeljük a pontokat. A (8.11) szerint léteznek $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ és $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$, $\sum_{i=k+1}^m \alpha_i = 1$ konvex súlyok úgy, hogy

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k = \alpha_{k+1} A_{k+1} + \dots + \alpha_m A_m \in \text{konv}(\mathcal{M}_1) \cap \text{konv}(\mathcal{M}_2), \quad (8.12)$$

ami egy relációt ad az A_1, \dots, A_m pontok között. Innen ki fogjuk fejezni az egyik pontot a többi segítségével úgy, hogy mikor visszahelyettesítjük a (8.10) összefüggésbe egy konvex kombinációt kapjunk, vagyis az együtthatók ne legyenek negatívak.

Hogy eldöntsük, hogy melyik pontot fejezzük ki, ezért tekintjük az

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\lambda_{k+1}}, \dots, \frac{\alpha_m}{\lambda_m}$$

nem negatív számok sorozatát. Vesszük ennek a sorozatnak a legnagyobb tagját és az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy $\frac{\alpha_m}{\lambda_m}$ a legnagyobb tag, vagyis

$$\frac{\alpha_i}{\lambda_i} \leq \frac{\alpha_m}{\lambda_m}, \quad \forall i = k+1, \dots, m-1. \quad (8.13)$$

Megjegyezzük, hogy az α_m nem lehet 0, különben $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$, de az összegük 1, ami ellentmondáshoz vezetne.

A (8.13) alapján az A_m pontot fogjuk kifejezni a (8.12) összefüggésből a többi pont segítségével:

$$A_m = \frac{\alpha_1}{\alpha_m} A_1 + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} A_k - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_m} A_{k+1} - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} A_{m-1}, \quad (8.14)$$

amely egy affin kombináció, mivel

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_m} + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_m} - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k - (\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{m-1}) + \alpha_m}{\alpha_m} = \frac{1 - 1 + \alpha_m}{\alpha_m} = 1.$$

A (8.14) kifejezést behelyettesítve a (8.10) összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M = & \left(\lambda_1 + \lambda_m \frac{\alpha_1}{\alpha_m} \right) A_1 + \cdots + \left(\lambda_k + \lambda_m \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right) A_k + \\ & + \left(\lambda_{k+1} - \lambda_m \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_m} \right) A_{k+1} + \cdots + \left(\lambda_{m-1} - \lambda_m \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \right) A_{m-1}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Egyrészt $\lambda_1 + \lambda_m \frac{\alpha_1}{\alpha_m}, \dots, \lambda_k + \lambda_m \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \geq 0$, mivel két nemnegatív szám összegéből állnak. Másrészt $\lambda_{k+1} - \lambda_m \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_m}, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \geq 0$, mivel a (8.13) alapján minden $i = k+1, \dots, m-1$ esetén

$$\frac{\alpha_i}{\lambda_i} \leq \frac{\alpha_m}{\lambda_m} \iff \lambda_m \alpha_i \leq \lambda_i \alpha_m \iff \lambda_m \frac{\alpha_i}{\alpha_m} \leq \lambda_i \iff 0 \leq \lambda_i - \lambda_m \frac{\alpha_i}{\alpha_m}.$$

Végezetül, a (8.15) egy konvex kombináció, mert az együtthatók összege 1:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1 + \lambda_m \frac{\alpha_1}{\alpha_m} \right) + \cdots + \left(\lambda_k + \lambda_m \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right) + \left(\lambda_{k+1} - \lambda_m \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_m} \right) + \cdots + \left(\lambda_{m-1} - \lambda_m \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \right) = \\ & = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{m-1}) + \lambda_m \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_m} + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right) - \lambda_m \left(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_m} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \right) = \\ & = (1 - \lambda_m) + \lambda_m \frac{1}{\alpha_m} - \lambda_m \frac{1 - \alpha_m}{\alpha_m} = (1 - \lambda_m) + \lambda_m = 1. \end{aligned}$$

Fenti módszerrel tudtuk csökkenteni az \mathcal{A} -beli pontok számát, aminek a konvex kombinációjaként előállítható az M pont. Ez addig ismételtethető, amíg a (8.10) konvex kombinációban a tagok száma $m = n + 1$ lesz, tehát $M \in \bar{\mathcal{A}}$ és így $\text{konv}(\mathcal{A}) \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. \square

9. fejezet

Euklideszi vektorterek

Ebben a fejezetben átvisszautalozzuk lineáris algebrából az euklideszi vektortér, skalárszorzat, norma, merőleges vektorhalmaz fogalmakat, melyek szükségesek a merőlegesség, távolság, szög, ortonormált koordináta-rendszer, merőleges vetület fogalmak értelmezéséhez euklideszi affin terekben.

9.1. Skalárszorzat, norma

9.1.1. Skalárszorzat és vektorok merőlegessége

9.1. Értelmezés

A $\cdot: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ függvény *skalárszorzat* a \mathcal{V} valós vektortéren, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

(i) Bilineáris vagyis lineáris mindkét változóban:

(a) $(\lambda x + \mu y) \cdot z = \lambda(x \cdot z) + \mu(y \cdot z)$, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $x, y, z \in \mathcal{V}$ vektorok esetén;

(b) $z \cdot (\lambda x + \mu y) = \lambda(z \cdot x) + \mu(z \cdot y)$, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $x, y, z \in \mathcal{V}$ vektorok esetén.

(ii) Szimmetrikus: $x \cdot y = y \cdot x$, minden $x, y \in \mathcal{V}$ vektorok esetén.

(iii) Pozitív definit: $x \cdot x \geq 0$, minden $x \in \mathcal{V}$ vektor esetén, és $x \cdot x = 0$ pontosan akkor, ha $x = \vec{0}_{\mathcal{V}}$.

A skalárszorzatra használni szoktuk a $x \cdot y = \rho(x, y) = \langle x, y \rangle$ típusú jelöléseket is.

9.2. Értelmezés

Egy (\mathcal{V}, \cdot) párt, ahol \mathcal{V} egy valós vektortér és „ \cdot ” egy skalárszorzat a \mathcal{V} -n *euklideszi vektortérnek* nevezzük.

Ha \mathcal{W} a \mathcal{V} euklideszi tér egy lineáris altere, akkor a \mathcal{V} -n megadott skalárszorzat származtat egy skalárszorzatot a \mathcal{W} altéren, így \mathcal{W} is euklideszi vektortér lesz a származtatott skalárszorzattal.

9.3. Példa

A \mathbb{R}^n valós vektortéren $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, minden $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

vektorok esetén egy skalárszorzat. Ezt a skalárszorzatot *standard skalárszorzatnak* nevezzük az \mathbb{R}^n -en. Ha az \mathbb{R}^n -re, mint euklideszi vektortérként hivatkozunk a skalárszorzat említése nélkül, akkor a standard skalárszorzatra gondolunk. \diamond

9.4. Példa

Legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ egy bázis a \mathcal{V} valós vektortéren és $x(x_1 \dots x_n)_{\mathbf{B}}, y(y_1 \dots y_n)_{\mathbf{B}} \in \mathcal{V}$ két vektor. Egy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$(n \times n)$ -es valós mátrixhoz hozzárendelhetjük az

$$x \cdot y = [x]_{\mathbf{B}}^t A [y]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

bilineáris formát. Ez a megfeleltetés pontosan akkor lesz skalárszorzat, ha az A mátrix szimmetrikus és pozitív definit. A Sylvester-tétel alapján az A szimmetrikus mátrix pontosan akkor pozitív definit, ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (9.1)$$

Megjegyezzük, hogy egy szimmetrikus pozitív definit mátrixnak a sajátértékei valósak és pozitívak. \diamond

9.5. Példa

A $\cdot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ egy skalárszorzat az \mathbb{R}^2 -en. Valóban, a mátrix szorzás disztributív, ezért „ \cdot ” bilineáris lesz. A „ \cdot ” mátrixa $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ szimmetrikus és a (9.1) aldeterminánsok rendre 3 és 11, így a Sylvester-tétel alapján „ \cdot ” pozitív definit bilineáris forma, ezért skalárszorzat. \diamond

Skalárszorzat segítségével értelmezhetjük vektorok merőlegességét.

9.6. Értelmezés

Az $x, y \in \mathcal{V}$ vektorok *merőlegesek vagy ortogonálisak egymásra* (jelölés: $x \perp y$) a \mathcal{V} euklideszi vektortérben, ha $x \cdot y = 0$.

A skalárszorzat szimmetriája miatt, ha $x \perp y$, akkor $y \perp x$, tehát a merőlegességi reláció szimmetrikus.

9.1.2. Merőleges vektorhalmazok

Egy euklideszi vektortér két nemüres részhalmaza merőleges egymásra, ha a két halmaz bármely két vektora merőleges egymásra.

9.7. Értelmezés

A \mathcal{V} euklideszi vektortér $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmazai *merőlegesek egymásra* (jelölés: $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$), ha minden $a \in \mathcal{A}$ és minden $b \in \mathcal{B}$ vektor esetén $a \perp b$.

Mivel a vektorok merőlegessége skalárszorzattal volt értelmezve, ezért nemüres részhalmazok merőlegessége megfogalmazható a következőképpen is: $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ akkor és csakis akkor, ha minden $a \in \mathcal{A}$ és $b \in \mathcal{B}$ vektorok esetén $a \cdot b = 0$.

9.8. Példa

- (a) Minden \mathcal{V} euklideszi vektortér esetén a $\{\vec{0}\}$ részhalmaz merőleges a \mathcal{V} tetszőleges részhalmazára, vagyis $\{\vec{0}\} \perp \mathcal{A}$, minden $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmaz esetén.
- (b) Minden \mathcal{V} euklideszi vektortér esetén csak a nullvektor merőleges önmagára, ezért ha $\mathcal{V} \perp \mathcal{A}$, akkor $\mathcal{A} = \{\vec{0}\}$.
- (c) Az \mathbb{R}^2 euklideszi vektortér esetén $\mathcal{A} = \{(1, 0), (2, 0)\}$ és $\mathcal{B} = \{(0, 2), (0, -2)\}$ részhalmazok merőlegesek egymásra.
- (d) Ha $\mathbf{E} = (e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n(0, \dots, 1))$ a kanonikus bázis az \mathbb{R}^n euklideszi vektortéren, akkor $e_i \perp e_j$, minden $1 \leq i \neq j \leq n$ esetén, ezért bármely $k = 1, \dots, n-1$ esetén

$$\langle e_1, \dots, e_k \rangle \perp \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle,$$

és bármely $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$ nemüres index halmazok esetén

$$\langle e_i \mid i \in \mathcal{I} \rangle \perp \langle e_j \mid j \in \mathcal{J} \rangle \iff \mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \emptyset.$$

◇

Emlékeztetünk, hogy egy \mathcal{V} euklideszi tér részhalmazain a bennfoglalás egy rendezési reláció, és az $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ részhalmazok esetén azt mondjuk, hogy \mathcal{A} nagyobb, mint \mathcal{B} (vagy \mathcal{B} kisebb, mint \mathcal{A}), ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

9.9. Értelmezés

A \mathcal{V} euklideszi vektortér \mathcal{A} nemüres részhalmazának *merőleges kiegészítője* (vagy *ortogonális komplementuma*)

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in \mathcal{V} \mid x \perp a, \forall a \in \mathcal{A}\}.$$

Az \mathcal{A}^\perp az \mathcal{V} legnagyobb részhalmaz a bennfoglalásra nézve, amely merőleges az \mathcal{A} részhalmazra. Mivel $\vec{0} \perp v$, minden $v \in \mathcal{V}$ esetén, ezért $\vec{0} \in \mathcal{A}^\perp$, így \mathcal{A}^\perp nem üres, minden $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmaz esetén.

A merőleges kiegészítő megfordítja a részhalmazok bennfoglalását.

9.10. Tulajdonság

Egy \mathcal{V} euklideszi vektortér $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ nemüres részhalmazai esetén $\mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$.

Bizonyítás. Ha $v \in \mathcal{B}^\perp$ tetszőleges vektor, akkor $v \perp b$, minden $b \in \mathcal{B}$ esetén, és az $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ bennfoglalás miatt $v \perp a$, minden $a \in \mathcal{A}$ esetén. Tehát tetszőleges $v \in \mathcal{B}^\perp$ vektor esetén $v \in \mathcal{A}^\perp$, ahonnan következik, hogy $\mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$. □

9.11. Tulajdonság

Legyen \mathcal{A} és \mathcal{B} a \mathcal{V} euklideszi vektortér két nemüres részhalmaza.

- (i) Ha $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A} \perp \langle \mathcal{B} \rangle$, ahol $\langle \mathcal{B} \rangle \leq_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ a \mathcal{B} halmaz által generált lineáris altér.
- (ii) Az \mathcal{A}^\perp merőleges kiegészítő a \mathcal{V} egy lineáris altere.
- (iii) Ha $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$, akkor $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ vagy $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\vec{0}\}$.
- (iv) Legyen \mathcal{V} véges dimenziós. Ha \mathcal{A} a \mathcal{V} egy lineáris altere, akkor $\mathcal{V} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$.

Bizonyítás.

- (i) Ha $v \in \langle \mathcal{B} \rangle$ egy vektor a \mathcal{B} halmaz által generált altérből, akkor léteznek $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{B}$ vektorok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárok úgy, hogy $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k$. Ekkor minden $a \in \mathcal{A}$ vektor esetén

$$a \perp v \iff a \cdot v = 0 \iff a \cdot (\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k) = 0 \iff \lambda_1 (a \cdot b_1) + \dots + \lambda_k (a \cdot b_k) = 0,$$

ami teljesül, mivel az $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ feltételből következik, hogy $a \perp b_i$, azaz $a \cdot b_i = 0$, minden $i = 1, \dots, k$ esetén.

- (ii) Értelmezés alapján $\mathcal{A} \perp \mathcal{A}^\perp$, ahonnan az (i) alpont szerint $\mathcal{A} \perp \langle \mathcal{A}^\perp \rangle$. Mivel $\mathcal{A}^\perp \subseteq \langle \mathcal{A}^\perp \rangle$ és \mathcal{A}^\perp a legnagyobb halmaz azok a halmazok közül, amelyek merőlegesek \mathcal{A} -ra, ezért $\mathcal{A}^\perp = \langle \mathcal{A}^\perp \rangle$, így sajátosan \mathcal{A}^\perp altere a \mathcal{V} vektortérnek.
- (iii) Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Ekkor minden $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ esetén az $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ feltétel miatt az x vektor merőleges kell legyen önmagára, tehát

$$x \perp x \iff x \cdot x = 0 \iff x = \vec{0},$$

a skalárszorzat pozitivitása alapján. Tehát, ha $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, akkor $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\vec{0}\}$.

- (iv) Az (ii) alpont alapján \mathcal{A}^\perp a \mathcal{V} egy lineáris altere. Mivel \mathcal{A} és \mathcal{A}^\perp a \mathcal{V} lineáris alterei, ezért sajátosan $\vec{0} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp$. Így az (iii) alpont alapján $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\perp = \{\vec{0}\}$. Tehát elég igazolni, hogy $\mathcal{V} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^\perp$. Legyen $v \in \mathcal{V}$ egy tetszőleges vektor és (u_1, \dots, u_k) az \mathcal{A} lineáris altér egy ortonormált bázisa. Ilyen létezik a Gram–Schmidt ortogonalizációs tétel (9.26. Tétel) szerint. Ekkor

$$a = (v \cdot u_1)u_1 + \dots + (v \cdot u_k)u_k \in \mathcal{A}.$$

Minden u_i , $i = 1, \dots, k$ bázisvektor esetén

$$\begin{aligned} u_i \cdot (v - a) &= u_i \cdot v - u_i \cdot a = u_i \cdot v - (v \cdot u_1) \underbrace{(u_1 \cdot u_i)}_0 + \dots + (v \cdot u_i) \underbrace{(u_i \cdot u_i)}_1 + \dots + (v \cdot u_k) \underbrace{(u_i \cdot u_k)}_0 \\ &= u_i \cdot v - v \cdot u_i = 0. \end{aligned}$$

Tehát $(v - a) \perp \{u_1, \dots, u_k\}$, ahonnan az (i) alpont alapján $(v - a) \perp \langle \{u_1, \dots, u_k\} \rangle = \mathcal{A}$, vagyis $v - a \in \mathcal{A}^\perp$. Összegezve, $v = a + (v - a)$, ahol $a \in \mathcal{A}$ és $v - a \in \mathcal{A}^\perp$, tehát $\mathcal{V} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^\perp$. \square

9.12. Következmény

Legyen \mathcal{A} a \mathcal{V} euklideszi vektortér egy véges dimenziós lineáris altere. Ha (a_1, \dots, a_k) az \mathcal{A} altér egy lineáris generátorrendszere, akkor $\mathcal{A}^\perp = \{a_1, \dots, a_k\}^\perp$.

Bizonyítás. Mivel $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \mathcal{A}$, ezért a 9.10. Tulajdonság alapján kapjuk, hogy $\mathcal{A}^\perp \subseteq \{a_1, \dots, a_k\}^\perp$. Legyenek $v \in \{a_1, \dots, a_k\}^\perp$ és $w \in \mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ tetszőleges vektorok. Ekkor léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárok úgy, hogy $w = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$, és

$$v \cdot w = v \cdot (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \underbrace{(v \cdot a_1)}_0 + \dots + \lambda_k \underbrace{(v \cdot a_k)}_0 = 0,$$

ezért $v \in \mathcal{A}^\perp$. Tehát $\{a_1, \dots, a_k\}^\perp \subseteq \mathcal{A}^\perp$. □

Egy véges dimenziós euklideszi vektortér lineáris altere és annak ortogonális komplementuma kiegészítő dimenziósak.

9.13. Következmény

Ha \mathcal{A} a \mathcal{V} véges dimenziós euklideszi vektortér egy lineáris altere, akkor $\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{V}$.

Bizonyítás. A 9.11. Tulajdonság (iv) alpontja alapján következik. □

Euklideszi vektortér lineáris alterei esetén teljesül a dualitás, hogy a merőleges kiegészítő merőleges kiegészítője az eredeti lineáris alteret adja vissza.

9.14. Tulajdonság

Legyen \mathcal{V} egy euklideszi vektortér.

- (i) Ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ egy nemüres részhalmaz, akkor $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.
- (ii) Ha \mathcal{A} a \mathcal{V} egy lineáris altere, akkor $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.

Bizonyítás.

- (i) Mivel $\mathcal{A} \perp \mathcal{A}^\perp$ és $(\mathcal{A}^\perp)^\perp$ a legnagyobb részhalmaz \mathcal{V} -ben, azok a részhalmazok közül, amelyek merőlegesek \mathcal{A}^\perp -re, ezért $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.
- (ii) Legyen $w \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp$ tetszőleges. A 9.11. Tulajdonság (iv) alpontja alapján $\mathcal{V} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$, ahonnan $w = a + a'$, ahol $a \in \mathcal{A}$ és $a' \in \mathcal{A}^\perp$. Az (i) alpont szerint $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}^\perp)^\perp$, ahonnan következik, hogy $a \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp$ és $w - a \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp$, mivel $(\mathcal{A}^\perp)^\perp$ lineáris altér. Tehát $a' = w - a \in \mathcal{A}^\perp \cap (\mathcal{A}^\perp)^\perp$, de $\mathcal{A}^\perp \cap (\mathcal{A}^\perp)^\perp = \{\vec{0}\}$ a 9.11. Tulajdonság (iv) alpontja szerint, ezért $a' = w - a = \vec{0}$. Innen kapjuk, hogy $a = w \in \mathcal{A}$, vagyis $(\mathcal{A}^\perp)^\perp \subseteq \mathcal{A}$. Az (i) alpontban beláttuk a fordított irányú bennfoglalást, ezért következik, hogy $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$. □

9.15. Példa

Adott az \mathbb{R}^4 valós vektortér a standard skalárszorzáttal. Írjuk fel az $\mathcal{A} = \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle$ lineáris altér \mathcal{A}^\perp merőleges kiegészítőjét. ◇

Megoldás. Mivel a $v_1 = (1, 2, 0, -1)$ és $v_2 = (-3, 0, 2, 1)$ vektorok generálják az \mathcal{A} alteret, ezért a 9.12. Következmény alapján azokat a vektorokat kell meghatározni, amelyek egyszerre merőlegesek a v_1 és v_2 vektorokra, $\mathcal{A}^\perp = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot v_1 = 0, x \cdot v_2 = 0\}$. Tehát $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{A}^\perp$ teljesíti a

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 2, 0, -1) \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (1, 2, 0, -1) = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0,$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (-3, 0, 2, 1) \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (-3, 0, 2, 1) = -3x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$$

relációkat. Tehát \mathcal{A}^\perp az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. Az egyenletrendszer megoldásai

$$x = (\alpha + \beta, \alpha, \beta, 3\alpha + \beta) = \alpha(1, 1, 0, 3) + \beta(1, 0, 1, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alakúak, ahonnan $\mathcal{A}^\perp = \langle (1, 1, 0, 3), (1, 0, 1, 1) \rangle$. □

9.16. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret a standard skalárszorzáttal. Az \mathcal{A} lineáris altér a

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. Írjuk fel az \mathcal{A} lineáris altér vektoriális egyenletét és a merőleges kiegészítőjét! ◇

Megoldás. A (9.2) egyenletrendszer megoldásai

$$x = (13\alpha - 14\beta, 10\alpha - 10\beta, \alpha, \beta) = \alpha(13, 10, 1, 0) + \beta(-14, -10, 0, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alakúak, ahonnan $\mathcal{A} = \langle (13, 10, 1, 0), (-14, -10, 0, 1) \rangle$.

Értelmezés szerint az \mathcal{A} merőleges kiegészítője $\mathcal{A}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot a = 0, \forall a \in \mathcal{A}\}$, de mivel $v' = (13, 10, 1, 0)$ és $v'' = (-14, -10, 0, 1)$ az \mathcal{A} bázisvektorai, ezért \mathcal{A}^\perp pontosan azon vektorok altére, amelyek erre a két vektorra merőlegesek, vagyis

$$\mathcal{A}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \perp v', x \perp v''\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot v' = 0, x \cdot v'' = 0\}.$$

Innen felírhatjuk, hogy \mathcal{A}^\perp a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$\begin{cases} 13x_1 + 10x_2 + x_3 = 0 \\ -14x_1 - 10x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy $\mathcal{A}^\perp = \langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle$.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor \mathcal{A} egy egyenletrendszer megoldáshalmaza és \mathbb{R}^4 -en a standard skalárszorzatot tekintjük, az \mathcal{A}^\perp merőleges kiegészítőt egyszerűbben is felírhatjuk. Ehhez azt kell észrevenni, hogy az eredeti (9.2) egyenletrendszer átírható

$$\begin{cases} (2, -3, 4, -2) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ (1, -2, 7, -6) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases}$$

alakba. Ez úgy fordítható le, hogy az \mathcal{A} lineáris altér azon vektorok halmaza, amelyek merőlegesek az $(2, -3, 4, -2)$ és $(1, -2, 7, -6)$ vektorokra, így a 9.14. Tulajdonság (ii) alpontja alapján

$$\mathcal{A} = \langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle^\perp.$$

Innen a 9.14. Tulajdonság (ii) alpontja szerint felírható, hogy

$$\mathcal{A}^\perp = (\langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle^\perp)^\perp = \langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle.$$

□

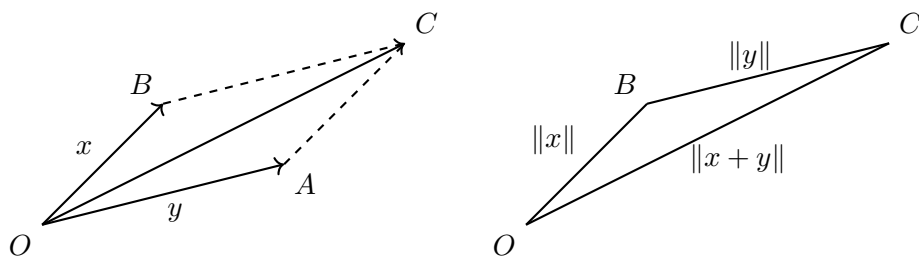
9.1.3. Norma

9.17. Értelmezés

A \mathcal{V} valós vektortéren értelmezett $\| \cdot \| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *norma*, ha

- (i) $\|x\| \geq 0$, minden $x \in \mathcal{V}$ vektor esetén, és $\|x\| = 0$ csak akkor, ha $x = \vec{0}_\mathcal{V}$;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár és minden $x \in \mathcal{V}$ vektor esetén;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, minden $x, y \in \mathcal{V}$ vektor esetén.

A normával értelmezhetjük egy vektor hosszát. Ekkor a norma első tulajdonsága azt mondja, hogy minden vektor hossza nem negatív és egyetlen vektor van, amelynek hossza 0, éspedig a $\vec{0}$ vektor. A második tulajdonság szerint, ha egy vektort szorzunk egy $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, akkor a vektor hossza szorozódik az $|\lambda|$ abszolút értékkel. A harmadik tulajdonság a háromszög egyenlőtlenséget fejezi ki.



9.1.3.1. Két vektor szöge

A skalárszorzat és a norma segítségével tudjuk értelmezni két x, y nemnulla vektor szögét:

$$m(\widehat{x, y}) = \arccos \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \right), \quad \forall x, y \neq \vec{0}.$$

9.1.3.2. Skalárszorzat által meghatározott norma

Egy skalárszorzat a \mathcal{V} vektortéren meghatároz egy normát is a \mathcal{V} -n. Ebben a jegyzetben csak olyan normával dolgozunk, amelyet egy skalárszorzat származtat.

9.18. Tulajdonság

Ha $\cdot: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ egy skalárszorzat a \mathcal{V} vektortéren, akkor $\| \cdot \|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ képlettel értelmezett leképzés norma és a *skalárszorzathoz rendelt normának* nevezzük.

A bizonyításban felfogjuk használni a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget, ezért előbb kijelentjük és bizonyítjuk az egyenlőtlenséget.

9.19. Lemma (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Ha „ \cdot ” egy skalárszorzat a \mathcal{V} valós vektortéren, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$|x \cdot y| \leq \sqrt{x \cdot x} \sqrt{y \cdot y}, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad (9.3)$$

vagy a skalárszorzathoz rendelt norma jelöléseit használva

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

Egyenlőség, akkor áll fenn, ha x és y vektorok arányosak (lineárisan függők).

Bizonyítás. Négyzetre emeléssel a (9.3) egyenlőtlenségből megkapható a vele egyenértékű

$$(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y), \quad \forall x, y \in \mathcal{V} \quad (9.4)$$

egyenlőtlenség. A skalárszorzat pozitivitása (9.1. Értelmezés (iii) alpontja) miatt

$$(x + ty) \cdot (x + ty) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (9.5)$$

amely a skalárszorzat bilinearitása (9.1. Értelmezés (i) alpontja) és szimmetriája (9.1. Értelmezés (ii) alpontja) alapján átírható

$$x \cdot x + 2t(x \cdot y) + t^2(y \cdot y) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (9.6)$$

alakba. Feltehetjük, hogy $y \cdot y \neq 0$, különben a skalárszorzat pozitivitása alapján $y = \vec{0}$, és ebben az esetben triviálisan teljesül a (9.3) egyenlőtlenség. Ezen feltevés alapján a (9.6) egy másodfokú egyenlőtlenség lesz t -ben. Ezenkívül a (9.6) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a t -ben másodfokú

$$(y \cdot y)t^2 + 2(x \cdot y)t + x \cdot x = 0$$

egyenletnek legfeljebb egyetlen egy valós gyöke lehet, amelyet az egyenlet diszkriminánsára vonatkozó $\Delta \leq 0$ egyenlőtlenséggel jellemezhetünk. Tehát a (9.6) egyenlőtlenség egyenértékű a

$$\Delta = [2(x \cdot y)]^2 - 4(x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0 \iff (x \cdot y)^2 - (x \cdot x)(y \cdot y) \leq 0 \quad (9.7)$$

egyenlőtlenséggel, ami átrendezés után pontosan a (9.4) egyenlőtlenséghez vezet.

Megjegyezzük, hogy a (9.3), illetve a (9.4) egyenlőtlenségekben pontosan akkor van egyenlőség, ha $\Delta = 0$. Tehát létezik egyetlen $t \in \mathbb{R}$, hogy a (9.6), illetve a vele egyenértékű a (9.5) egyenlőtlenségben egyenlőség van. Tehát létezik egyetlen $t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $(x + ty) \cdot (x + ty) = 0$, ami a skalárszorzat pozitivitása alapján (9.1. Értelmezés (iii) alpontja), azt jelenti, hogy $x + ty = \vec{0}_\mathcal{V}$. Ez úgy fordítható le, hogy az x és y vektorok arányosak, vagyis ha (x_1, \dots, x_n) az x , illetve (y_1, \dots, y_n) az y vektor koordinátái egy bázisban, akkor

$$\frac{x_1}{y_1} = \dots = \frac{x_n}{y_n}.$$

□

A 9.18. Tulajdonság bizonyítása.

(i) A skalárszorzat pozitivitásából (9.1. Értelmezés (iii) alpontjából) következik.

(ii) Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár és minden $x \in \mathcal{V}$ vektor esetén

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x) \cdot (\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \cdot x)} = |\lambda| \sqrt{x \cdot x} = |\lambda| \|x\|.$$

(iii) Minden $x, y \in \mathcal{V}$ vektor esetén a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ egyenlőtlenség egyenértékű az

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \iff \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ \iff (x + y) \cdot (x + y) &\leq x \cdot x + y \cdot y + 2\|x\|\|y\| \\ \iff x \cdot x + y \cdot y + 2x \cdot y &\leq x \cdot x + y \cdot y + 2\|x\|\|y\| \\ \iff 2(x \cdot y) &\leq 2\|x\|\|y\| \\ \iff x \cdot y &\leq \|x\|\|y\| \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekkel. Az utolsó egyenlőtlenség következik a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségből, mivel teljesül, hogy $x \cdot y \leq |x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$. \square

9.1.4. Pitagorasz-tétel euklideszi vektorterekben

9.20. Tétel (Pitagorasz-tétel)

Egy \mathcal{V} euklideszi vektortér $x, y \in \mathcal{V}$ vektorai esetén $x \perp y$ akkor és csakis akkor, ha $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Bizonyítás. A skalárszorzat bilinearitása alapján minden $x, y \in \mathcal{V}$ vektor esetén

$$(x + y) \cdot (x + y) = x \cdot y + y \cdot y + 2x \cdot y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y,$$

ahonnan kifejezhetjük az x és y skalárszorzatát a normák segítségével

$$x \cdot y = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}.$$

Ez alapján

$$x \perp y \iff x \cdot y = 0 \iff \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

\square

9.2. Ortonormált bázisok

9.21. Értelmezés

Egy \mathcal{V} euklideszi vektortér (v_1, \dots, v_n) vektorrendszere *ortogonális*, ha minden $1 \leq i \neq j \leq n$ esetén $v_i \perp v_j$.

9.22. Értelmezés

A $\mathbf{B} = (u_1, \dots, u_n)$ egy *ortonormált bázisa* a \mathcal{V} euklideszi vektortérnek, ha

- (i) \mathbf{B} bázisa a \mathcal{V} vektortérnek és
- (ii) \mathbf{B} ortonormált vektorrendszer, azaz minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (9.8)$$

A (9.8) feltétel átfogalmazható, mint $\|u_i\| = 1$, minden $i = 1, \dots, n$ és $u_i \perp u_j$, ha $i \neq j$. Tehát a \mathbf{B} ortonormált bázis vektorai egység hosszúságúak és páronként merőlegesek egymásra.

9.23. Példa

Ha az \mathbb{R}^n vektorteret tekintjük a standard skalárszorzattal, akkor a kanonikus bázis

$$\mathbf{E} = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1))$$

egy ortonormált bázis ebben az euklideszi vektortérben. ◇

9.24. Tulajdonság

Legyen \mathcal{V} egy euklideszi vektortér.

- (i) Ha (v_1, \dots, v_n) egy nemnulla vektorokból álló ortogonális vektorrendszer, vagyis $v_i \perp v_j$, minden $1 \leq i \neq j \leq n$ esetén, akkor (v_1, \dots, v_n) lineárisan független vektorrendszer.
- (ii) Ha (v_1, \dots, v_n) egy nemnulla vektorokból álló ortogonális vektorrendszer egy n -dimenziós \mathcal{V} euklideszi vektortérben, akkor (v_1, \dots, v_n) egy bázisa a \mathcal{V} -nek.

Bizonyítás.

- (i) Ha $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ valamely $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalárookra, akkor ezt a relációt skalárszorozva a v_i vektorral kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \cdot v_i = \vec{0} \cdot v_i \\ \iff & \lambda_1 (v_1 \cdot v_i) + \dots + \lambda_i (v_i \cdot v_i) + \dots + \lambda_n (v_n \cdot v_i) = 0 \\ \iff & \lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_{i-1} \cdot 0 + \lambda_i (v_i \cdot v_i) + \lambda_{i+1} \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = 0 \\ \iff & \lambda_i (v_i \cdot v_i) = 0 \iff \lambda_i = 0, \end{aligned}$$

ahol először felhasználtuk, hogy a skalárszorzat bilineáris majd, hogy a vektorrendszer ortogonális és végül, hogy a v_i vektor nem nulla, ezért $v_i \cdot v_i \neq 0$. Ezt elvégezve minden $i = 1, \dots, n$ esetén kapjuk, hogy $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, tehát a vektorrendszer lineárisan független vektorokból áll.

- (ii) Tetszőleges lineárisan független vektorrendszert ki lehet egészíteni a \mathcal{V} vektortér egy bázisává. Az előző pontban igazoltuk, hogy (v_1, \dots, v_n) lineárisan független vektorrendszer és a feltevés szerint $\dim \mathcal{V} = n$, ezért a dimenzió értelmezése alapján ez a vektorrendszer már a \mathcal{V} vektortér bázisa kell legyen (nem kell több vektor hozzávenni a vektorrendszerhez). \square

9.25. Megjegyzés

A \mathcal{V} vektortér egy (v_1, \dots, v_n) ortogonális bázisából normalizálással kaphatunk egy ortonormált vektorrendszert, $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$ a \mathcal{V} egy ortonormált bázisa lesz. \diamond

9.2.1. Skalárszorzat felírása ortonormált bázisban

Legyen $\mathbf{B} = (u_1, \dots, u_n)$ a (\mathcal{V}, \cdot) euklideszi vektortér egy ortonormált bázisa, és $x(x_1, \dots, x_n)_{\mathbf{B}}$, $y(y_1, \dots, y_n)_{\mathbf{B}}$ tetszőleges vektorok. Ekkor $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ és $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$, továbbá

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) \cdot (y_1 u_1 + \dots + y_n u_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (u_i \cdot u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{\ell=1}^n x_{\ell} y_{\ell} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = [x]_{\mathbf{B}}^t [y]_{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Tehát bármely euklideszi vektortérben, ha ismertek két vektor koordinátái egy ortonormált bázisban, akkor a vektorok skalárszorzatát úgy számolhatjuk ki, hogy vesszük a koordinátavektorok standard skalárszorzatát.

9.3. A Gram-Schmidt ortogonalizációs tétel

9.26. Tétel (Gram-Schmidt ortogonalizációs tétel)

Minden véges dimenziós euklideszi vektortérnek létezik ortonormált bázisa.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{V} egy véges dimenziós euklideszi vektortér és $\mathbf{B} = (v_1, \dots, v_n)$ egy tetszőleges bázisa. A \mathbf{B} bázisból kiindulva szerkesztünk előbb egy ortogonális $\mathbf{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ bázist, majd ez utóbbit normalizálva kapunk egy ortonormált $\mathbf{B}'' = (u_1, \dots, u_n) = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\right)$ bázist. A módszert, amivel a \mathbf{B} bázisból megszerkesztjük a \mathbf{B}' ortogonális bázist, *Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárásnak* hívjuk. A eljárás induktívan szerkeszti meg a w_1, \dots, w_n vektorokat a következőképpen.

- Az első lépésben $w_1 = v_1$, mivel az első vektor nem kell merőleges legyen senkire.
- Az érthetőség kedvéért kiírjuk a második lépést az általános induktív lépés előtt. A cél, hogy megszerkesszünk egy olyan $w_2 \in \mathcal{V}$ vektort, ami merőleges lesz az őt megelőző w_1 vektorra és a \mathcal{V} vektortér w_1, w_2 vektorai által kifeszített altere egyezzen meg a v_1, v_2 által kifeszített altérrel. Emiatt a w_2 vektort a következő alakban keressük:

$$w_2 = v_2 + \lambda_{21} v_1, \quad (9.10)$$

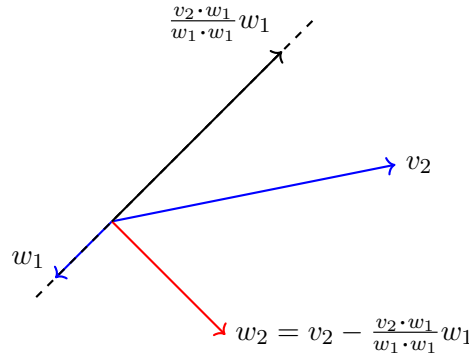
ahol a $\lambda_{21} \in \mathbb{R}$ együtthatót úgy kell meghatározni, hogy $w_2 \perp w_1$. De

$$\begin{aligned} w_2 \perp w_1 &\iff 0 = w_2 \cdot w_1 \stackrel{(9.10)}{\iff} 0 = (v_2 + \lambda_{21} v_1) \cdot w_1 \\ &\iff 0 = v_2 \cdot w_1 + \lambda_{21} v_1 \cdot w_1 \iff \lambda_{21} = -\frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}, \end{aligned}$$

mivel $w_1 \neq \vec{0}$. Tehát

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1.$$

Az alábbi ábrán szemléltetjük a konstrukciót. Merőlegesen levetítettük a v_2 vektort a w_1 vektor tartóegyenesére, így kapva a $\frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1$ vetületet, majd ezt a vetületet levonva az eredeti v_2 vektorból kapjuk meg a w_1 -re merőleges w_2 vektort.



- Feltételezzük, hogy már megszerkesztettük a w_1, \dots, w_{k-1} vektorokat, amelyek a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

- a w_1, \dots, w_{k-1} vektorok páronként merőlegesek egymásra, vagyis $w_i \perp w_j$, minden $1 \leq i \neq j \leq k-1$ esetén,
- a w_1, \dots, w_{k-1} vektorok által kifeszített lineáris altér megegyezik a v_1, \dots, v_{k-1} vektorok által kifeszített lineáris alterével a \mathcal{V} -nek, vagyis $\langle w_1, \dots, w_{k-1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$.

Megszerkesztünk egy nemnulla w_k vektort, amely merőleges lesz a korábbi w_1, \dots, w_{k-1} vektorokra és $\langle w_1, \dots, w_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Ehhez a w_k -t a következő alakban keressük:

$$w_k = v_k + \lambda_{k1}w_1 + \dots + \lambda_{kk-1}w_{k-1}, \quad (9.11)$$

ahol $\lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kk-1} \in \mathbb{R}$. Innen látható, hogy $\langle w_1, \dots, w_k \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. A (9.11) felírásból kifejezhető a v_k vektor a w_1, \dots, w_k vektorok segítségével, ezért $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq \langle w_1, \dots, w_k \rangle$. Összegezve, $\langle w_1, \dots, w_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Meghatározzuk a $\lambda_{ki} \in \mathbb{R}$ együtthatót úgy, hogy $w_k \perp w_i$, minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén.

$$\begin{aligned} w_k \perp w_i &\iff w_k \cdot w_i = 0 \iff (v_k + \lambda_{k1}w_1 + \dots + \lambda_{kk-1}w_{k-1}) \cdot w_i = 0 \\ &\iff v_k \cdot w_i + \lambda_{k1}(w_1 \cdot w_i) + \dots + \lambda_{ki}(w_i \cdot w_i) + \dots + \lambda_{kk-1}(w_{k-1} \cdot w_i) = 0 \\ &\iff v_k \cdot w_i + \lambda_{k1} \cdot 0 + \dots + \lambda_{ki-1} \cdot 0 + \lambda_{ki}(w_i \cdot w_i) + \lambda_{ki+1} \cdot 0 + \dots + \lambda_{kk-1} \cdot 0 = 0 \\ &\iff v_k \cdot w_i + \lambda_{ki}(w_i \cdot w_i) = 0 \iff \lambda_{ki} = -\frac{v_k \cdot w_i}{w_i \cdot w_i}. \end{aligned}$$

Tehát

$$w_k = v_k - \frac{v_k \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \dots - \frac{v_k \cdot w_{k-1}}{w_{k-1} \cdot w_{k-1}} w_{k-1}.$$

- Az utolsó lépés után kapunk egy (w_1, \dots, w_n) ortogonális vektorrendszert ($w_i \perp w_j$, minden $1 \leq i \neq j \leq n$ esetén), amelyre $\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{V}$. A 9.24. Tulajdonság (ii) alpontja alapján $\mathbf{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ egy ortogonális bázisa a \mathcal{V} vektortérnek.

Végül normalizálva a \mathbf{B}' bázis vektorait kapjuk a $\mathbf{B}'' = (u_1, \dots, u_n) = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right)$ ortonormált bázisát a \mathcal{V} euklideszi vektortérnek. \square

9.27. Példa

Tekintsük a

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

skalárszorzatot az \mathbb{R}^3 -n. Adjunk meg egy ortonormált bázist erre a skalárszorzatra vonatkozóan. ◇

Megoldás. A Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást fogjuk használni, kiindulva az \mathbb{R}^3 egy tetszőleges bázisából. Legyen $\mathbf{E} = (e_1, e_2, e_3)$ a kanonikus bázis. A Gram-Schmidt-eljárás alapján:

$$w_1 = e_1 = (1, 0, 0),$$

$$w_2 = e_2 - \frac{w_1 \cdot e_2}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (0, 1, 0) - \frac{2}{1}(1, 0, 0) = (-2, 1, 0),$$

$$w_3 = e_3 - \frac{w_1 \cdot e_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot e_3}{w_2 \cdot w_2} w_2 = (0, 0, 1) - \frac{3}{1}(1, 0, 0) - \frac{-1}{1}(-2, 1, 0) = (-5, 1, 1).$$

Végül normalizáljuk a (w_1, w_2, w_3) vektorrendszert:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{w_1 \cdot w_1}} w_1 = \frac{1}{1}(1, 0, 0) = (1, 0, 0),$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{w_2 \cdot w_2}} w_2 = \frac{1}{1}(-2, 1, 0) = (-2, 1, 0),$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{w_3 \cdot w_3}} w_3 = \frac{1}{1}(-5, 1, 1) = (-5, 1, 1),$$

így kapva egy $(u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (-2, 1, 0), u_3 = (-5, 1, 1))$ ortonormált bázisát az (\mathbb{R}^3, \cdot) euklideszi térnek.

Leellenőrizzük, hogy u_1, u_2, u_3 ortonormált vektorrendszer:

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, & u_1 \cdot u_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \\ u_1 \cdot u_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, & u_2 \cdot u_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \\ u_2 \cdot u_3 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, & u_3 \cdot u_3 &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

□

9.28. Tulajdonság

Ha $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ és $\mathbf{B}' = (\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ az \mathcal{X} n -dimenziós euklideszi vektortér két ortonormált bázisa, akkor a $T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} [\beta_1]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\beta_n]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix}$ áttérési mátrix egy ortogonális mátrix, azaz $T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}^{-1} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}^t$.

Bizonyítás. Legyen $\beta_i(b_{i1}, \dots, b_{in})_{\mathbf{B}}$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned}
 T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}^t T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} [\beta_1]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\beta_n]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} [\beta_1]_{\mathbf{B}'} & \dots & [\beta_n]_{\mathbf{B}'} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n b_{1k} b_{1k} & \sum_{k=1}^n b_{1k} b_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{1k} b_{nk} \\ \sum_{k=1}^n b_{2k} b_{1k} & \sum_{k=1}^n b_{2k} b_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{2k} b_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{nk} b_{1k} & \sum_{k=1}^n b_{nk} b_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^n b_{nk} b_{nk} \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{(9.9)}{=} \begin{bmatrix} \beta_1 \cdot \beta_1 & \beta_1 \cdot \beta_2 & \dots & \beta_1 \cdot \beta_n \\ \beta_2 \cdot \beta_1 & \beta_2 \cdot \beta_2 & \dots & \beta_2 \cdot \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n \cdot \beta_1 & \beta_n \cdot \beta_2 & \dots & \beta_n \cdot \beta_n \end{bmatrix} \\
 &= I_n,
 \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy $T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}^{-1} = T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}^t$.

□

10. fejezet

Euklideszi affin terek

Ebben a fejezetben bevezetjük valós affin tér esetén a merőlegesség, távolság és szög fogalmát. Ezt az iránytéren értelmezett skalárszorzzal segítségével tesszük meg. Ahogy affin részterek párhuzamossága, úgy az affin részterek merőlegessége is az irányterek segítségével lesz értelmezve. A merőlegesség értelmezése után beszélhetünk pont merőleges vetületéről és merőleges vetítésről, illetve merőleges tükrözésről, amelyekre képleteket is adunk. Merőlegesség lehetővé teszi, hogy értelmezzük hipersíkok normálvektorát. A skalárszorzzal által származtatott norma segítségével értelmezhetjük két pont távolságát, egy pont és egy affin résztér, valamint affin részterek távolságát. Képletet adunk pont és affin résztér távolságára.

10.1. Értelmezés

Az \mathcal{X} valós affin tér egy *euklideszi affin tér*, ha az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy euklideszi vektortér.

10.2. Példa

Minden \mathcal{V} euklideszi vektortér egyben egy euklideszi affin tér is, mivel a \mathcal{V} affin tér iránytere a \mathcal{V} euklideszi vektortér. Sajátosan, ha az \mathbb{R}^n vektortéren tekintjük a standard skalárszorzzatot, akkor \mathbb{R}^n egy euklideszi affin tér, amelyet \mathbb{E}_n -nel fogunk jelölni. \diamond

10.3. Értelmezés

Az \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ Descartes-féle koordináta-rendszere *ortonormált koordináta-rendszer*, ha \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy ortonormált bázisa.

10.4. Példa

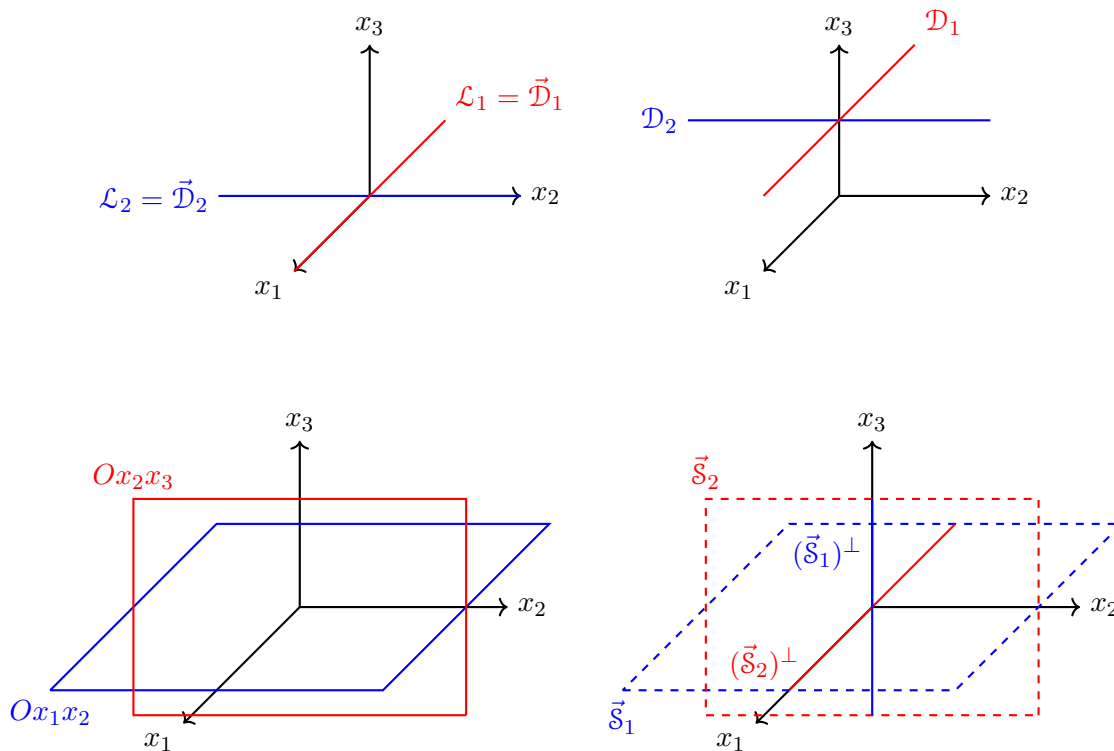
Az \mathbb{E}_n affin téren az $\mathcal{E} = (\vec{0}; e_1, \dots, e_n)$ kanonikus koordináta-rendszer egy ortonormált koordináta-rendszer. \diamond

10.1. Affin részterek merőlegessége

10.1.1. Merőleges affin részterek

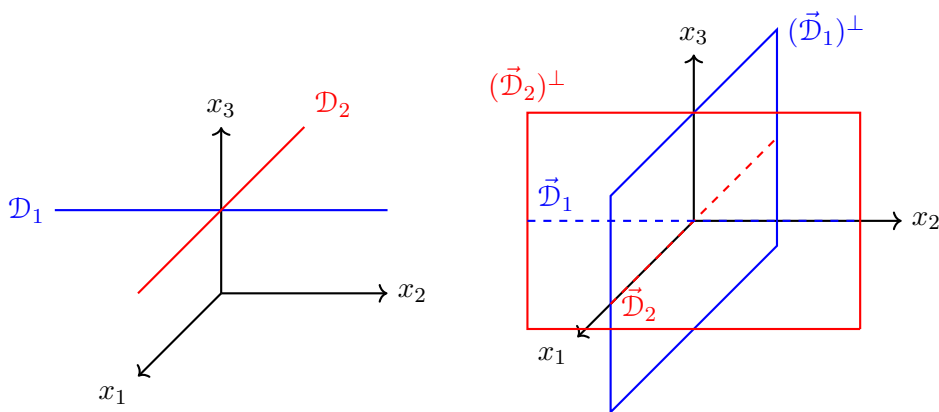
Szeretnénk értelmezni magasabb dimenziós síkokra is a merőlegességet. Ahogy a párhuzamosságot, úgy a merőlegességet is az irányterek segítségével fogjuk értelmezni. Az értelmezés előtt tekintsük a következő példákat térmértanból. Legyen \mathcal{X} egy 3-dimenziós euklideszi affin tér. Legyen az \mathcal{L}_1 egyenes irányvektora u_1 és az \mathcal{L}_2 egyenes irányvektora u_2 . Az \mathcal{L}_1 és \mathcal{L}_2 egyenesek

merőlegesek egymásra, ha irányvektoraik merőlegesek, vagyis $u_1 \perp u_2$. Ebben az esetben az \mathcal{L}_1 és \mathcal{L}_2 egyenesek $\vec{\mathcal{L}}_1 = \langle u_1 \rangle$ és $\vec{\mathcal{L}}_2 = \langle u_2 \rangle$ irányterei az $\vec{\mathcal{X}}$ euklideszi vektortér merőleges vektorhalmazai, vagyis $\vec{\mathcal{L}}_1 \perp \vec{\mathcal{L}}_2$. A következő példában legyen \mathcal{L}_1 egy u_1 irányvektorú egyenes és \mathcal{S}_2 egy n_2 normálvektorú sík. A térmértanban az \mathcal{L}_1 egyenes merőleges az \mathcal{S}_2 síkra, ha $u_1 \parallel n_2$. Az \mathcal{S}_2 sík $\vec{\mathcal{S}}_2$ iránytere olyan vektorokból áll, amelyek merőlegesek az n_2 normálvektorra. Így ebben az esetben is $\vec{\mathcal{L}}_1$ és $\vec{\mathcal{S}}_2$ irányterek az $\vec{\mathcal{X}}$ euklideszi vektortér merőleges vektorhalmazai, vagyis $\vec{\mathcal{L}}_1 \perp \vec{\mathcal{S}}_2$. Mielőtt úgy értelmeznénk az affin részterek merőlegességét, hogy irányterei merőleges vektorhalmazok legyenek, nézzük meg két merőleges sík példáját is. Legyen az \mathcal{S}_1 normálvektora n_1 és az \mathcal{S}_2 sík normálvektora n_2 . A térmértanban az \mathcal{S}_1 és \mathcal{S}_2 síkok merőlegesek egymásra, ha $n_1 \perp n_2$. Az \mathcal{S}_1 sík $\vec{\mathcal{S}}_1$ iránytere olyan vektorokból áll, amelyek merőlegesek az n_1 normálvektorra, az \mathcal{S}_2 sík $\vec{\mathcal{S}}_2$ irányterének vektorai merőlegesek n_2 -re. Ekkor az $\vec{\mathcal{X}}$ euklideszi vektortér $\vec{\mathcal{S}}_1$ és $\vec{\mathcal{S}}_2$ részhalmazai nem merőlegesek egymásra. Például, ha $n_1(1, 0, 0)_{\mathbf{B}}$ és $n_2(0, 1, 0)_{\mathbf{B}}$, akkor $\vec{\mathcal{S}}_1 = \langle (0, 1, 0)_{\mathbf{B}}, (0, 0, 1)_{\mathbf{B}} \rangle$ és $\vec{\mathcal{S}}_2 = \langle (1, 0, 0)_{\mathbf{B}}, (0, 0, 1)_{\mathbf{B}} \rangle$, ahol \mathbf{B} az $\vec{\mathcal{X}}$ egy ortonormált bázisa. Ekkor $\vec{\mathcal{S}}_1$ és $\vec{\mathcal{S}}_2$ nem merőlegesek egymásra, mert $(0, 1, 0)_{\mathbf{B}} \in \vec{\mathcal{S}}_1 \cap \vec{\mathcal{S}}_2$. Az \mathcal{S}_1 és \mathcal{S}_2 merőleges síkok esetén fennáll az $(\vec{\mathcal{S}}_1)^\perp = \langle n_1 \rangle \subseteq \langle n_2 \rangle^\perp = \vec{\mathcal{S}}_2$, illetve $(\vec{\mathcal{S}}_2)^\perp = \langle n_2 \rangle \subseteq \langle n_1 \rangle^\perp = \vec{\mathcal{S}}_1$ bennfoglalások. Ugyanakkor az $\vec{\mathcal{X}}$ euklideszi vektortér \mathcal{A} és \mathcal{B} merőleges részhalmazai esetén is teljesül, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^\perp$ és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^\perp$. Így \mathcal{L}_1 és \mathcal{L}_2 merőleges egyenesek esetén is fennállnak a $\vec{\mathcal{L}}_1 \subseteq (\vec{\mathcal{L}}_2)^\perp$ és $\vec{\mathcal{L}}_2 \subseteq (\vec{\mathcal{L}}_1)^\perp$, valamint merőleges \mathcal{L}_1 egyenes és \mathcal{S}_2 sík esetén is igaz, hogy $\vec{\mathcal{L}}_1 \subseteq (\vec{\mathcal{S}}_2)^\perp$ és $\vec{\mathcal{S}}_2 \subseteq (\vec{\mathcal{L}}_1)^\perp$. Ezek alapján affin részterek merőlegességét a következőképpen értelmezzük.



10.5. Értelmezés

Egy \mathcal{X} affin tér \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 valódi affin részterei *merőlegesek egymásra* (jelölés: $\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2$), ha az irányterekre fennállnak az $\vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq (\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp$ vagy $(\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_1$ relációk az $\vec{\mathcal{X}}$ euklideszi vektortérben.



10.6. Megjegyzés

Az $\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2$ értelmezésében szereplő $\vec{\mathcal{Y}}_1 \subseteq (\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp$ bennfoglalás egyenértékű az $\vec{\mathcal{Y}}_1 \perp \vec{\mathcal{Y}}_2$ relációval, míg az $(\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp \subseteq \vec{\mathcal{Y}}_1 = ((\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp)^\perp$ bennfoglalás egyenérték az $(\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp \perp (\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp$ relációval. Tehát

$$\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2 \iff \vec{\mathcal{Y}}_1 \perp \vec{\mathcal{Y}}_2 \text{ vagy } (\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp \perp (\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp. \quad (10.1)$$

◇

Merőleges affin részterek párhuzamos eltoltjai is merőlegesek egymásra, mivel az irányterek nem változnak meg párhuzamos eltolás során.

Be fogjuk látni, hogy egyenesek és hipersíkok esetén a merőlegesség hasonló módon leírható, mint térben egyenesek és síkok esetén.

10.1.2. Egyenesre való merőlegesség

Két affin részter merőlegessége egyszerűbben megfogalmazható, ha az egyik részter egy egyenes. Ebben az esetben az egyenes irányvektora (az iránytér egy bázisvektora) merőleges kell legyen a másik részter irányterére.

10.7. Tulajdonság

Legyen AB egy egyenes és \mathcal{Y} egy valódi affin részter az \mathcal{X} euklideszi affin térben. Ekkor $AB \perp \mathcal{Y}$ akkor és csakis akkor, ha $\overrightarrow{AB} \perp \vec{\mathcal{Y}}$. Sajátosan, az AB és PQ egyenesek pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$.

Bizonyítás. Értelmezés alapján $AB \perp \mathcal{Y}$ azt jelenti, hogy az irányterekre fennáll, hogy $\mathcal{D}(AB) = \langle \overrightarrow{AB} \rangle \subseteq (\vec{\mathcal{Y}})^\perp$ vagy $(\vec{\mathcal{Y}})^\perp \subseteq \mathcal{D}(AB) = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$. Az első feltétel egyenértékű az $\overrightarrow{AB} \perp \vec{\mathcal{Y}}$ relációval. A második esetben, mivel \mathcal{Y} legfeljebb hipersík, ezért $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{Y}} \oplus (\vec{\mathcal{Y}})^\perp$ egyenlőség miatt $(\vec{\mathcal{Y}})^\perp$ legalább 1-dimenziós. Így a $(\vec{\mathcal{Y}})^\perp \subseteq \mathcal{D}(AB) = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$ bennfoglalásból következik, hogy $(\vec{\mathcal{Y}})^\perp = \mathcal{D}(AB)$, ahonnan $\overrightarrow{AB} \perp \vec{\mathcal{Y}}$. Ezek alapján az AB és PQ egyenesek pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\overrightarrow{AB} \perp \mathcal{D}(PQ) = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$, amely egyenértékű az $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$ relációval. □

10.8. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} valós affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{L} egyenes egyenlete

$$\frac{x_1 - 4}{5} = \frac{x_1 + 1}{3} = \frac{x_3}{2} = \frac{x_4 + 2}{-1}$$

és egy affin résztere $\mathcal{Y} = t(\langle v_1(-1, 2, 2, 5)_{\mathbf{B}}, v_2(1, -2, 1, 1)_{\mathbf{B}} \rangle, (1, 0, 0, 1)_{\mathcal{R}})$. Ekkor az \mathcal{L} egyenes merőleges az \mathcal{Y} affin részterre, mert az \mathcal{L} egyenes $u(5, 3, 2, -1)_{\mathbf{B}}$ irányvektora merőleges az $\vec{\mathcal{Y}}$ irányterre. Valóban, $u \cdot v_1 = (5, 3, 2, -1)(-1, 2, 2, 5) = 0$ és $u \cdot v_2 = (5, 3, 2, -1)(1, -2, 1, 1) = 0$, ezért $u \perp v_1$ és $u \perp v_2$, ahonnan $u \perp \langle v_1, v_2 \rangle = \vec{\mathcal{Y}}$. \diamond

10.1.3. Hipersík normálvektora

Legyen \mathcal{X} egy n -dimenziós euklideszi affin tér és $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy ortonormált koordináta-rendszere. Ha \mathcal{H} az \mathcal{X} egy hipersíkja, akkor a $\vec{\mathcal{H}}$ iránytér $(n-1)$ -dimenziós és a 9.13. Következmény alapján $(\vec{\mathcal{H}})^\perp$ egy 1-dimenziós altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek, így egyetlen bázisvektora van. Tehát létezik $\eta_{\mathcal{H}} \in \vec{\mathcal{X}}$ vektor úgy, hogy $(\vec{\mathcal{H}})^\perp = \langle \eta_{\mathcal{H}} \rangle$. Ha $v \perp \vec{\mathcal{H}}$, akkor létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $v = \lambda \eta_{\mathcal{H}}$. Az $\eta_{\mathcal{H}}$ vektort a \mathcal{H} hipersík *normálvektorának* nevezzük. A normálvektorok csak egy nem nulla skalárral való szorzás erejéig vannak meghatározva, vagyis ha $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $\lambda \eta_{\mathcal{H}}$ is egy normálvektora \mathcal{H} -nak. A hipersík normálvektora leolvasható egy ortonormált koordináta-rendszerben felírt egyenletéből hasonlóan, mint térben a sík normálvektora. Az ismeretlenek együtthatói lesznek a normálvektor komponensei az iránytér ortonormált bázisában.

Ha a \mathcal{H} hipersík egyenlete az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$ alakú, akkor $\eta(a_1, \dots, a_n)_{\mathbf{B}}$ egy normálvektora \mathcal{H} -nak. Valóban, ha $P(p_1, \dots, p_n)_{\mathcal{R}}$ a \mathcal{H} hipersík egy pontja, akkor a hipersík egyenlete átírható $a_1(x_1 - p_1) + \dots + a_n(x_n - p_n) = 0$ alakba. Innen adódik, hogy minden $M(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}$ pont esetén a $\vec{\mathcal{H}}$ iránytér $\vec{PM}(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)_{\mathbf{B}}$ vektorai esetén $\eta \cdot \vec{PM} = 0$, vagyis $\eta \perp \vec{PM}$, minden $M \in \mathcal{H}$ pont esetén, ezért $\eta \perp \vec{\mathcal{H}}$, azaz $\eta \in (\vec{\mathcal{H}})^\perp$. Mivel $\eta(a_1, \dots, a_n)_{\mathbf{B}}$ nem a nullvektor, ezért a \mathcal{H} hipersík egy normálvektora.

10.1.4. Hipersíkra való merőlegesség

A hipersíkra való merőlegesség egyszerűbben megfogalmazható normálvektor segítségével. Ha \mathcal{Y} egy valódi affin résztér, akkor az $\mathcal{Y} \perp \mathcal{H}$ merőlegesség egyenértékű a $(\vec{\mathcal{H}})^\perp \subseteq \vec{\mathcal{Y}}$ bennfoglalással, amely pontosan akkor áll fenn, ha $\eta_{\mathcal{H}} \in \vec{\mathcal{Y}}$.

Sajátosan, \mathcal{Y} hipersík esetén $\mathcal{Y} \perp \mathcal{H}$ pontosan akkor, ha $\eta_{\mathcal{H}} \in \vec{\mathcal{Y}}$, vagyis $\eta_{\mathcal{H}} \perp (\vec{\mathcal{Y}})^\perp = \langle \eta_{\mathcal{Y}} \rangle$, amely egyenértékű az $\eta_{\mathcal{Y}} \perp \eta_{\mathcal{H}}$ relációval. Tehát két hipersík pontosan akkor merőleges egymásra, ha a normálvektoraik merőlegesek egymásra.

Az \mathcal{Y} egyenes esetben pedig $\mathcal{Y} \perp \mathcal{H}$ akkor és csakis akkor, ha $\eta_{\mathcal{H}} \in \vec{\mathcal{Y}} = \langle d_{\mathcal{Y}} \rangle$, amely egyenértékű a $d_{\mathcal{Y}} \parallel \eta_{\mathcal{H}}$ relációval. Tehát egy egyenes és egy hipersík pontosan akkor merőlegesek, ha az egyenes irányvektora párhuzamos a hipersík normálvektorával.

10.9. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{H} hipersík egyenlete $x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 13x_4 + 7 = 0$ és egy affin résztere

$$\mathcal{Y} = t(\langle v_1(-1, 2, 2, 5)_{\mathbf{B}}, v_2(1, -2, 1, 1)_{\mathbf{B}} \rangle, (1, 0, 0, 1)_{\mathcal{R}}).$$

Ekkor a \mathcal{H} hipersík merőleges az \mathcal{Y} affin részterre, mert a hipersík $\eta(5, 3, 2, -1)_{\mathbf{B}}$ normálvektora párhuzamos az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytérrel. Valóban, $\eta(1, -2, 7, 13)_{\mathbf{B}} = 2v_1(-1, 2, 2, 5)_{\mathbf{B}} + 3v_2(1, -2, 1, 1)_{\mathbf{B}}$, ahonnan $\eta \in \langle v_1, v_2 \rangle = \vec{\mathcal{Y}}$. \diamond

10.1.5. Hipersíkkal való párhuzamosság

A hipersíkkal való párhuzamosság is átfogalmazható a normálvektor segítségével. Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} egy valódi affin résztere, mely párhuzamos a \mathcal{H} hipersíkkal. Mivel $\dim \mathcal{Y} \leq \dim \mathcal{H}$, így az $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{H}$ egyenértékű az $\vec{\mathcal{Y}} \subseteq \vec{\mathcal{H}}$ bennfoglalással, ahonnan kapjuk, hogy $\vec{\mathcal{Y}} \perp (\vec{\mathcal{H}})^\perp = \langle \eta_{\mathcal{H}} \rangle$, vagyis $\vec{\mathcal{Y}} \perp \eta_{\mathcal{H}}$. Abban az esetben, ha $\vec{\mathcal{Y}} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, akkor elég ellenőrizni, hogy $v_i \cdot \eta_{\mathcal{H}} = 0$, minden $i = 1, \dots, k$ esetén.

Sajátosan, \mathcal{Y} hipersík esetén $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{H}$ pontosan akkor, ha $\vec{\mathcal{Y}} \perp \eta_{\mathcal{H}}$, amely egyenértékű az $\eta_{\mathcal{Y}} \parallel \eta_{\mathcal{H}}$ relációval. Tehát két hipersík pontosan akkor párhuzamos egymással, ha a normálvektoraik párhuzamosak.

Az \mathcal{Y} egyenes esetben pedig $\mathcal{Y} \parallel \mathcal{H}$ akkor és csakis akkor, ha $d_{\mathcal{Y}} \perp \eta_{\mathcal{H}}$, ahol $d_{\mathcal{Y}}$ az \mathcal{Y} egyenes irányvektora, vagyis $\vec{\mathcal{Y}} = \langle d_{\mathcal{Y}} \rangle$. Tehát egy egyenes és egy hipersík pontosan akkor párhuzamosak, ha az egyenes irányvektora merőleges a hipersík normálvektorára.

10.10. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{H} hipersík egyenlete $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 7 = 0$ és egy affin résztere

$$\mathcal{Y} = t(\langle v_1(-1, 2, 2, 5)_{\mathbf{B}}, v_2(1, -2, 1, 1)_{\mathbf{B}} \rangle, (1, 0, 0, 1)_{\mathcal{R}}).$$

Ekkor a \mathcal{H} hipersík párhuzamos az \mathcal{Y} affin résztérrel, mert a hipersík $\eta(5, 3, 2, -1)_{\mathbf{B}}$ normálvektora merőleges az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytérre. Valóban, $\eta \cdot v_1 = (5, 3, 2, -1)(-1, 2, 2, 5) = 0$ és $\eta \cdot v_2 = (5, 3, 2, -1)(1, -2, 1, 1) = 0$, ezért $\eta \perp v_1$ és $\eta \perp v_2$, ahonnan $\eta \perp \langle v_1, v_2 \rangle = \vec{\mathcal{Y}}$. \diamond

10.2. Merőleges vetítés és tükrözés

Analitikus térmértanban egy pont vetülete egy síkra úgy is kiszámolható, hogy megszerkesztjük a ponton átmenő és a síkra merőleges egyenest, majd kiszámoljuk ennek az egyenesnek a síkkal való metszetét. A kapott pont az adott pont vetülete a síkra. Egy pont vetületét egy egyenesre is hasonlóan számolhatjuk ki. Megszerkesztjük az adott ponton átmenő és az egyenesre merőleges síkot, majd kiszámoljuk a kapott sík és egyenes metszetét. A kapott pont az adott pont vetülete az egyenesre.

A 6.6. alfejezetben tárgyaltuk egy affin résztérre való vetítést egy adott irány vagy résztér mentén. Be fogjuk látni, hogy egy adott affin résztérre való merőleges vetítés is hasonlóan adható meg azáltal, hogy megszerkesztünk egy merőlegesen kiegészítő affin részteret.

10.2.1. Merőlegesen kiegészítő affin résztekek

10.11. Értelmezés

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 valódi affin részterei *merőlegesen kiegészítők* vagy *ortogonálisan komplementerek* (jelölés: $\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$), ha $\vec{\mathcal{Y}}_1 = (\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp$.

Tehát merőlegesen kiegészítő affin résztekek olyan affin résztekek, melyek merőlegesek egymásra és kiegészítő dimenziósak. Lineáris alterekkel ellentétben nem beszélhetünk egy affin résztér merőleges kiegészítőjéről, mivel nem csak egy létezik belőle.

10.12. Tulajdonság

Legyen \mathcal{Y}_1 egy valódi affin résztér az \mathcal{X} euklideszi affin térnek és legyen $P \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Ekkor egyetlen olyan \mathcal{Y}_2 affin résztér létezik, amelyre $P \in \mathcal{Y}_2$ és $\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$.

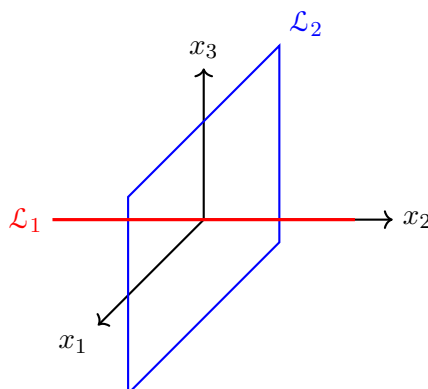
Bizonyítás. Egyértelműség. Először feltételezzük, hogy létezik az \mathcal{Y}_2 affin résztér és igazoljuk az egyértelműségét, majd utána belátjuk a létezését. Az $\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ feltételből következik, hogy $\vec{\mathcal{Y}}_2 = (\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp$, továbbá $P \in \mathcal{Y}_2$, ezért $\mathcal{Y}_2 = t((\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp, P)$ alakú kell legyen, tehát \mathcal{Y}_2 egyértelműen meghatározott.

Létezés. Végül az $\mathcal{Y}_2 = t((\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp, P)$ egy jól értelmezett affin résztér, így \mathcal{Y}_2 létezik is. \square

Affin résztér iránytere nem változik meg párhuzamos eltolás során, ezért merőlegesen kiegészítő affin résztér párhuzamos eltoltjai is merőlegesen kiegészítőek maradnak. Merőlegesen kiegészítő affin résztérnek mindig egyetlen pontban metszik egymást.

10.13. Tulajdonság

Legyenek \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 valódi affin résztér egy \mathcal{X} euklideszi affin térben. Ha $\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$, akkor az $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ metszet egyetlen pontból áll.



10.1. ábra. Merőlegesen kiegészítő affin résztér.

Bizonyítás. Az $\mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ értelmezés szerint egyenértékű az $\vec{\mathcal{Y}}_1 = (\vec{\mathcal{Y}}_2)^\perp$ egyenlőséggel, ahonnan a 9.11. Tulajdonság (iv) alpontja alapján következik, hogy $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{Y}}_1 \oplus (\vec{\mathcal{Y}}_1)^\perp = \vec{\mathcal{Y}}_1 \oplus \vec{\mathcal{Y}}_2$. Innen következik a 3.41. Tulajdonság (iii) alpontja alapján, hogy az $\vec{\mathcal{Y}}_1 \cap \vec{\mathcal{Y}}_2$ metszet egyetlen pontból áll. \square

10.14. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret a standard skalárszorozattal. Írjuk fel az

$$\mathcal{L} = (-5, 6, 3, 8) + \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle$$

lineáris varietásnak azt az \mathcal{L}' merőlegesen kiegészítőjét, amely átmegy a $P = (-3, 7, 1, 2)$ ponton. \diamond

Megoldás. A P ponton átmenő merőlegesen kiegészítő $\mathcal{L}' = P + (\vec{\mathcal{L}})^\perp$ alakú. Az \mathcal{L} lineáris varietás $\vec{\mathcal{L}} = \langle v_1 = (1, 2, 0, -1), v_2 = (-3, 0, 2, 1) \rangle$ irányterének a merőlegese a 9.12. Következmény

alapján $(\vec{\mathcal{L}})^\perp = \{v_1, v_2\}^\perp$, és amely az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. Ennek a rendszernek a megoldásai

$$x = (\alpha + \beta, \alpha, \beta, 3\alpha + \beta) = \alpha(1, 1, 0, 3) + \beta(1, 0, 1, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alakúak, ahonnan $(\vec{\mathcal{L}})^\perp = \langle (1, 1, 0, 3), (1, 0, 1, 1) \rangle$. Tehát az keresett merőlegesen kiegészítő lineáris varietás

$$\mathcal{L}' = \underbrace{(-3, 7, 1, 2)}_P + \underbrace{\langle (1, 1, 0, 3), (1, 0, 1, 1) \rangle}_{(\vec{\mathcal{L}})^\perp}.$$

□

10.15. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret a standard skalárszorozattal. Legyen az \mathcal{L} lineáris varietás a

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 13 \end{cases} \quad (10.2)$$

egyenletrendszer megoldáshalmaza. Írjuk fel az \mathcal{L} lineáris varietás vektoriális egyenletét és azt a merőlegesen kiegészítő lineárist, amely átmegy a $P = (4, 9, 11, -2)$ ponton! ◇

Megoldás. A (10.2) inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{aligned} x &= (-27 + 13\alpha - 14\beta, -20 + 10\alpha - 10\beta, \alpha, \beta) \\ &= (-27, -20, 0, 0) + \alpha(13, 10, 1, 0) + \beta(-14, -10, 0, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

alakúak, ahonnan $\mathcal{L} = (-27, -20, 0, 0) + \langle (13, 10, 1, 0), (-14, -10, 0, 1) \rangle$.

A P ponton átmenő, az \mathcal{L} -vel merőlegesen kiegészítő lineáris varietás $\mathcal{L}' = P + (\vec{\mathcal{L}})^\perp$ alakú. Az $\vec{\mathcal{L}} = \langle (13, 10, 1, 0), (-14, -10, 0, 1) \rangle$ és ebből felírható a következő homogén lineáris egyenletrendszer a $(\vec{\mathcal{L}})^\perp$ altérre:

$$\begin{cases} (13, 10, 1, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ (-14, -10, 0, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 13x_1 + 10x_2 + x_3 = 0 \\ -14x_1 - 10x_2 + x_4 = 0 \end{cases},$$

amit megoldva kapjuk, hogy $\vec{\mathcal{L}}' = (\vec{\mathcal{L}})^\perp = \langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle$. Tehát

$$\mathcal{L}' = (4, 9, 11, -2) + \langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle.$$

Mivel \mathcal{L} egy lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ezért az $(\vec{\mathcal{L}})^\perp$ merőlegest egyszerűbben, számolás nélkül is megkaphatjuk. Ehhez azt kell tudni, hogy $\vec{\mathcal{L}}$ a (10.2) inhomogén lineáris egyenletrendszerből kapott

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza. Továbbá ez az egyenletrendszer azt fejezi ki, hogy a megoldáshalmaza

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{L}} &= \langle (2-3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle^\perp \\ \iff \vec{\mathcal{L}}^\perp &= (\langle (2-3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle^\perp)^\perp = \langle (2-3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle.\end{aligned}$$

Az $\vec{\mathcal{L}}^\perp$ vektortér generátorait leolvashatjuk az egyenletrendszer ismeretlenjeinek együttthatóiból. Tehát $\mathcal{L}' = P + (\vec{\mathcal{L}})^\perp = (4, 9, 11, -2) + \langle (2, -3, 4, -2), (1, -2, 7, -6) \rangle$. \square

10.16. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében adott egy $P(2, -1, 4, 6)$ pont, egy

$$\frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4 + 4}{2}$$

egyenletű \mathcal{L}_1 egyenes és az $3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 - 4 = 0$ egyenletű \mathcal{H}_2 hipersík. Írjuk fel a P ponton átmenő és az \mathcal{L}_1 , illetve \mathcal{H}_2 hipersíkkal merőlegesen kiegészítő affin résztereket! \diamond

Megoldás. Az \mathcal{L}_1 egyenessel merőlegesen kiegészítő affin résztér egy \mathcal{H}_1 hipersík, melynek az iránytere $\vec{\mathcal{H}}_1 = (\vec{\mathcal{L}}_1)^\perp = \langle u(6, 0, -1, 2)_{\mathbf{B}} \rangle^\perp$, ahol u az \mathcal{L}_1 egyenes irányvektora. Az \mathcal{H}_1 átmegy a P ponton, így az egyenlete

$$6(x_1 - 2) - (x_3 - 4) + 2(x_4 - 6) = 0 \iff 6x_1 - x_3 + 2x_4 - 20 = 0.$$

A \mathcal{H}_2 hipersíkkal merőlegesen kiegészítő affin résztér egy \mathcal{L}_2 egyenes, melynek az iránytere $\vec{\mathcal{L}}_2 = (\vec{\mathcal{H}}_2)^\perp = (\langle \eta(3, -2, 8, -7)_{\mathbf{B}} \rangle^\perp)^\perp = \langle \eta(3, -2, 8, -7)_{\mathbf{B}} \rangle$, ahol η a \mathcal{H}_2 hipersík normálvektora. Az \mathcal{L}_2 átmegy a P ponton, így az egyenlete

$$\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2 + 1}{-2} = \frac{x_3 - 4}{8} = \frac{x_4 - 6}{-7}.$$

\square

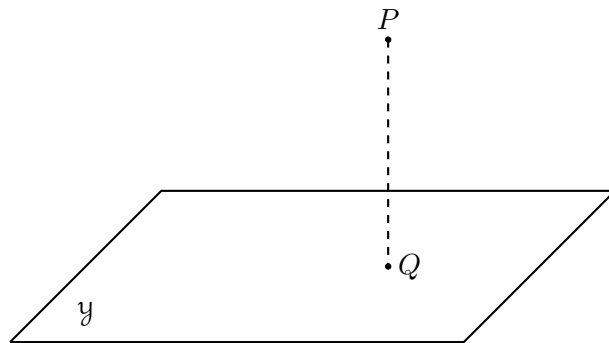
10.2.2. Pont merőleges vetülete affin résztérre

10.17. Tulajdonság

Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} euklideszi affin tér egy affin résztere és $P \in \mathcal{X}$ egy pont úgy, hogy $P \notin \mathcal{Y}$. Ekkor létezik egyetlen $Q \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy $PQ \perp \mathcal{Y}$.

Bizonyítás. Létezés. Előbb igazoljuk, hogy létezik olyan $Q \in \mathcal{Y}$ pont, hogy $PQ \perp \mathcal{Y}$. A 10.12. Tulajdonság alapján létezik egyetlen \mathcal{Z} affin résztér, amely tartalmazza a P pontot és $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$. A 10.13. Tulajdonság szerint ekkor az \mathcal{Y} és \mathcal{Z} affin részterek egyetlen pontban metszik egymást, amelyet Q -val jelölünk. Mivel $P, Q \in \mathcal{Z}$, ezért $\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{Z}} = (\vec{\mathcal{L}})^\perp$, ami a 10.7. Tulajdonság alapján azt jelenti, hogy $PQ \perp \mathcal{Y}$.

Egyértelműség. Ha van még egy $Q' \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy $PQ' \perp \mathcal{Y}$, akkor $\overrightarrow{PQ'} \perp \vec{\mathcal{Y}}$ a 10.7. Tulajdonság alapján. Ekkor $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{PQ} \in (\vec{\mathcal{Y}})^\perp$ (mivel $(\vec{\mathcal{Y}})^\perp$ lineáris altere az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytérnek), de $Q, Q' \in \mathcal{Y}$, tehát $\overrightarrow{QQ'} \in \vec{\mathcal{Y}}$. Azt kaptuk, hogy $\overrightarrow{QQ'} \in (\vec{\mathcal{Y}})^\perp \cap \vec{\mathcal{Y}} = \{\vec{0}\}$, ezért $\overrightarrow{QQ'} = \vec{0}$, azaz $Q = Q'$. \square



10.2. ábra. Pont vetülete affin részterre.

10.18. Értelmezés

A 10.17. Tulajdonságban szereplő Q pontot a P pont \mathcal{Y} affin részterre eső *merőleges vetületének* nevezzük. Ha $P \in \mathcal{Y}$, akkor értelmezés szerint a $Q = P$ pontot tekintjük a merőleges vetületnek.

A P pont \mathcal{Y} affin részterre való Q merőleges vetülete jellemezhető a $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{\mathcal{Y}}$ relációval. A 10.17. Tulajdonság bizonyítása alapján kijelenthetjük a következőt.

10.19. Következmény

Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} euklideszi affin tér egy affin résztere és $P \in \mathcal{X}$ egy tetszőleges pont. Ha \mathcal{Y}' a P ponton átmenő és az \mathcal{Y} részterrel merőlegesen kiegészítő affin részter, akkor a $\{Q\} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}'$ metszéspont a P pont merőleges vetülete az \mathcal{Y} affin részterre.

10.20. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret a standard skalárszorzattal. Számítsuk ki a $P = (-3, 7, 1, 2)$ pont merőleges vetületét az $\mathcal{L} = (-5, 6, 3, 8) + \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle$ lineáris varietásra. \diamond

Megoldás. Legyen $\mathcal{L}' = P + (\vec{\mathcal{L}})^\perp$ a P ponton átmenő és az \mathcal{L} -el merőlegesen kiegészítő lineáris varietás. Ekkor a P pont merőleges vetülete az \mathcal{L} lineáris varietásra a $\{Q\} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ metszéspont.

A 10.14. Példában az \mathcal{L}' kiszámolása során láttuk, hogy $\vec{\mathcal{L}}' = (\vec{\mathcal{L}})^\perp$ az

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = 0 \\ (-3) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza (az egyenletek együtthatói az \mathcal{L} irányterét kifeszítő vektorok együtthatói). Ez alapján felírhatjuk az \mathcal{L}' -t, mint egy egyenletrendszer megoldáshalmaza. Az \mathcal{L}' átmegy a $P = (-3, 7, 1, 2)$ ponton és az iránytere a (10.4) a megoldáshalmaza, ezért

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1 \cdot (x_1 + 3) + 2 \cdot (x_2 - 7) + 0 \cdot (x_3 - 1) + (-1) \cdot (x_4 - 2) = 0 \\ (-3) \cdot (x_1 + 3) + 0 \cdot (x_2 - 7) + 2 \cdot (x_3 - 1) + 1 \cdot (x_4 - 2) = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 - 9 = 0 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 13 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.5)$$

megoldáshalmaza az \mathcal{L}' lineáris varietás. Ekkor az $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ metszet pontjai pontosan az \mathcal{L} azon pontjai, amelyek kielégítik a (10.5) egyenletrendszert. Ennek kiszámolásához felírjuk az \mathcal{L} paraméteres egyenletét:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ x_2 = 6 + 2\lambda_1 \\ x_3 = 3 + 2\lambda_2 \\ x_4 = 8 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

majd behelyettesítjük a (10.5) egyenletrendszerbe

$$\begin{cases} (-5 + \lambda_1 - 3\lambda_2) + 2(6 + 2\lambda_1) - (8 - \lambda_1 + \lambda_2) - 9 = 0 \\ -3(-5 + \lambda_1 - 3\lambda_2) + 2(3 + 2\lambda_2) + (8 - \lambda_1 + \lambda_2) - 13 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10 = 6\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ -16 = -4\lambda_1 + 14\lambda_2 \end{cases}.$$

Megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $\lambda_1 = \frac{19}{17}$ és $\lambda_2 = -\frac{14}{17}$. Ezeket visszahelyettesítve kapjuk a Q metszéspont koordinátáit:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{24}{17} \\ x_2 = \frac{140}{17} \\ x_3 = \frac{23}{17} \\ x_4 = \frac{103}{17} \end{cases}.$$

Tehát $Q = (-\frac{24}{17}, \frac{140}{17}, \frac{23}{17}, \frac{103}{17})$ a $P = (-3, 7, 1, 2)$ pont merőleges vetülete az \mathcal{L} lineáris varietásra. \square

10.21. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében adott egy $P(2, -1, 4, 6)$ pont és egy

$$\frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4 + 4}{2}$$

egyenletű \mathcal{L}_1 egyenes. Számítsuk ki a P pont merőleges vetületét az \mathcal{L}_1 egyenesre! \diamond

Megoldás. A 10.21. Példában meghatároztuk a P ponton átmenő és az \mathcal{L}_1 egyenessel merőlegesen kiegészítő \mathcal{H}_1 hipersík $6x_1 - x_3 + 2x_4 - 20 = 0$ egyenletét. Felírjuk az \mathcal{L}_1 egyenes

$$\begin{cases} x_1 = 6\lambda \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 - \lambda \\ x_4 = -4 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletét és behelyettesítjük a \mathcal{H}_1 hipersík egyenletébe

$$6(6\lambda) - (-1 - \lambda) + 2(-4 + 2\lambda) - 20 = 0 \iff \lambda = \frac{27}{41}.$$

A kiszámolt paramétert visszahelyesítjük az \mathcal{L}_1 egyenes paraméteres egyenletébe, így kapva meg a vetület koordinátáit. Tehát $Q(\frac{162}{41}, 1, -\frac{68}{41}, -\frac{110}{41})_{\mathcal{R}}$ a P pont vetülete az \mathcal{L}_1 egyenesre. \square

10.22. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében adott egy $P(2, -1, 4, 6)_{\mathcal{R}}$ pont és egy $3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 - 4 = 0$ egyenletű \mathcal{H}_2 hipersík. Számítsuk ki a P pont merőleges vetületét az \mathcal{H}_2 hipersíkra! \diamond

Megoldás. A 10.21. Példában meghatároztuk a P ponton átmenő és az \mathcal{H}_2 hipersíkkal merőlegesen kiegészítő \mathcal{L}_2 egyenes

$$\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2 + 1}{-2} = \frac{x_3 - 4}{8} = \frac{x_4 - 6}{-7}.$$

egyenletét. Felírjuk az \mathcal{L}_2 egyenes

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3\lambda \\ x_2 = -1 - 2\lambda \\ x_3 = 4 + 8\lambda \\ x_4 = 6 - 7\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletét és behelyettesítjük a \mathcal{H}_2 hipersík egyenletébe

$$3(2 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + 8(4 + 8\lambda) - 7(6 - 7\lambda) - 4 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{21}.$$

A kiszámolt paramétert visszahelyesítjük az \mathcal{L}_2 egyenes paraméteres egyenletébe, így kapva meg a vetület koordinátáit. Tehát $Q\left(\frac{45}{21}, -\frac{23}{21}, \frac{92}{21}, \frac{119}{21}\right)_{\mathcal{R}}$ a P pont vetülete az \mathcal{H}_2 hipersíkra. \square

10.2.3. Merőleges vetítés és tükrözés

A 10.19. Következmény alapján az \mathcal{Y} affin résztérre való merőleges vetítés (tükrözés) megegyezik az $(\vec{y})^\perp$ mentén az \mathcal{Y} -ra való vetítéssel (tükrözéssel). Képletet adunk affin résztérre való merőleges vetítés és szimmetria egyenletére. Tárgyaljuk az egyenes és hipersíkra való vetítés és tükrözés sajátos eseteit.

10.2.4. Gram-mátrix és determináns

Bevezetjük a Gram-mátrixt és determinánst, amely szerepet fog játszani a vetítés és tükrözés egyenletének felírásában, illetve szerepelni fog a pont és affin résztér távolságképletében.

10.23. Értelmezés (Gram-mátrix és Gram-determináns)

Egy (\mathcal{V}, \cdot) euklideszi vektortér $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ vektoraihoz rendelt *Gram-mátrix*

$$M(v_1, \dots, v_k) = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}),$$

ahol $v_i \cdot v_j$ a v_i és v_j vektorok skalárszorzata a \mathcal{V} térben. A v_1, \dots, v_k vektorokhoz rendelt *Gram-determináns*

$$G(v_1, \dots, v_k) = \det(M(v_1, \dots, v_k)) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix}.$$

A Gram-determináns rendelkezik a következő pozitivitási tulajdonsággal, amely segítségével determináns számolással is megállítható vektorok lineáris függetlensége euklideszi vektorterekben.

10.24. Tulajdonság (Gram-determináns tulajdonságai)

Legyen (\mathcal{V}, \cdot) egy euklideszi vektortér.

- (i) A Gram-determináns nem negatív, azaz $G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$, minden $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ vektorok esetén. A $G(v_1, \dots, v_k) = 0$ akkor és csakis akkor, ha a v_1, \dots, v_k vektorok lineárisan függőek.
- (ii) A Gram-determináns nem függ a vektorok sorrendjétől:

$$G(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = G(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k), \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Bizonyítás.

- (i) Ha a v_1, \dots, v_k vektorok lineárisan függőek, akkor léteznek $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$, nem mind nulla együtthatók úgy, hogy $b_1 v_1 + \dots + b_k v_k = \vec{0}$. Mindkét oldalt rendre skalárszorozva a v_1, \dots, v_k vektorokkal a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} (v_1 \cdot v_1)b_1 + (v_1 \cdot v_2)b_2 + \dots + (v_1 \cdot v_k)b_k = 0 \\ (v_2 \cdot v_1)b_1 + (v_2 \cdot v_2)b_2 + \dots + (v_2 \cdot v_k)b_k = 0 \\ \vdots \\ (v_k \cdot v_1)b_1 + (v_k \cdot v_2)b_2 + \dots + (v_k \cdot v_k)b_k = 0 \end{cases},$$

amelyet átírhatunk mátrix alakba:

$$\begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff M(v_1, \dots, v_k) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel a b_1, \dots, b_k együtthatók nem mind nullák, ezért

$$G(v_1, \dots, v_k) = \det(M(v_1, \dots, v_k)) = 0.$$

Ha a v_1, \dots, v_k vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $\mathcal{W} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ lineáris altér k -dimenziós, és legyen (e_1, \dots, e_k) egy ortonormált bázisa (a v_1, \dots, v_k bázisvektorokra alkalmazzuk a Gram-Schmidt eljárást). A v_i vektorokat felírhatjuk ebben az ortonormált bázisban:

$$v_i = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} e_\ell, \quad \forall \ell = 1, \dots, k.$$

Ezen összefüggés mindkét oldalát skalárszorozva a v_j vektorral kapjuk, hogy

$$(v_i \cdot v_j) = \left(\sum_{p=1}^k a_{ip} e_p \right) \cdot \left(\sum_{q=1}^k a_{jq} e_q \right) = \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k a_{ip} a_{jq} (e_p \cdot e_q) = \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k a_{ip} a_{jq} \delta_{pq} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} a_{j\ell},$$

ahonnan az $M(v_1, \dots, v_k)$ Gram-mátrix felírható, mint

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^k a_{1\ell} a_{1\ell} & \sum_{\ell=1}^k a_{1\ell} a_{2\ell} & \dots & \sum_{\ell=1}^k a_{1\ell} a_{k\ell} \\ \sum_{\ell=1}^k a_{2\ell} a_{1\ell} & \sum_{\ell=1}^k a_{2\ell} a_{2\ell} & \dots & \sum_{\ell=1}^k a_{2\ell} a_{k\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^k a_{k\ell} a_{1\ell} & \sum_{\ell=1}^k a_{k\ell} a_{2\ell} & \dots & \sum_{\ell=1}^k a_{k\ell} a_{k\ell} \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}}_{A^t} = A \cdot A^t. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy

$$G(v_1, \dots, v_k) = \det(M(v_1, \dots, v_k)) = \det(A \cdot A^t) = \det(A) \det(A^t) = \det(A)^2 \geq 0.$$

De $\det(A) \neq 0$, mivel v_1, \dots, v_k lineárisan függetlenek, tehát $G(v_1, \dots, v_k) > 0$.

- (ii) A v_i és v_{i+1} vektorok felcserélése a Gram-determinánsban az i -dik és $(i+1)$ -dik oszlopok (\dagger) és sorok (\ddagger) felcserélését jelenti

$$\begin{aligned} G(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) &= \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_i & v_1 \cdot v_{i+1} & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_i \cdot v_1 & \dots & v_i \cdot v_i & v_i \cdot v_{i+1} & \dots & v_i \cdot v_k \\ v_{i+1} \cdot v_1 & \dots & v_{i+1} \cdot v_i & v_{i+1} \cdot v_{i+1} & \dots & v_{i+1} \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_i & v_k \cdot v_{i+1} & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} - \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_{i+1} & v_1 \cdot v_i & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_i \cdot v_1 & \dots & v_i \cdot v_{i+1} & v_i \cdot v_i & \dots & v_i \cdot v_k \\ v_{i+1} \cdot v_1 & \dots & v_{i+1} \cdot v_{i+1} & v_{i+1} \cdot v_i & \dots & v_{i+1} \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_{i+1} & v_k \cdot v_i & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(\ddagger)}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_{i+1} & v_1 \cdot v_i & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{i+1} \cdot v_1 & \dots & v_{i+1} \cdot v_{i+1} & v_{i+1} \cdot v_i & \dots & v_{i+1} \cdot v_k \\ v_i \cdot v_1 & \dots & v_i \cdot v_{i+1} & v_i \cdot v_i & \dots & v_i \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_{i+1} & v_k \cdot v_i & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix} \\ &= G(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

10.25. Példa

Az \mathbb{R}^5 vektortérben adottak a $v_1 = (1, -2, 7, 5, 1)$, $v_2 = (2, 4, -2, 2, -3)$, $v_3 = (-1, 2, -4, -3, 2)$ vektorok. Lineárisan függetlenek-e ezek a vektorok? ◇

Megoldás. Megvizsgáljuk, hogy a vektorok $G(v_1, v_2, v_3)$ Gram-mátrixa nulla vagy sem. Ehhez felírjuk a vektorok egymással vett skalárszorzatát és beírjuk őket egy determinánsba

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80 & -13 & -46 \\ -13 & 37 & 2 \\ -46 & 2 & 34 \end{vmatrix} = 18674 \neq 0,$$

tehát a megadott vektorok lineárisan függetlenek. \square

10.2.5. Merőleges vetítés egyenlete

10.26. Tulajdonság (Merőleges vetítés egyenlete)

Az \mathcal{X} n -dimenziós euklideszi affin térben legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy ortonormált koordináta-rendszer. Legyen az \mathcal{Y} valódi affin résztér egy pontja $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ és iránytere

$$\vec{\mathcal{Y}} = \langle v_1(v_{11}, \dots, v_{1n})_{\mathbf{B}}, \dots, v_k(v_{k1}, \dots, v_{kn})_{\mathbf{B}} \rangle.$$

Az \mathcal{Y} affin résztérre való $\pi_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ merőleges vetítés egyenlete

$$[\pi_{\mathcal{Y}}(P)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^t ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}} \iff$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{k1} \\ v_{12} & \dots & v_{k2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \dots & v_k \cdot v_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

minden $P(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pont esetén.

Bizonyítás. Legyen $P(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ egy tetszőleges pont. A P pont merőleges vetületének kiszámításához vesszük azt a \mathcal{Z} affin résztérrel, amely átmegy a P ponton és merőlegesen kiegészítő az \mathcal{Y} -nal. A \mathcal{Z} algebrai egyenlete (y_1, \dots, y_n ismeretlenekben)

$$\begin{cases} v_{11}(y_1 - x_1) + \dots + v_{1n}(y_n - x_n) = 0 \\ \vdots \\ v_{k1}(y_1 - x_1) + \dots + v_{kn}(y_n - x_n) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n v_{1i}(y_i - x_i) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_{ki}(y_i - x_i) = 0 \end{cases}.$$

Ebbe az egyenletbe behelyettesítjük az \mathcal{Y} paraméteres egyenletét:

$$\begin{aligned} [Q]_{\mathcal{R}} &= [A]_{\mathcal{R}} + \lambda_1[v_1]_{\mathbf{B}} + \dots + \lambda_k[v_k]_{\mathbf{B}} \\ \iff \begin{cases} y_1 = a_1 + \lambda_1 v_{11} + \dots + \lambda_k v_{k1} \\ \vdots \\ y_n = a_n + \lambda_1 v_{1n} + \dots + \lambda_k v_{kn} \end{cases} & (10.6) \\ \iff \begin{cases} y_1 = a_1 + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_{j1} \\ \vdots \\ y_n = a_n + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_{jn} \end{cases}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

így jutva a következő egyenletrendszerhez ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ismeretlenekben):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n v_{1i}(a_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_{ji} - x_i) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_{ki}(a_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j v_{ji} - x_i) = 0 \end{cases} \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^n v_{ji} v_{1i} + \sum_{i=1}^n v_{1i}(a_i - x_i) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^n v_{ji} v_{ki} + \sum_{i=1}^n v_{ki}(a_i - x_i) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \cdot v_1 + v_1 \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \cdot v_k + v_k \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \cdot v_1 \lambda_1 + \dots + v_1 \cdot v_k \lambda_k = \overrightarrow{AP} \cdot v_1 \\ \vdots \\ v_k \cdot v_1 \lambda_1 + \dots + v_k \cdot v_k \lambda_k = \overrightarrow{AP} \cdot v_k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{AP} \cdot v_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{AP} \cdot v_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\Leftrightarrow M(v_1, \dots, v_k) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{AP} \cdot v_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{AP} \cdot v_k \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{AP} \cdot v_1 \\ \vdots \\ \overrightarrow{AP} \cdot v_k \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_{1i}(x_i - a_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_{ki}(x_i - a_i) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^t ([P]_{\mathcal{A}} - [A]_{\mathcal{A}}). \end{aligned} \quad (10.11)$$

A (10.6) alapján látható, hogy az \mathcal{Y} paraméteres egyenlete átírható

$$[Q]_{\mathcal{A}} = [A]_{\mathcal{A}} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \Leftrightarrow [Q]_{\mathcal{A}} = [A]_{\mathcal{A}} + \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_n]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

alakba. Ebbe visszahelyettesítve a (10.11) eredményt megkapjuk a vetület koordinátáit:

$$[Q]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^t ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}},$$

ahonnan adódik a merőleges vetítés egyenlete. \square

10.27. Megjegyzés

Ha a 10.26. Tulajdonságban a v_1, \dots, v_k vektorok az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér egy ortonormált bázisát alkotják, akkor $M(v_1, \dots, v_k) = I_k$ és az \mathcal{Y} affin résztérre való merőleges vetítés egyenlete a következőre egyszerűsödik:

$$[\pi_{\mathcal{Y}}(P)] = \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^t ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}}.$$

\diamond

10.28. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret a standard skalárszorzattal. Írjuk fel az

$$\mathcal{L} = (-5, 6, 3, 8) + \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle$$

lineáris varietásra való merőleges vetítés egyenletét és határozzuk meg a $P = (-3, 7, 1, 2)$ pont merőleges vetületét az \mathcal{L} lineáris varietásra. \diamond

Megoldás. Az \mathbb{R}^4 affin térben tekintjük az $\mathcal{E} = (O = \vec{0}; \mathbf{E})$ kanonikus ortonormált koordináta-rendszert. Az \mathcal{L} lineáris egy pontja $A(-5, 6, 3, 8)_{\mathcal{E}}$ és az irányterének bázisvektorai $v_1(1, 2, 0, -1)_{\mathbf{E}}$, $v_2(-3, 0, 2, 1)_{\mathbf{E}}$. Kiszámoljuk a v_1 és v_2 vektorok Gram-matrixát

$$M(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, 2, 0, -1)(1, 2, 0, -1) & (1, 2, 0, -1)(-3, 0, 2, 1) \\ (-3, 0, 2, 1)(1, 2, 0, -1) & (-3, 0, 2, 1)(-3, 0, 2, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

és az inverzét

$$M(v_1, v_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A 10.26. Tulajdonság alapján a merőleges vetítés egyenlete:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 5 \\ x_2 - 6 \\ x_3 - 3 \\ x_4 - 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &\iff \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{[\pi_{\mathcal{L}}(M)]_{\mathcal{E}}} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -7 & -4 \\ 1 & 14 & 4 & -5 \\ -7 & 4 & 6 & 1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{E}}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A $P(-3, 7, 1, 2)_{\mathcal{E}}$ pont vetülete az \mathcal{L} lineáris varietásra:

$$[Q]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -7 & -4 \\ 1 & 14 & 4 & -5 \\ -7 & 4 & 6 & 1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{24}{17} \\ \frac{140}{17} \\ \frac{23}{17} \\ \frac{103}{17} \end{bmatrix},$$

ahonnan $Q = (-\frac{24}{17}, \frac{140}{17}, \frac{23}{17}, \frac{103}{17})$. \square

10.2.5.1. Egyenesre való merőleges vetítés egyenlete

10.29. Tulajdonság

Az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{L} egyenes egyenlete

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}.$$

Az \mathcal{L} egyenesre való $\pi_{\mathcal{L}} \in \text{End}(\mathcal{X})$ merőleges vetítés egyenlete az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben

$$[\pi_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{R}} = \frac{[u_1 \dots u_n]^t [u_1 \dots u_n]}{u_1^2 + \dots + u_n^2} ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}} \iff$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{u_1^2 + \dots + u_n^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

minden $P(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pont esetén, és ahol $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}$ az egyenes egy pontja.

Bizonyítás. Az \mathcal{L} egyenes egy pontja $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ és iránytere $\vec{\mathcal{L}} = \langle u(u_1, \dots, u_n)_{\mathbf{B}} \rangle$. A 10.26. Tulajdonság alapján az \mathcal{L} egyenesre való merőleges vetítés egyenlete az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben

$$[\pi_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{R}} = [u]_{\mathbf{B}} M(u)^{-1} [u]_{\mathbf{B}}^t ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}}$$

$$\iff [\pi_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{-1} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}}$$

$$\iff [\pi_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{R}} = \frac{1}{u_1^2 + \dots + u_n^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}}.$$

□

10.30. Példa

Az \mathbb{R}^3 euklideszi affin térben írjuk fel az

$$\frac{x_1 - 2}{0} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 + 7}{-5}$$

egyenletű \mathcal{L} egyenesre való merőleges vetítés egyenletét (a kanonikus koordináta-rendszerben). ◇

Megoldás. Az \mathcal{L} egyenes egy pontja $A(2, 0, -7)_{\mathcal{E}}$ és irányvektora $u(0, 3, -5)_{\mathbf{E}}$. Így a 10.29. Tulajdonság alapján az \mathcal{L} egyenesre való $\pi_{\mathcal{L}}$ vetítés egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben:

$$[\pi_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{0^2 + 3^2 + (-5)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \left([P]_{\mathcal{E}} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{[\pi_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{E}}} = \frac{1}{34} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -15 \\ 0 & -15 & 25 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{[P]_{\mathcal{E}}} + \frac{1}{34} \cdot \begin{bmatrix} 68 \\ -105 \\ -63 \end{bmatrix}.$$

□

10.31. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében adott egy $P(2, -1, 4, 6)$ pont és egy

$$\frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4 + 4}{2}$$

egyenletű \mathcal{L}_1 egyenes. Írjuk fel az \mathcal{L}_1 egyenesre való merőleges vetítés egyenletét és számítsuk ki a P pont merőleges vetületét az \mathcal{L}_1 egyenesre! ◇

Megoldás. Az \mathcal{L}_1 egyenes egy pontja $A(0, 1, -1, -4)_{\mathcal{R}}$ és irányvektora $u(6, 0, -1, 2)_{\mathbf{B}}$. A 10.29. Tulajdonság alapján az \mathcal{L}_1 egyenesre való $\pi_{\mathcal{L}_1}$ vetítés egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{6^2 + (-1)^2 + 2^2} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 + 1 \\ x_4 + 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 36 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 42 \\ 41 \\ -48 \\ -150 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A $P(2, -1, 4, 6)_{\mathcal{R}}$ pont vetülete az \mathcal{L}_1 egyenesre:

$$[Q]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 36 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 42 \\ 41 \\ -48 \\ -150 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 162 \\ 41 \\ -68 \\ -110 \end{bmatrix},$$

ahonnan $Q\left(\frac{162}{41}, 1, -\frac{68}{41}, -\frac{110}{41}\right)_{\mathcal{R}}$. □

10.2.5.2. Hipersíkra való merőleges vetítés egyenlete**10.32. Tulajdonság**

Az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{H} hipersík egyenlete $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. A \mathcal{H} hipersíkra való $\pi_{\mathcal{H}} \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ merőleges vetítés egyenlete az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} [\pi_{\mathcal{H}}(P)]_{\mathcal{R}} &= \left(I_n - \frac{[a_1 \ \dots \ a_n]^t [a_1 \ \dots \ a_n]}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right) ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} &= \left(I_n - \frac{1}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ x_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n - \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

minden $P(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{H}} \in \mathcal{X}$ pont esetén, és ahol $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ a hipersík egy pontja.

Bizonyítás. A \mathcal{H} egyenlete alapján $\eta_{\mathcal{H}}(a_1, \dots, a_n)_{\mathbf{B}}$ a hipersík normálvektora. Legyen (v_1, \dots, v_{n-1}) a hipersík $\vec{\mathcal{H}}$ irányterének egy ortonormált bázisa és legyen $v_n = \frac{\eta_{\mathcal{H}}}{\|\eta_{\mathcal{H}}\|}$. Ekkor $\mathbf{B}' = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ az $\vec{\mathcal{X}}$ irányter egy ortonormált bázisa. Legyenek $v_i(v_{i1}, \dots, v_{in})_{\mathbf{B}}$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

A $\pi_{\mathcal{H}}$ vetítés nyomának mátrixa a \mathbf{B}' ortonormált bázisban

$$[\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} [\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}} &= T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}[\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}'}T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}} = T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}[\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}'}T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}^t = T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}(I_n + [\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}'} - I_n)T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}^t \\ &= T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}^t + T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}([\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}'} - I_n)T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}^t = I_n - T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}(I_n - [\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}'}T_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}^t) \\ &= I_n - \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{n-11} & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1n-1} & \dots & v_{n-1n-1} & v_{nn-1} \\ v_{1n} & \dots & v_{n-1n} & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n-1} & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n-11} & \dots & v_{n-1n-1} & v_{n-1n} \\ v_{n1} & \dots & v_{nn-1} & v_{nn} \end{bmatrix} \\ &= I_n - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{nn-1} \\ 0 & \dots & 0 & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n-1} & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n-11} & \dots & v_{n-1n-1} & v_{n-1n} \\ v_{n1} & \dots & v_{nn-1} & v_{nn} \end{bmatrix} \\ &= I_n - \begin{bmatrix} v_{n1}^2 & v_{n1}v_{n2} & \dots & v_{n1}v_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{nn-1}v_{n1} & v_{nn-1}v_{n2} & \dots & v_{nn-1}v_{nn} \\ v_{nn}v_{n1} & v_{nn}v_{n2} & \dots & v_{nn}^2 \end{bmatrix} \\ &= I_n - \frac{1}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \dots & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

mivel $v_{ni} = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Minden $A \in \mathcal{H}$ pontra $\pi_{\mathcal{Y}}(A) = A$, ezért $[A]_{\mathcal{H}} = [\pi_{\mathcal{Y}}(A)]_{\mathcal{H}} = [\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}}[A]_{\mathcal{H}} + [\pi_{\mathcal{H}}(O)]_{\mathcal{H}}$, ahonnan $[\pi_{\mathcal{H}}(O)]_{\mathcal{H}} = -[\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}}[A]_{\mathcal{H}} + [A]_{\mathcal{H}}$. \square

10.33. Példa

Az \mathbb{R}^3 euklideszi térben írjuk fel az $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0$ egyenletű \mathcal{H} síkra való merőleges vetítés egyenletét (a kanonikus bázisban).

Megoldás. A megadott sík normálvektora $\eta(1, -2, 3)_{\mathbf{E}}$, amelyre $\|\eta\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$. A $\pi_{\mathcal{H}}$ merőleges vetítés $\vec{\pi}_{\mathcal{H}}$ nyomának mátrixa a kanonikus bázisban

$$\begin{aligned} [\vec{\pi}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A \mathcal{H} sík egy pontja $A(0, 2, 0)_{\mathcal{E}}$, így a \mathcal{H} síkra való $\pi_{\mathcal{H}}$ vetítés egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} [\pi_{\mathcal{H}}(P)]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \left([P]_{\mathcal{E}} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{14} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

minden $P(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^3$ pont esetén. ◇

◇

10.34. Példa

Egy 4-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében adott egy $P(2, -1, 4, 6)_{\mathcal{R}}$ pont és egy $3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 - 4 = 0$ egyenletű \mathcal{H}_2 hipersík. Írjuk fel a \mathcal{H}_2 hipersíkra való merőleges vetítés egyenletét és számítsuk ki a P pont merőleges vetületét a \mathcal{H}_2 hipersíkra! ◇

Megoldás. A megadott sík normálvektora $\eta(3, -2, 8, -7)_{\mathbf{B}}$, amelyre $\|\eta\|^2 = 3^2 + (-2)^2 + 8^2 + (-7)^2 = 126$. A $\pi_{\mathcal{H}_2}$ merőleges vetítés $\vec{\pi}_{\mathcal{H}_2}$ nyomának mátrixa a kanonikus bázisban

$$\begin{aligned} [\vec{\pi}_{\mathcal{H}_2}]_{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -6 & 24 & -21 \\ -6 & 4 & -16 & 14 \\ 24 & -16 & 64 & -56 \\ -21 & 14 & -56 & 49 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 117 & 6 & -24 & 21 \\ 6 & 122 & 16 & -14 \\ -24 & 16 & 62 & 56 \\ 21 & -14 & 56 & 77 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A \mathcal{H} sík egy pontja $A(0, -2, 0, 0)_{\mathcal{R}}$, így a \mathcal{H} síkra való $\pi_{\mathcal{H}}$ vetítés egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 117 & 6 & -24 & 21 \\ 6 & 122 & 16 & -14 \\ -24 & 16 & 62 & 56 \\ 21 & -14 & 56 & 77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 117 & 6 & -24 & 21 \\ 6 & 122 & 16 & -14 \\ -24 & 16 & 62 & 56 \\ 21 & -14 & 56 & 77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ 32 \\ -28 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A $P(2, -1, 4, 6)_{\mathcal{R}}$ pont vetülete az \mathcal{H}_2 hipersíkra:

$$[Q]_{\mathcal{R}} = \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 117 & 6 & -24 & 21 \\ 6 & 122 & 16 & -14 \\ -24 & 16 & 62 & 56 \\ 21 & -14 & 56 & 77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{126} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ 32 \\ -28 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 45 \\ -23 \\ 92 \\ 119 \end{bmatrix},$$

ahonnan $Q\left(\frac{45}{21}, -\frac{23}{21}, \frac{92}{21}, \frac{119}{21}\right)_{\mathcal{R}}$. □

10.2.6. Merőleges tükrözés egyenlete

A 6.7.1. alfejezet alapján egy \mathcal{X} tér egy \mathcal{Y} valódi affin részterére való $\sigma_{\mathcal{Y}}$ tükrözés kiszámolható a $\pi_{\mathcal{Y}}$ merőleges vetítés segítségével: $\sigma_{\mathcal{Y}} = 2\pi_{\mathcal{Y}} - 1_{\mathcal{X}}$. Ezek alapján kapjuk a következő tulajdonságot.

10.35. Tulajdonság (Merőleges tükrözés egyenlete)

Az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin térben legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ egy ortonormált koordináta-rendszer. Ha az \mathcal{Y} valódi affin résztér egy pontja $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}}$ és iránytere

$$\vec{\mathcal{Y}} = \langle v_1(v_{11}, \dots, v_{1n})_{\mathbf{B}}, \dots, v_k(v_{k1}, \dots, v_{kn})_{\mathbf{B}} \rangle,$$

akkor az \mathcal{Y} affin résztérre való $\sigma_{\mathcal{Y}} \in \text{End}(\mathcal{X})$ merőleges tükrözés egyenlete

$$[\sigma_{\mathcal{Y}}(P)] = \left(2 \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} M(v_1, \dots, v_k)^{-1} \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathbf{B}} & \dots & [v_k]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^t - I_n \right) ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}}.$$

10.2.6.1. Egyenesre való tükrözés

10.36. Tulajdonság

Az \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerben egy \mathcal{L} egyenes egyenlete

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}.$$

Az \mathcal{L} egyenesre való $\sigma_{\mathcal{L}} \in \text{End}(\mathcal{X})$ tükrözés egyenlete az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben minden $P(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$[\sigma_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{R}} = \left(2 \frac{\begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}}{u_1^2 + \dots + u_n^2} - I_n \right) ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{u_1^2 + \dots + u_n^2} \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n u_1 & u_n^2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

ahol $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ az egyenes egy pontja.

10.37. Példa

Az \mathbb{R}^3 euklideszi térben írjuk fel az

$$\frac{x_1 - 2}{0} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 + 7}{-5}$$

egyenletű \mathcal{L} egyenesre való tükrözés egyenletét (a kanonikus bázisban). \diamond

Megoldás. Az \mathcal{L} egyenes egy pontja $A(2, 0, -7)_{\mathcal{L}}$ és irányvektora $u(0, 3, -5)_{\mathbf{E}}$. Így a 10.36. Tulajdonság alapján az \mathcal{L} egyenesre való $\sigma_{\mathcal{L}}$ tükrözés egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben: minden $P(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}^3$ pont esetén

$$\begin{aligned} [\sigma_{\mathcal{L}}(P)]_{\mathcal{L}} &= \left(\frac{2}{0^2 + 3^2 + (-5)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \left([P]_{\mathcal{L}} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} -17 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -15 \\ 0 & -15 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 68 \\ -105 \\ -63 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

10.2.6.2. Hipersíkra való tükrözés egyenlete

10.38. Tulajdonság

Az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{H} hipersík egyenlete $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$. Az \mathcal{H} hipersíkra való $\pi_{\mathcal{H}} \in \text{End}(\mathcal{X})$ tükrözés egyenlete az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben: minden $P(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pont esetén

$$\begin{aligned} [\pi_{\mathcal{H}}(P)]_{\mathcal{R}} &= \left(I_n - 2 \frac{[a_1 \dots a_n]^t [a_1 \dots a_n]}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right) ([P]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}}) + [A]_{\mathcal{R}} \\ &\iff \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \left(I_n - \frac{2}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ x_2 - \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n - \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ahol $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ a hipersík egy pontja.

10.39. Példa

Az \mathbb{R}^3 euklideszi affin térben írjuk fel az $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0$ egyenletű \mathcal{H} síkra való merőleges tükrözés és vetítés mátrixát (a kanonikus koordináta-rendszerben). \diamond

Megoldás. A megadott sík normálvektora $\eta(1, -2, 3)_{\mathbf{E}}$, amelyre $\|\eta\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$. A \mathcal{H} síkra való $\sigma_{\mathcal{H}}$ merőleges tükrözés $\vec{\sigma}_{\mathcal{H}}$ nyomának mátrixa a kanonikus bázisban

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{14} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{14} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A \mathcal{H} sík egy pontja $A(0, 2, 0)_{\mathcal{A}}$, így a \mathcal{H} síkra való $\sigma_{\mathcal{H}}$ tükrözés egyenlete a kanonikus koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} [\sigma_{\mathcal{H}}(P)]_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \left([P]_{\mathcal{E}} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

minden $P(x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^3$ pont esetén. □

10.3. Affin részterek távolsága

10.3.1. Metrika vagy távolságfüggvény

Metrika megadásával értelmezzük egy halmaz elemei közti távolságot.

10.40. Értelmezés

Egy \mathcal{A} nemüres halmaz esetén a $\delta: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *metrika* (távolságfüggvény), ha

- (i) (pozitivitás) $\delta(x, y) \geq 0$, minden $x, y \in \mathcal{A}$ esetén, és $\delta(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;
- (ii) (szimmetria) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$, minden $x, y \in \mathcal{A}$ esetén;
- (iii) (háromszög-egyenlőtlenség) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$, minden $x, y, z \in \mathcal{A}$ esetén.

Az (\mathcal{A}, δ) párt *metrikus térnek* nevezzük.

10.41. Példa

- (i) Az intuitív sík esetén beszélünk tetszőleges két pontjának távolságáról. Ez egy metrikát értelmez a síkon.
- (ii) Minden \mathcal{A} nemüres halmaz esetén a $\delta: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases}$ függvény egy metrikát értelmez.

- (iii) Ha \mathcal{V} valós vektortéren $\|-\|$ egy norma, akkor a $\delta: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$ függvény egy metrikát értelmez. Tehát minden normával ellátott valós vektortér egyben metrikus tér is.

◇

10.3.2. Affin tér pontjainak távolsága

Minden euklideszi vektortéren a skalárszorzat megad egy normát. A következő tulajdonságban azt látjuk be, hogy minden euklideszi affin tér egyben metrikus tér is, így beszélhetünk a pontok távolságáról.

10.42. Tulajdonság

Az \mathcal{X} euklideszi affin téren a

$$\delta: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| \quad (10.12)$$

leképezés egy metrika (távolságfüggvény), ahol $\|-\|$ a skalárszorzat által származtatott norma az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytéren.

Bizonyítás.

- (i) A norma pozitivitása alapján $\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| \geq 0$, minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén, és

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \iff \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff A = B.$$

- (ii) Szintén a norma tulajdonsága alapján $\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|-\overrightarrow{BA}\| = |-1| \cdot \|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = \delta(B, A)$, minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén.

- (iii) A normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\delta(A, C) = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = \delta(A, B) + \delta(B, C),$$

minden $A, B, C \in \mathcal{X}$ pontok esetén.

□

10.43. Értelmezés

Egy \mathcal{X} egy euklideszi affin tér esetén az $A, B \in \mathcal{X}$ pontok távolsága alatt a $\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ számot értjük, ahol $\|-\|$ a skalárszorzat által származtatott norma az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytéren. Jelölés: $|AB| = \delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

A távolság értelmezése alapján az A és B pontok távolsága megegyezik az \overrightarrow{AB} vektor hosszával. Az $[AB]$ szakasz hossza alatt az A és B pontok távolságát értjük.

10.3.3. Szögek mértéke

Euklideszi affin terek esetén értelmezhetjük szögek mértékét is. Az \widehat{ABC} szög mértéke (radiánban kifejezve)

$$m(\widehat{ABC}) = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} \right). \quad (10.13)$$

Sajátosan, az \widehat{ABC} derékszög pontosan akkor, ha $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

10.44. Tétel (Pitagorasz-tétel)

Az ABC háromszög a B csúcsban derékszögű akkor és csak akkor, ha $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$.

Bizonyítás. A B szög pontosan akkor derékszögű, ha $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. A szakaszok hosszának értelmezése alapján az $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ egyenértékű a $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$ egyenlőséggel. Így a 9.20. Tétel alapján következik az állítás. \square

Az \mathcal{L}_1 és \mathcal{L}_2 egyenesek szöge alatt az $m(\widehat{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}) = \arccos\left(\frac{|v_1 \cdot v_2|}{\|v_1\| \|v_2\|}\right)$ szöget értjük, ahol $v_1 \in \vec{\mathcal{L}}_1$ és $v_2 \in \vec{\mathcal{L}}_2$ nem nulla vektorok. Ez az értelmezés független a v_1 és v_2 vektorok megválasztásától.

10.3.4. Pont távolsága affin résztértől és a merőleges vetület**10.45. Értelmezés**

Egy affin tér egy P pontjának és egy \mathcal{Y} affin részterének *távolsága*

$$\delta(P, \mathcal{L}) \stackrel{\text{ért.}}{=} \inf\{\delta(P, A) \mid A \in \mathcal{L}\}.$$

A merőleges vetület a következő minimalizáló tulajdonsággal rendelkezik. Egy P pont merőleges vetülete egy \mathcal{Y} affin részterre az a $Q \in \mathcal{Y}$ pont az \mathcal{Y} pontjai közül, amelynek a távolsága P -től a legkisebb.

10.46. Tulajdonság

Legyen \mathcal{Y} az \mathcal{X} affin tér egy nem üres résztere és $P \in \mathcal{X}$ egy pont. Ekkor létezik egyetlen $Q \in \mathcal{Y}$ pont úgy, hogy

$$\delta(P, Q) = \delta(P, \mathcal{Y}) \tag{10.14}$$

és ez a Q pont a P vetülete az \mathcal{Y} részterre (vagyis $Q \in \mathcal{Y}$ és $PQ \perp \mathcal{Y}$).

Bizonyítás. Legyen Q a P pont vetülete az \mathcal{Y} részterre. A 10.17. Tulajdonság alapján $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{\mathcal{Y}}$, így minden $A \in \mathcal{Y}$ pont esetén $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AQ}$, mivel $\overrightarrow{AQ} \in \vec{\mathcal{Y}}$. A Pitagorasz-tétel (9.20. Tétel) alapján $\|\overrightarrow{PA}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QA}\|^2$, vagyis $\delta(P, A)^2 = \delta(P, Q)^2 + \delta(Q, A)^2$, ahonnan $\delta(P, A) \geq \delta(P, Q)$ és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $Q = A$. Ezzel beláttuk a (10.14) összefüggést és a Q egyértelműségét is. \square

A 10.3.6. alfejezetben levezetjük egy pont affin résztértől való távolságának (10.20) képletét.

10.3.5. Két affin résztér távolsága

A pont és résztér távolságához hasonlóan értelmezhetjük két affin résztér távolságát is.

10.47. Értelmezés

Egy affin tér \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 affin *részterének távolságán* a

$$\delta(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) \stackrel{\text{ért.}}{=} \inf\{\delta(A_1, A_2) \mid A_1 \in \mathcal{Y}_1, A_2 \in \mathcal{Y}_2\}$$

számot értjük.

Két affin résztér távolsága visszavezethető egy pont és egy affin résztér távolságára. Így két affin résztér távolságát kiszámíthatjuk a pont és résztér távolságára vonatkozó (10.20) képlettel.

10.48. Tulajdonság

Legyen $\mathcal{Y}_1 = t(\vec{y}_1, A_1)$ és $\mathcal{Y}_2 = t(\vec{y}_2, A_2)$ az \mathcal{X} euklideszi affin tér két résztere. Ekkor az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 résztelek távolsága egyenlő az A_1 pont és az $\mathcal{S}_2 = t(A_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$ résztér távolságával, vagyis

$$\delta(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) = \delta(A_1, \mathcal{S}_2). \quad (10.15)$$

Bizonyítás. A $P_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $P_2 \in \mathcal{Y}_2$ tetszőleges pontok esetén

$$\delta(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \|\overrightarrow{P_1 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 P_2}\| = \|\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{P_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 P_2}\|, \quad (10.16)$$

ahol $\overrightarrow{P_1 A_1} \in \vec{y}_1$ és $\overrightarrow{A_2 P_2} \in \vec{y}_2$, mivel $A_1, P_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $A_2, P_2 \in \mathcal{Y}_2$. Tehát $\overrightarrow{P_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 P_2} \in \vec{\mathcal{S}}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$, így létezik $Q \in \mathcal{S}_2$ úgy, hogy $\overrightarrow{A_2 Q} = \overrightarrow{P_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 P_2}$.

Összegezve, a (10.16) alapján bármely $P_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $P_2 \in \mathcal{Y}_2$ pontokra létezik $Q \in \mathcal{S}_2$ úgy, hogy

$$\delta(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{P_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 P_2}\| = \|\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 Q}\| = \|\overrightarrow{A_1 Q}\| = \delta(A_1, Q),$$

ahonnan következik, hogy

$$\{\delta(P_1, P_2) \mid P_1 \in \mathcal{Y}_1, P_2 \in \mathcal{Y}_2\} \subseteq \{\delta(A_1, Q) \mid Q \in \mathcal{S}_2\}. \quad (10.17)$$

Fordítva, ha $Q \in \mathcal{S}_2$, akkor $\overrightarrow{A_2 Q} = u_1 + u_2 \in \vec{\mathcal{S}}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$, ahol $u_1 \in \vec{y}_1$ és $u_2 \in \vec{y}_2$. Ekkor kell léteznie $P_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $P_2 \in \mathcal{Y}_2$ pontoknak úgy, hogy $\overrightarrow{P_1 A_1} = u_1$ és $\overrightarrow{A_2 P_2} = u_2$. Összegezve, minden $Q \in \mathcal{S}_2$ esetén létezik olyan $P_1 \in \mathcal{Y}_1$ és $P_2 \in \mathcal{Y}_2$ úgy, hogy

$$\delta(A_1, Q) = \|\overrightarrow{A_1 Q}\| = \|\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 Q}\| = \|\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{P_1 A_1} + \overrightarrow{A_2 P_2}\| = \|\overrightarrow{P_1 P_2}\| = \delta(P_1, P_2),$$

ahonnan következik, hogy

$$\{\delta(A_1, Q) \mid Q \in \mathcal{S}_2\} \subseteq \{\delta(P_1, P_2) \mid P_1 \in \mathcal{Y}_1, P_2 \in \mathcal{Y}_2\}. \quad (10.18)$$

A (10.17) és (10.18) bennfoglalásokból következik a távolsághalmazok egyenlősége

$$\{\delta(P_1, P_2) \mid P_1 \in \mathcal{Y}_1, P_2 \in \mathcal{Y}_2\} = \{\delta(A_1, Q) \mid Q \in \mathcal{S}_2\}, \quad (10.19)$$

vagyis az \mathcal{Y}_1 és \mathcal{Y}_2 pontjait összekötő szakaszok távolságainak halmaza megegyezik az A_1 pontot az \mathcal{S}_2 résztér pontjaival összekötő szakaszok távolságainak halmazával. A (10.19) egyenlőség mindkét oldalának infimumát véve kapjuk a (10.15) egyenlőséget. \square

10.3.6. Pont és affin résztér távolságának képlete

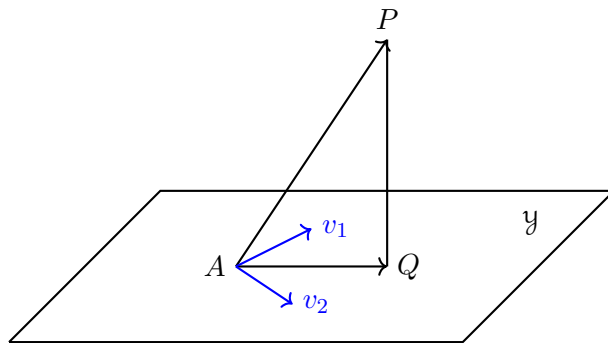
Analitikus térmértanban adatok képletet egy pont és egy egyenes, illetve egy pont és egy sík távolságára. Ezeknek a képleteknek az általánosítása a következő.

10.49. Tulajdonság (Pont és résztér távolságképlete)

Az \mathcal{X} euklideszi affin térben tekintünk egy P pontot és egy \mathcal{Y} valódi affin részteret, amelynek egy pontja A és az \vec{y} iránytérnek egy bázisa (v_1, \dots, v_k) . Ekkor a P pont távolsága az \mathcal{Y} résztértől

$$\delta(P, \mathcal{Y}) = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{AP}, v_1, \dots, v_k)}{G(v_1, \dots, v_k)}}, \quad (10.20)$$

ahol G a Gram-determináns jelöli.



10.3. ábra. Pont távolsága affin résztértől.

A bizonyítás előtt bevezetjük a következő jelölést. Minden $u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorok esetén legyen

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_q \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cdot w_1 & u_1 \cdot w_2 & \dots & u_1 \cdot w_q \\ u_2 \cdot w_1 & u_2 \cdot w_2 & \dots & u_2 \cdot w_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_p \cdot w_1 & u_p \cdot w_2 & \dots & u_p \cdot w_q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sajátosan, ezzel a jelöléssel $M(v_1, \dots, v_k) = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{bmatrix}$.

Bizonyítás. Legyen Q a P pont merőleges vetülete az \mathcal{Y} résztérre. Ekkor a 10.46. Tulajdonság alapján $\delta(P, \mathcal{Y}) = \|\vec{PQ}\|$. A 10.26. Tulajdonság bizonyítása során azt kaptuk, hogy

$$Q = A + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \iff \vec{AQ} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \quad (10.21)$$

ahol $M(v_1, \dots, v_k) \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \vec{AP} \cdot v_1 & \dots & \vec{AP} \cdot v_k \end{bmatrix}^t$ (lásd a (10.10) egyenlőséget). Innen a Cramer-szabály alapján kapjuk, hogy minden $i = 1, \dots, k$ esetén

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_{i-1} & v_1 \cdot \vec{AP} & v_1 \cdot v_{i+1} & \dots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & \dots & v_2 \cdot v_{i-1} & v_2 \cdot \vec{AP} & v_2 \cdot v_{i+1} & \dots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_{i-1} & v_k \cdot \vec{AP} & v_k \cdot v_{i+1} & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix}}{\det(M(v_1, \dots, v_k))} \\ &= \frac{\det \left(\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_{i-1} & \vec{AP} & v_{i+1} & \dots & v_k \end{bmatrix} \right)}{G(v_1, \dots, v_k)} \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\det \left(\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \vec{AP} & v_1 & \dots & \widehat{v_i} & \dots & v_k \end{bmatrix} \right)}{G(v_1, \dots, v_k)}, \end{aligned}$$

ahol a $\widehat{v_i}$ azt jelöli, hogy v_i hiányzik a felsorolásból. Végül

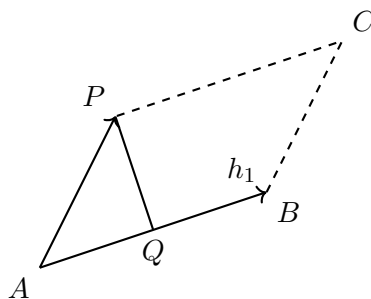
$$\begin{aligned} \|\vec{QP}\|^2 &= \vec{QP} \cdot \vec{QP} = (\vec{AP} - \vec{AQ}) \cdot \vec{QP} = \vec{AP} \cdot \vec{QP} - \vec{AQ} \cdot \vec{QP} \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \vec{AP} \cdot \vec{QP} = \vec{AP} \cdot (\vec{AP} - \vec{AQ}) = \vec{AP} \cdot \vec{AP} - \vec{AP} \cdot \vec{AQ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(10.21)}{=} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP} \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) \\
& = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{\det \left(\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_k \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{AP} & v_1 & \dots & \widehat{v_i} & \dots & v_k \end{bmatrix} \right)}{G(v_1, \dots, v_k)} \overrightarrow{AP} \cdot v_i \\
& = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_k \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \overrightarrow{AP} \cdot v_i \begin{vmatrix} v_1 \cdot \overrightarrow{AP} & v_1 \cdot v_1 & \dots & \widehat{v_1 \cdot v_i} & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot \overrightarrow{AP} & v_k \cdot v_1 & \dots & \widehat{v_k \cdot v_i} & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix}}{G(v_1, \dots, v_k)} \\
& \stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} & \overrightarrow{AP} \cdot v_1 & \dots & \overrightarrow{AP} \cdot v_k \\ v_1 \cdot \overrightarrow{AP} & v_1 \cdot v_1 & \dots & v_1 \cdot v_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_k \cdot \overrightarrow{AP} & v_k \cdot v_1 & \dots & v_k \cdot v_k \end{vmatrix}}{G(v_1, \dots, v_k)} \\
& = \frac{G(\overrightarrow{AP}, v_1, \dots, v_k)}{G(v_1, \dots, v_k)},
\end{aligned}$$

ahol a (\ddagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy $\overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{QP}$, ezért $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$; a (\ddagger) egyenlőségben pedig az $G(\overrightarrow{AP}, v_1, \dots, v_k)$ Gram-determináns első sora szerinti kifejtését használtuk. \square

10.50. Megjegyzés

A (10.20) képletnek a következő jelentése van. A számlálóban lévő $\sqrt{G(\overrightarrow{AP}, h_1, \dots, h_k)}$ kifejezés az $\overrightarrow{AP}, h_1, \dots, h_k$ vektorok által kifeszített $(k+1)$ -dimenziós paralelepipedon térfogata, aminek az egyik k -dimenziós lapja a h_1, \dots, h_k vektorok által kifeszített k -dimenziós paralelepipedon. Ez utóbbi oldal térfogata a nevezőben szereplő $\sqrt{G(h_1, \dots, h_k)}$. Ez 2-dimenzióban úgy néz ki, hogy a P pont távolsága a \mathcal{Y} egyenestől (az $APCB$ paralelogrammában az PQ magasság hossza) egyenlő az $APCB$ paralelogramma területe osztva az $|AB| = \|h_1\|$ oldalhosszal.



◇

Kiemelünk két sajátos esetet. Az első esetben külön felírjuk pont távolságát egyenestől, míg a második esetben vizsgáljuk pont távolságát hipersíktól. Ez utóbbi esetben hasonló képlet adható mint térmértanban a pont síktól való távolságának képlete.

10.3.6.1. Pont távolsága egyenestől

Az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{L} egyenes egyenlete

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}.$$

A $P(p_1, \dots, p_n)_{\mathcal{R}}$ pont távolsága az \mathcal{L} egyenestől:

$$\delta(P, \mathcal{L}) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} & \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{AP} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \end{vmatrix}}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}},$$

ahol $A(a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}$ az egyenes egy pontja és $u(u_1, \dots, u_n)_{\mathbf{B}}$ az egyenes irányvektora.

10.3.6.2. Pont távolsága hipersíktól

10.51. Tulajdonság

Azn-dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ ortonormált koordináta-rendszerében egy \mathcal{H} hipersík egyenlete $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Egy $P(p_1, \dots, p_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pont távolsága a \mathcal{H} hipersíktól

$$\delta(P, \mathcal{H}) = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Bizonyítás. Legyen $Q \in \mathcal{H}$ a P pont (merőleges) vetülete a \mathcal{H} hipersíkra és legyen $\eta_{\mathcal{H}} \in \vec{\mathcal{X}}$ a \mathcal{H} normálvektora. Ekkor $\overrightarrow{QP} \perp \vec{\mathcal{H}}$, amely egyenértékű a $\overrightarrow{QP} \parallel \eta_{\mathcal{H}}$ relációval. Tehát létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár úgy, hogy $\overrightarrow{QP} = \lambda \eta_{\mathcal{H}}$, ahonnan

$$\delta(P, \mathcal{H}) = \|\overrightarrow{QP}\| = |\lambda| \cdot \|\eta_{\mathcal{H}}\|. \quad (10.22)$$

Legyen $C(c_1, \dots, c_n)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{H}$ egy rögzített pont. Mivel $C, Q \in \mathcal{H}$, ezért $\overrightarrow{CQ} \in \vec{\mathcal{H}}$, ezért $\overrightarrow{CQ} \perp \eta_{\mathcal{H}}$, azaz $\overrightarrow{CQ} \cdot \eta_{\mathcal{H}} = 0$. Ekkor

$$\overrightarrow{CP} \cdot \eta_{\mathcal{H}} = (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QP}) \cdot \eta_{\mathcal{H}} = \overrightarrow{CQ} \cdot \eta_{\mathcal{H}} + \overrightarrow{QP} \cdot \eta_{\mathcal{H}} = \overrightarrow{QP} \cdot \eta_{\mathcal{H}} = \lambda(\eta_{\mathcal{H}} \cdot \eta_{\mathcal{H}}) = \lambda \cdot \|\eta_{\mathcal{H}}\|^2,$$

ahonnan kapjuk, hogy $\lambda = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \eta_{\mathcal{H}}}{\|\eta_{\mathcal{H}}\|^2}$. Ezt visszahelyettesítve a (10.22) összefüggésbe adódik, hogy

$$\begin{aligned} \delta(P, \mathcal{H}) &= \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \eta_{\mathcal{H}}|}{\|\eta_{\mathcal{H}}\|^2} \cdot \|\eta_{\mathcal{H}}\| = \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \eta_{\mathcal{H}}|}{\|\eta_{\mathcal{H}}\|} = \\ &= \frac{|a_1(p_1 - c_1) + \dots + a_n(p_n - c_n)|}{\|\eta_{\mathcal{H}}\|} = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + b|}{\|\eta_{\mathcal{H}}\|}, \end{aligned}$$

mivel $C \in \mathcal{H}$ miatt $b = -a_1c_1 - \dots - a_nc_n$. □

10.3.6.3. Példák

10.52. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret az standard skalárszorzattal. Számítsuk ki a $P = (-3, 7, 1, 2)$ pont távolságát az $\mathcal{V} = (-5, 6, 3, 8) + \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle$ lineáris varietástól. ◇

Megoldás. A (10.20) képletet fogjuk használni. Tekintjük az $A = (-5, 6, 3, 8)$ pontot az \mathcal{Y} lineáris varietásról, amelyre $\overrightarrow{AP} = (2, 1, -2, -6)$. Továbbá $v_1 = (1, 2, 0, -1)$ és $v_2 = (-3, 0, 2, 1)$ az $\vec{\mathcal{Y}}$ iránytér bázis vektorai. Kiszámoljuk ennek a három vektornak az egymással vett skalárszorzatait:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \overrightarrow{AP} & v_1 & v_2 \\ \hline \overrightarrow{AP} & 45 & 10 & -16 \\ v_1 & 10 & 6 & -4 \\ v_2 & -16 & -4 & 14 \end{array}$$

Ez alapján

$$G(\overrightarrow{AP}, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 45 & 10 & -16 \\ 10 & 6 & -4 \\ -16 & -4 & 14 \end{vmatrix} = 1404, \quad G(h_1, h_2) = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 14 \end{vmatrix} = 68,$$

és ahonnan

$$\delta(P, \mathcal{Y}) = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{AP}, v_1, v_2)}{G(v_1, v_2)}} = \sqrt{\frac{1404}{68}} = \sqrt{\frac{351}{17}} = 3\frac{\sqrt{39}}{17}.$$

□

10.53. Példa

Tekintsük az \mathbb{R}^4 valós vektorteret a standard skalárszorzattal. Számítsuk ki az $\mathcal{Y}_1 = (-5, 6, 3, 8) + \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle$ és $\mathcal{Y}_2 = (-3, 7, 1, 2) + \langle (1, 1, 0, 0) \rangle$ lineáris varietások távolságát! ◇

Megoldás. A 10.48. Tulajdonságot és a (10.20) képletet fogjuk használni. Vesszünk az $A_1 = (-5, 6, 3, 8)$ pontot az \mathcal{Y}_1 -ről és felírjuk az

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \mathcal{Y}_2 + \vec{\mathcal{Y}}_1 = (-3, 7, 1, 2) + \langle (1, 1, 0, 0) \rangle + \langle (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle \\ &= (-3, 7, 1, 2) + \langle (1, 1, 0, 0), (1, 2, 0, -1), (-3, 0, 2, 1) \rangle \end{aligned}$$

síkot. Ekkor a 10.48. Tulajdonság alapján $\delta(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) = \delta(A_1, \mathcal{S}_2)$. Ez utóbbi távolságot a 10.20 képlettel számoljuk ki. Legyen $A_2 = (-3, 7, 1, 2)$ pont az \mathcal{S}_2 -ről, ahonnan $\overrightarrow{A_1A_2} = (2, 1, -2, -6)$. Továbbá $h_1 = (1, 1, 0, 0)$, $h_2 = (1, 2, 0, -1)$ és $h_3 = (-3, 0, 2, 1)$ az $\vec{\mathcal{S}}_2$ iránytér bázisvektorai. Kiszámítjuk ezeknek a vektoroknak az egymással vett skalárszorzatait:

$$\begin{array}{c|cccc} \cdot & \overrightarrow{A_1A_2} & h_1 & h_2 & h_3 \\ \hline \overrightarrow{A_1A_2} & 45 & 3 & 10 & -16 \\ h_1 & 3 & 2 & 3 & -3 \\ h_2 & 10 & 3 & 6 & -4 \\ h_3 & -16 & -3 & -4 & 14 \end{array}$$

Innen felírhatjuk, hogy

$$G(\overrightarrow{A_1A_2}, h_1, h_2, h_3) = \begin{vmatrix} 45 & 3 & 10 & -16 \\ 3 & 2 & 3 & -3 \\ 10 & 3 & 6 & -4 \\ -16 & -3 & -4 & 14 \end{vmatrix} = 36, \quad G(h_1, h_2, h_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{vmatrix} = 28,$$

ahonnan

$$\delta(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) = \delta(A_1, \mathcal{S}_2) = \sqrt{\frac{G(\overrightarrow{A_1A_2}, h_1, h_2, h_3)}{G(h_1, h_2, h_3)}} = \sqrt{\frac{36}{28}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

□

11. fejezet

Izometriák és hasonlóságok

Ebben a fejezetben az euklideszi affin tér távolságmegőrző endomorfizmusairól, illetve hasonlóságairól lesz szó. Előbb átismétljük lineáris algebrából a lineáris izometria és ortogonális transzformációk fogalmát, majd igazoljuk, hogy egy n -dimenziós euklideszi vektortér minden ortogonális transzformációja felírható legfeljebb n darab $(n-1)$ dimenziós lineáris altérre való merőleges tükrözés összetételként. Ezután rátérünk euklideszi affin terek esetén az izometria értelmezésére. Megmutatjuk, hogy euklideszi affin terek között minden távolságmegőrző függvény (izometria) affin is egyben. Igazoljuk, hogy euklideszi affin terek közötti függvény pontosan akkor izometria, ha a nyoma lineáris izometria. Értelmezzük egy euklideszi affin tér izometriacsoportját, és amely felbomlik az eltolások és az iránytér ortogonális transzformációinak féldirekt összegére. Igazoljuk, hogy egy n -dimenziós euklideszi affin tér minden izometriája felbontható legfeljebb $(n+1)$ darab hipersíkra való merőleges tükrözés összetételére. Tárgyaljuk az izometriacsoport által származtatott ekvivalenciareláció és a háromszögek kongruenciája közötti kapcsolatot. Végül vizsgáljuk az euklideszi affin tér hasonlóságait is, amelyek által származtatott ekvivalenciareláció általánosítja a háromszögek hasonlóságát.

11.1. Lineáris algebrai kitérő: lineáris izometriák és ortogonális transzformációk

Legyen $(\mathcal{V}, \langle -, - \rangle_{\mathcal{V}})$ és $(\mathcal{W}, \langle -, - \rangle_{\mathcal{W}})$ két euklideszi vektortér. Az alábbi értelmezés szerint euklideszi vektorterek közötti lineáris függvény izometria, ha megőrzi a skalárszorzatot.

11.1. Értelmezés

Az $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineáris függvény *lineáris izometria*, ha minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ vektorok esetén

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}}.$$

A lineáris izometria megőrzi a vektorok hosszát. Valóban, ha $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ egy lineáris izometria, akkor

$$\|f(v)\|_{\mathcal{W}} = \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle_{\mathcal{W}}} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\mathcal{V}}} = \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (11.1)$$

Ebből következik, hogy minden lineáris izometria injektív függvény. Valóban, ha $f(v) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$, akkor $\|v\|_{\mathcal{V}} = \|f(v)\|_{\mathcal{W}} = \|\vec{0}_{\mathcal{W}}\|_{\mathcal{W}} = 0$, ahonnan kapjuk, hogy $v = \vec{0}_{\mathcal{V}}$ a norma tulajdonsága

alapján. Tehát $\ker(f) = \{\vec{0}_V\}$, ezért f injektív. Megjegyezzük, hogy minden bijektív lineáris izometria inverze is lineáris izometria.

A lineáris izometria megőrzi a vektorok szögének mértékét. Valóban, ha $f: V \rightarrow W$ egy izometria, akkor minden $v_1, v_2 \in V$ nem nullvektorok esetén

$$\frac{\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W}{\|f(v_1)\|_W \cdot \|f(v_2)\|_W} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_V}{\|v_1\|_V \cdot \|v_2\|_V},$$

ahonnan következik, hogy $m(\widehat{f(v_1)}, \widehat{f(v_2)}) = m(\widehat{v_1}, \widehat{v_2})$ a (10.13) alapján.

A következő tulajdonság azt mondja, hogy bármely két n -dimenziós euklideszi vektortér izomorf egy lineáris izometria által.

11.2. Tulajdonság

Legyen $(V, \langle -, - \rangle_V)$ és $(W, \langle -, - \rangle_W)$ két n -dimenziós euklideszi vektortér. Ekkor létezik olyan $\Phi: V \rightarrow W$ bijektív lineáris izometria.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ a V , illetve $\mathbf{B}' = (\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ a W euklideszi vektortér egy ortonormált bázisa. Ilyen bázisok léteznek az Gram-Schmidt-tétel alapján. A $\beta_i \mapsto \beta'_i$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén kiterjeszthető egy $\Phi: V \rightarrow W$, $\Phi(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n) = x_1\beta'_1 + \dots + x_n\beta'_n$ lineáris függvényre. Ez a függvény lineáris izometria, mert minden $x = x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n \in V$ és $y = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n \in V$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_W &= \langle x_1\beta'_1 + \dots + x_n\beta'_n, y_1\beta'_1 + \dots + y_n\beta'_n \rangle_W \\ &\stackrel{(9.9)}{=} x_1y_1 + \dots + x_ny_n \\ &\stackrel{(9.9)}{=} \langle x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n \rangle_V \\ &= \langle x, y \rangle_V \end{aligned}$$

Mivel Φ izometria, ezért injektív, továbbá V és W azonos dimenziós véges vektorterek, ezért a Φ lineáris izometria egyben izomorfizmus. \square

11.3. Következmény

Bármely n -dimenziós V euklideszi vektortér izomorf az \mathbb{R}^n euklideszi vektortérrel (a standard skalárszorzatot tekintve rajta) egy lineáris izometria által.

11.1.1. Ortogonális transzformációk

Legyen (V, \cdot) egy n -dimenziós euklideszi vektortér. Vizsgáljuk a V vektortér azon endomorfizmusait, amelyek lineáris izometriák.

11.4. Értelmezés

Egy $f \in \text{End}(V)$ endomorfizmus *ortogonális transzformáció*, ha f lineáris izometria. A V euklideszi vektortér ortogonális transzformációinak halmazát $O(V)$ -vel jelöljük.

Minden f ortogonális transzformáció bijektív. Valóban, korábban beláttuk, hogy minden izometria injektív, továbbá minden injektív lineáris endomorfizmus izomorfizmus. Mivel izometriák összetétele is izometria, ezért egy V euklideszi vektortér ortogonális transzformációi az összetétellel csoportot alkotnak, tehát $(O(V), \circ)$ az $(\text{Aut}(V), \circ)$ egy részcsoporthja.

Legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ a \mathcal{V} euklideszi vektortér egy ortonormált bázisa. Az $f \in O(\mathcal{V})$ ortogonális transzformáció $[f]_{\mathbf{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ mátrixa ortogonális, azaz $[f]_{\mathbf{B}}^t [f]_{\mathbf{B}} = I_n$. Valóban,

$$\begin{aligned}
 [f]_{\mathbf{B}}^t [f]_{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}} & \dots & [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}} & \dots & [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}}^t [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}} & \dots & [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}}^t [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}} \\ [f(\beta_2)]_{\mathbf{B}}^t [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}} & \dots & [f(\beta_2)]_{\mathbf{B}}^t [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}} \\ \vdots & & \vdots \\ [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}}^t [f(\beta_1)]_{\mathbf{B}} & \dots & [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}}^t [f(\beta_n)]_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{(9.9)}{=} \begin{bmatrix} f(\beta_1) \cdot f(\beta_1) & f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) & \dots & f(\beta_1) \cdot f(\beta_n) \\ f(\beta_2) \cdot f(\beta_1) & f(\beta_2) \cdot f(\beta_2) & \dots & f(\beta_2) \cdot f(\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\beta_n) \cdot f(\beta_1) & f(\beta_n) \cdot f(\beta_2) & \dots & f(\beta_n) \cdot f(\beta_n) \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{(\dagger)}{=} \begin{bmatrix} \beta_1 \cdot \beta_1 & \beta_1 \cdot \beta_2 & \dots & \beta_1 \cdot \beta_n \\ \beta_2 \cdot \beta_1 & \beta_2 \cdot \beta_2 & \dots & \beta_2 \cdot \beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n \cdot \beta_1 & \beta_n \cdot \beta_2 & \dots & \beta_n \cdot \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= I_n,
 \end{aligned}$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy f izometria.

11.5. Tulajdonság

Ha \mathcal{U} az n -dimenziós \mathcal{V} euklideszi vektortér egy $(n-1)$ -dimenziós lineáris altere, akkor az \mathcal{U} lineáris altérre való $s_{\mathcal{U}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ merőleges tükrözés egy ortogonális transzformáció.

Bizonyítás. Legyen \mathbf{B} egy ortonormált bázisa a \mathcal{V} euklideszi vektortérnek és legyen $v \in \mathcal{V}$ egy nemnulla vektor úgy, hogy $v^\perp = \{x \in \mathcal{V} \mid x \perp v\} = \mathcal{U}$ (v az \mathcal{U} egy normálvektora). Ekkor

$$\begin{aligned}
 ([s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}})^t &= \left(I_n - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot [v]_{\mathbf{B}} \cdot ([v]_{\mathbf{B}})^t \right)^t \\
 &= (I_n)^t - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot (([v]_{\mathbf{B}})^t)^t \cdot ([v]_{\mathbf{B}})^t \\
 &= I_n - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot [v]_{\mathbf{B}} \cdot ([v]_{\mathbf{B}})^t \\
 &= [s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}}.
 \end{aligned}$$

Mivel $s_{\mathcal{U}}$ egy tükrözés, így $s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{U}} = 1_{\mathcal{V}}$, ezért

$$([s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}})^t \cdot [s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}} = [s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}} \cdot ([s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}})^t = [s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}} \cdot [s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}} = [s_{\mathcal{U}} \circ s_{\mathcal{U}}]_{\mathbf{B}} = [1_{\mathcal{V}}]_{\mathbf{B}} = I_n.$$

□

11.6. Megjegyzés

Egy valódi lineáris altérre való merőleges vetítés nem ortogonális transzformáció, mivel nem injektív. ◇

11.1.1.1. Ortogonális transzformációk felbontása merőleges tükrözések összetételére

11.7. Tétel (Cartan-Dieudonné)

Ha (\mathcal{V}, \cdot) egy n -dimenziós euklideszi vektortér, akkor minden ortogonális transzformációja felírható legfeljebb n darab hiperaltérre $((n-1)$ -dimenziós lineáris altérre) való merőleges tükrözés összetételéeként.

Bizonyítás. A bizonyításban a Householder-algoritmust fogjuk használni, amely egyben meg is mutatja, hogyan lehet felbontani egy ortogonális transzformációt hiperaltérre való merőleges tükrözések összetételére.

Legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ a \mathcal{V} euklideszi vektortér egy ortonormált bázisa. Ha $f(\beta_1) \neq \beta_1$, akkor legyen $w_1 = \frac{f(\beta_1) - \beta_1}{2} \in \mathcal{V}$ és $s_1 = s_{w_1^\perp}$ a $w_1^\perp = \{v \in \mathcal{V} \mid v \perp w_1\}$ hiperaltérre való merőleges tükrözés, különben legyen $s_1 = 1_{\mathcal{V}}$. Belátjuk, hogy az s_1 tükrözés az $f(\beta_1)$ vektort a β_1 vektorban képezi, és fordítva. Az s_1 tükrözés a w_1 vektort az ellentettjébe képezi, ezért

$$s_1(w_1) = -w_1 \iff \frac{s_1(f(\beta_1)) - s_1(\beta_1)}{2} = \frac{\beta_1 - f(\beta_1)}{2}. \quad (11.2)$$

Mivel f ortogonális, így

$$w_1 \cdot \frac{f(\beta_1) + \beta_1}{2} = \frac{f(\beta_1) - \beta_1}{2} \cdot \frac{f(\beta_1) + \beta_1}{2} = \frac{f(\beta_1) \cdot f(\beta_1) - \beta_1 \cdot \beta_1}{4} = 0.$$

Tehát $w_1 \perp \frac{f(\beta_1) + \beta_1}{2}$, így az s_1 tükrözés fixen hagyja az $\frac{f(\beta_1) + \beta_1}{2}$ vektort, vagyis

$$\frac{s_1(f(\beta_1)) + s_1(\beta_1)}{2} = \frac{f(\beta_1) + \beta_1}{2}. \quad (11.3)$$

A (11.2) és (11.3) összefüggéseket összeadva, illetve kivonva egymásból kapjuk, hogy $s_1(f(\beta_1)) = \beta_1$ és $s_1(\beta_1) = f(\beta_1)$. Legyen $f_2 = s_1 \circ f$, amely szintén egy ortogonális transzformáció. Ekkor $f_2(\beta_1) = s_1(f(\beta_1)) = \beta_1$, vagyis f_2 fixen hagyja a β_1 vektort.

Tegyük fel, hogy megszerkesztettünk egy $f_k \in O(\mathcal{V})$ ortogonális transzformációt, amely fixen hagyja a $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ vektorokat. Mivel f_k ortogonális transzformáció, ezért ortonormált bázist ortonormált bázisba képez, így $(f_k(\beta_1), \dots, f_k(\beta_{k-1}), f_k(\beta_k), \dots, f_k(\beta_n))$ a \mathcal{V} vektortér egy ortonormált bázisa. Sajátosan $\beta_i \perp f_k(\beta_k)$, minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén.

Ha $f_k(\beta_k) \neq \beta_k$, akkor legyen $w_k = \frac{f_k(\beta_k) - \beta_k}{2}$ és $s_k = s_{w_k^\perp}$ a $w_k^\perp = \{v \in \mathcal{V} \mid v \perp w_k\}$ hiperaltérre való merőleges tükrözés, különben legyen $s_k = 1_{\mathcal{V}}$. Az s_1 tükrözéshez hasonlóan belátható, hogy s_k tükrözés az $f_k(\beta_k)$ vektort a β_k vektorba képezi, és fordítva, így $f_{k+1} = s_k \circ f_k$ a β_k vektort fixen hagyja, vagyis $f_k(\beta_k) = \beta_k$. Mivel $\beta_i \perp \beta_k$ és $f(\beta_i) \perp f(\beta_k)$, ezért $\beta_i \perp w_k$, minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén. Így s_k és f_k is fixen hagyják a β_1, \dots, β_k vektorokat. Tehát megszerkesztettük az $f_{k+1} \in O(\mathcal{V})$ ortogonális transzformációt, amely a β_1, \dots, β_k bázisvektorokat fixen hagyja.

Ezt az eljárást folytatva hiperaltérre való tükrözések segítségével megszerkeszthető az $f_{n+1} \in O(\mathcal{V})$ transzformáció, amely a \mathbf{B} bázis vektorait fixen hagyja, ezért $f_{n+1} = 1_{\mathcal{V}}$. Tehát léteznek s_1, \dots, s_n tükrözések vagy identikus függvények úgy, hogy $1_{\mathcal{V}} = f_{n+1} = s_n \circ \dots \circ s_1 \circ f$, ahonnan $f = s_1 \circ \dots \circ s_n$, mivel $s_i \circ s_i = 1_{\mathcal{V}}$, minden $i = 1, \dots, n$ esetén. \square

11.8. Példa

Legyen $f \in \text{End}(\mathcal{V})$ lineáris endomorfizmus, amelynek mátrixa egy $\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ortonormált

bázisban

$$[f]_{\mathbf{B}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \\ 1 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Az f endomorfizmus ortogonális, mivel ortonormált bázisbeli mátrixa ortogonális: $[f]_{\mathbf{B}}[f]_{\mathbf{B}}^t = I_3$.

A 11.7. Tétel algoritmus szerint az első vektor és normájának négyzete:

$$[w_1]_{\mathbf{B}} = \frac{[f(\beta_1)]_{\mathbf{B}} - [\beta_1]_{\mathbf{B}}}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = \frac{1}{18}.$$

A w_1^\perp altérre való tükrözés mátrixa:

$$\begin{aligned} [s_1]_{\mathbf{B}} &= I_3 - \frac{2}{\|w_1\|^2} [w_1]_{\mathbf{B}} [w_1]_{\mathbf{B}}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{36}{18^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $f_2 = s_1 \circ f$ ortogonális transzformáció mátrixa:

$$[f_2]_{\mathbf{B}} = [s_1]_{\mathbf{B}} [f]_{\mathbf{B}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \\ 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az algoritmus következő lépésében a második vektor és normájának négyzete:

$$[w_2]_{\mathbf{B}} = \frac{[f(\beta_2)]_{\mathbf{B}} - [\beta_2]_{\mathbf{B}}}{2} = \frac{[f]_{\mathbf{B}}[\beta_2]_{\mathbf{B}} - [\beta_2]_{\mathbf{B}}}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|w_2\|^2 = \frac{1}{2}.$$

A w_2^\perp hiperaltérre való tükrözés mátrixa:

$$\begin{aligned} [s_2]_{\mathbf{B}} &= I_3 - \frac{2}{\|w_2\|^2} [w_2]_{\mathbf{B}} [w_2]_{\mathbf{B}}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $f_3 = s_2 \circ f_2$ ortogonális transzformáció mátrixa:

$$[f_3]_{\mathbf{B}} = [s_2]_{\mathbf{B}} [f_2]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az algoritmus következő lépésében a harmadik vektor és normájának négyzete:

$$[w_3]_{\mathbf{B}} = \frac{[f(\beta_3)]_{\mathbf{B}} - [\beta_3]_{\mathbf{B}}}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \|w_3\|^2 = 1.$$

A w_3^\perp hiperaltérre való tükrözés mátrixa:

$$\begin{aligned} [s_3]_{\mathbf{B}} &= I_3 - \frac{2}{\|w_3\|^2} [w_3]_{\mathbf{B}} [w_3]_{\mathbf{B}}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $f_4 = s_3 \circ f_3$ ortogonális transzformáció mátrixa:

$$[f_4]_{\mathbf{B}} = [s_3]_{\mathbf{B}} [f_3]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a megadott ortogonális transzformáció felírható $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3$ alakba, azaz

$$\begin{aligned} [f]_{\mathbf{B}} &= [s_1 \circ s_2 \circ s_3]_{\mathbf{B}} = [s_1]_{\mathbf{B}} [s_2]_{\mathbf{B}} [s_3]_{\mathbf{B}} \iff \\ \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \\ 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

11.2. Izometria euklideszi affin térek között

11.9. Értelmezés

Az \mathcal{X} és \mathcal{Y} euklideszi affin terek közötti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény *izometria*, ha megőrzi a távolságot, vagyis $\delta(f(A), f(B)) = \delta(A, B)$, minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén.

A távolság értelmezése szerint az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény pontosan akkor izometria, ha

$$\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\|_{\mathcal{W}} = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall A, B \in \mathcal{X}, \quad (11.4)$$

ahol a normák az iránytéren adott skalárszorzatok által vannak származtatva. Az értelmezés és a metrika tulajdonságai alapján következik, hogy minden izometria injektív. Valóban, ha egy f izometria esetén $f(A) = f(B)$, akkor $0 = \delta(f(A), f(B)) = \delta(A, B)$, ahonnan következik, hogy $A = B$.

Értelmezés szerint nem követeljük meg, hogy affin terek közötti izometria affin függvény legyen. A következő tételben azt látjuk be, hogy ez a tulajdonság automatikusan teljesülni fog.

11.10. Tétel (Affin terek közti izometriák affin függvények)

Az \mathcal{X} és \mathcal{Y} euklideszi affin terek közötti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ izometria affin függvény, amelynek \vec{f} nyoma egy lineáris izometria az $\vec{\mathcal{X}}$ és $\vec{\mathcal{Y}}$ euklideszi vektorterek között.

Mielőtt a tételt igazolnánk bizonyítjuk a következő sajátos esetet, amelyben azt látjuk be, hogy ha euklideszi vektorterekhez rendelt euklideszi affin terek közötti izometria a nullvektort nullvektorba képezi, akkor lineáris.

11.11. Lemma

Legyenek $(\mathcal{V}, \langle -, - \rangle_{\mathcal{V}})$ és $(\mathcal{W}, \langle -, - \rangle_{\mathcal{W}})$ euklideszi vektorterek. Ha egy $h: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ függvényre teljesül, hogy $h(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$ és

$$\|h(v_1) - h(v_2)\|_{\mathcal{W}} = \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}, \quad (11.5)$$

akkor h egy lineáris izometria.

Bizonyítás. A h függvény megőrzi a normát, mivel $v_1 = v$ és $v_2 = \vec{0}$ választás esetén a (11.5) feltétel alapján

$$\|h(v)\|_{\mathcal{W}} = \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (11.6)$$

A \mathcal{V} euklideszi vektortérren a skalárszorzat kifejezhető a norma segítségével. Minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle_{\mathcal{V}} &= \langle v_1, v_1 \rangle_{\mathcal{V}} + \langle v_2, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} - 2\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} \\ \iff \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{V}}^2 &= \|v_1\|_{\mathcal{V}}^2 + \|v_2\|_{\mathcal{V}}^2 - 2\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} \\ \iff \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} &= \frac{\|v_1\|_{\mathcal{V}}^2 + \|v_2\|_{\mathcal{V}}^2 - \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{V}}^2}{2}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Hasonlóan a \mathcal{W} euklideszi vektortérren

$$\langle h(v_1), h(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} = \frac{\|h(v_1)\|_{\mathcal{W}}^2 + \|h(v_2)\|_{\mathcal{W}}^2 - \|h(v_1) - h(v_2)\|_{\mathcal{W}}^2}{2}. \quad (11.8)$$

Felhasználva, hogy a h függvény megőrzi a normát, illetve a (11.5) feltételt, a (11.7) és (11.8) összefüggésekből következik, hogy

$$\langle h(v_1), h(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}}, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}, \quad (11.9)$$

vagyis h megőrzi a skalárszorzatot.

A h függvény additív, ha minden $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} &h(v_1 + v_2) - h(v_1) - h(v_2) = \vec{0} \\ \iff &\langle h(v_1 + v_2) - h(v_1) - h(v_2), h(v_1 + v_2) - h(v_1) - h(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} = 0 \\ \iff &\langle h(v_1 + v_2), h(v_1 + v_2) \rangle_{\mathcal{W}} + \langle h(v_1), h(v_1) \rangle_{\mathcal{W}} + \langle h(v_2), h(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} \\ &- 2\langle h(v_1 + v_2), h(v_1) \rangle_{\mathcal{W}} - 2\langle h(v_1 + v_2), h(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} + 2\langle h(v_1), h(v_2) \rangle_{\mathcal{W}} = 0 \stackrel{(11.8)}{\iff} \\ &\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle_{\mathcal{V}} + \langle v_1, v_1 \rangle_{\mathcal{V}} + \langle v_2, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} - 2\langle v_1 + v_2, v_1 \rangle_{\mathcal{V}} - 2\langle v_1 + v_2, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} + 2\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} = 0 \\ \iff &\langle v_1 + v_2 - v_1 - v_2, v_1 + v_2 - v_1 - v_2 \rangle_{\mathcal{V}} = 0, \end{aligned}$$

ami teljesül.

A h függvény homogén, ha minden $v \in \mathcal{V}$ vektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén

$$\begin{aligned} &h(\lambda v) - \lambda h(v) = \vec{0} \\ \iff &\langle h(\lambda v) - \lambda h(v), h(\lambda v) - \lambda h(v) \rangle_{\mathcal{W}} = 0 \\ \iff &\langle h(\lambda v), h(\lambda v) \rangle_{\mathcal{W}} + \lambda^2 \langle h(v), h(v) \rangle_{\mathcal{W}} - 2\lambda \langle h(\lambda v), h(v) \rangle_{\mathcal{W}} = 0 \\ \stackrel{(11.8)}{\iff} &\langle \lambda v, \lambda v \rangle_{\mathcal{V}} + \lambda^2 \langle v, v \rangle_{\mathcal{V}} - 2\lambda \langle \lambda v, v \rangle_{\mathcal{V}} = 0, \end{aligned}$$

ami teljesül.

Összegezve, a h függvény lineáris és megőrzi a skalárszorzatot, tehát lineáris izometria. \square

A 11.10. Tétel bizonyítása. Legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont. Ekkor minden $v \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorra létezik egyetlen $M \in \mathcal{X}$ pont úgy, hogy $v = \overrightarrow{OM}$. Értelmezzük az $\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$, $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ függvényt.

Az $M = O$ esetben kapjuk, hogy $\vec{f}(\vec{0}_{\mathcal{X}}) = \vec{f}(\overrightarrow{OO}) = \overrightarrow{f(O)f(O)} = \vec{0}_{\mathcal{Y}}$. Minden $v_1 = \overrightarrow{OM} \in \vec{\mathcal{X}}$ és $v_2 = \overrightarrow{ON} \in \vec{\mathcal{X}}$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(v_1) - \vec{f}(v_2)\|_{\vec{\mathcal{Y}}} &= \|\vec{f}(\overrightarrow{OM}) - \vec{f}(\overrightarrow{ON})\|_{\vec{\mathcal{Y}}} = \|\overrightarrow{f(O)f(M)} - \overrightarrow{f(O)f(N)}\|_{\vec{\mathcal{Y}}} \\ &= \|\overrightarrow{f(N)f(M)}\|_{\vec{\mathcal{Y}}} \stackrel{(\dagger)}{=} \|\overrightarrow{NM}\|_{\vec{\mathcal{X}}} = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\|_{\vec{\mathcal{X}}} \\ &= \|v_1 - v_2\|_{\vec{\mathcal{X}}}, \end{aligned}$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy f izometria. Tehát teljesülnek a 11.11. Lemma feltételei az \vec{f} függvényre, így az \vec{f} függvény lineáris izometria. Innen következik a 6.6. Lemma alapján, hogy az f függvény affin és a nyoma \vec{f} egy lineáris izometria. \square

11.12. Tulajdonság

Ha az \mathcal{X} és \mathcal{Y} euklideszi affin terek közötti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ affin függvény $\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ nyoma lineáris izometria, akkor az f függvény egy izometria.

Bizonyítás. Minden $M, N \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\delta(f(M), f(N)) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|_{\vec{\mathcal{Y}}} = \|\vec{f}(\overrightarrow{MN})\|_{\vec{\mathcal{Y}}} \stackrel{(\dagger)}{=} \|\overrightarrow{MN}\|_{\vec{\mathcal{X}}} = \delta(M, N),$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy a (11.1) alapján az \vec{f} lineáris izometria megőrzi a normát. \square

A 11.12. Tulajdonság és a 11.10. Tétel alapján kapjuk a következő jellemzést.

11.13. Következmény

Legyenek \mathcal{X} és \mathcal{Y} euklideszi affin terek. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény pontosan akkor izometria, ha az f függvény affin és nyoma $\vec{f}: \vec{\mathcal{X}} \rightarrow \vec{\mathcal{Y}}$ egy lineáris izometria.

Egy lineáris endomorfizmus pontosan akkor izometria, ha ortonormált bázisban a függvény mátrixa ortogonális, így egy affin függvény nyomának mátrixa segítségével eldönthető, hogy az affin függvény izometria-e.

11.14. Következmény

Legyen $\mathcal{X} = (O; \mathbf{B})$ a véges dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy ortonormált koordináta-rendszere. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény akkor és csakis akkor izometria, ha affin és a nyomának mátrixa a \mathbf{B} ortonormált bázisban ortogonális.

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér esetén az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ izometriát az \mathcal{X} tér *izometriájának* nevezzük. Az \mathcal{X} tér izometriáinak halmazát $\text{Izo}(\mathcal{X})$ -szel jelöljük.

11.15. Tulajdonság

Egy \mathcal{X} euklideszi tér izometriái az összetétellel csoportot alkotnak, $(\text{Izo}(\mathcal{X}), \circ)$ az $(\text{Aut}(\mathcal{X}), \circ)$ egy részcsoporthja.

Bizonyítás. Az izometriák összetétele is izometria. Valóban, ha $f, g \in \text{Izo}(\mathcal{X})$, akkor minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $\delta((f \circ g)(A), (f \circ g)(B)) = \delta(f(g(A)), f(g(B))) \stackrel{(\dagger)}{=} \delta(g(A), g(B)) \stackrel{(\ddagger)}{=} \delta(A, B)$, ahol a (\dagger) , illetve (\ddagger) egyenlőségekben felhasználtuk, hogy f , illetve g izometria.

Izometriák inverze is izometria. Legyen $f \in \text{Izo}(\mathcal{X})$ egy izometria. A 11.10. Tétel alapján f affin és a 11.12. Tulajdonság alapján az \vec{f} nyom egy lineáris izometria, ezért \vec{f} bijektív. A 6.17. Tulajdonság (iii) alpontja alapján f is bijektív. Minden $A' = f(A)$ és $B' = f(B)$ pontok esetén $\delta(A', B') = \delta(f(A), f(B)) = \delta(A, B) = \delta(f^{-1}(A'), f^{-1}(B'))$, mivel f izometria. Tehát f^{-1} is izometria. \square

Legyen $\mathcal{R} = (O; \mathbf{B})$ az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér egy ortonormált koordináta-rendszere. A 6.51. Következmény $\delta_{\mathcal{R}}: \text{Aut}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rtimes GL(\mathbb{R})$, $\delta_{\mathcal{R}}(f) = ([f(O)]_{\mathcal{R}}, [\vec{f}]_{\mathbf{B}})$ csoportizomorfizmus az $\text{Izo}(\mathcal{X})$ részcsoporthot az $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rtimes O_n(\mathbb{R})$ részcsoporthba képezi, ezért az $(\text{Izo}(\mathcal{X}), \circ)$ izometriacsoporth izomorf az $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rtimes O_n(\mathbb{R})$ féldirekt szorzattal, ahol $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$ az $(n \times n)$ -es ortogonális mátrixok csoportja.

11.16. Példa

Minden $t_v \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ transzláció izometria, mert a nyoma $\vec{t}_v = 1_{\mathcal{X}}$ egy lineáris izometria. \diamond

11.17. Példa

Az n -dimenziós \mathcal{X} euklideszi affin tér tetszőleges k -dimenziós \mathcal{Y} valódi affin részterére való $\sigma_{\mathcal{Y}}$ mérőleges tükrözés izometria. Valóban, ha $\mathcal{R} = (O; \beta_1, \dots, \beta_n)$ egy olyan ortonormált koordináta-rendszer, hogy $O \in \mathcal{Y}$ és $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ az $\vec{\mathcal{Y}}$ egy ortonormált bázisa, akkor a $\sigma_{\mathcal{Y}}$ egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$[\sigma_{\mathcal{Y}}(P)]_{\mathcal{R}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}}_{[\vec{\sigma}_{\mathcal{Y}}]_{\mathbf{B}}} [P]_{\mathcal{R}},$$

ahol a főátlón k darab 1-es és $(n - k)$ darab (-1) -es szerepel. A nyom mátrixa a \mathbf{B} ortonormált bázisban ortogonális, ezért a 11.14. Következmény alapján $\sigma_{\mathcal{Y}}$ izometria. \diamond

11.2.1. Izometriák felbontása tükrözések összetételére

11.18. Tétel

Legyen \mathcal{X} egy n -dimenziós euklideszi affin tér. Minden $f \in \text{Izo}(\mathcal{X})$ izometria felbontható legfeljebb $(n + 1)$ darab hipersíkra való tükrözés összetételként.

Bizonyítás. Ha az f leképezésnek van egy $O \in \mathcal{X}$ fixpontja, vagyis $f(O) = O$, akkor tekintjük az \mathcal{X} affin tér O pontban vett $T_O\mathcal{X}$ érintőterét. A 6.9. Tulajdonság alapján az f függvény származtat egy $T_O f: T_O\mathcal{X} \rightarrow T_O\mathcal{X}$, $T_O f(A) = A$ lineáris függvényt. Tehát az f függvény tekinthető a $T_O\mathcal{X}$ vektortér egy lineáris endomorfizmusának.

Tekintjük a $T_O\mathcal{X}$ vektortéren a $\varphi(O, -): T_O\mathcal{X} \rightarrow \vec{\mathcal{X}}$, $\varphi(O, -)(A) = \overrightarrow{OA}$ lineáris izomorfizmus által származtatott skalárszorzatot: $\langle A, B \rangle_{T_O\mathcal{X}} = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle_{\vec{\mathcal{X}}}$, minden $A, B \in T_O\mathcal{X}$ esetén. Ekkor

az $A \in T_O\mathcal{X}$ normája $\|A\| = \|\overrightarrow{OA}\| = \delta(O, A)$, továbbá minden $A \in T_O\mathcal{X}$ esetén

$$\|T_O f(A)\| = \|f(A)\| = \delta(O, f(A)) = \delta(f(O), f(A)) = \delta(O, A) = \|A\|.$$

Tehát a $T_O f$ lineáris függvény megőrzi a normát, ezért a 11.11. Lemma alapján megőrzi a skálárszorzatot is, így $T_O f$ a $T_O\mathcal{X}$ érintőtér egy ortogonális transzformációja. A 11.7. Tétel alapján $T_O f$ felbontható legfeljebb n darab hiperaltérre való tükrözés összetételére. A $T_O\mathcal{X}$ érintőtér hiperalterei $(n-1)$ -dimenziós lineáris alterek, amelyek a 3.14. Tulajdonság alapján az \mathcal{X} affin tér O ponton átmenő hipersíkjainak felelnek meg. Összegezve, ha az f izometriának van fixpontja, akkor felbontható legfeljebb n darab hipersíkra való tükrözés összetételeként.

Ha az f izometriának nincs fixpontja, akkor legyen $O \in \mathcal{X}$ egy rögzített pont és legyen $P \in \mathcal{X}$ az $[Of(O)]$ szakasz felezőpontja, vagyis $P = \frac{1}{2}(O + f(O))$.

Legyen \mathcal{Z} a P ponton átmenő és a $v = \overrightarrow{Of(O)}$ vektorra merőleges hipersík, vagyis $P \in \mathcal{Z}$ és $\vec{\mathcal{Z}} = v^\perp = \{w \in \vec{\mathcal{X}} \mid w \perp v\}$, illetve legyen $\sigma_{\mathcal{Z}}$ a \mathcal{Z} hipersíkra való merőleges tükrözés. Ekkor $\sigma_{\mathcal{Z}}(f(O)) = O$, tehát a $g = \sigma_{\mathcal{Z}} \circ f$ izometriának O a fixpontja, így felbontható legfeljebb n darab hipersíkra való tükrözés összetételeként. Végül $f = \sigma_{\mathcal{Z}}^2 \circ f = \sigma_{\mathcal{Z}} \circ g$ felbontható legfeljebb $(n+1)$ darab hipersíkra való tükrözés összetételeként. \square

11.19. Példa

Minden t_v , $v \neq \vec{0}$ eltolás felbontható két \mathcal{H}_1 és \mathcal{H}_2 hipersíkra való tükrözés összetételére, ahol $\vec{\mathcal{H}}_1 = \vec{\mathcal{H}}_2 = v^\perp$ és $\mathcal{H}_2 = t_{v/2}(\mathcal{H}_1)$. \diamond

11.20. Példa

A síkban egy O pont körül, θ szöggel való forgatás felírható két egyenesre való tükrözés összetételeként, ha a két egyenes az O pontban metszi egymást és az általuk bezárt szög $\frac{\theta}{2}$. \diamond

11.2.2. Irányításmegőrző izometriák

Egy cukrász kérésre egy háromszög alakú tortát készített, melynek oldalai $a > b > c > 0$ hosszúságúak voltak. Mivel nem volt ilyen alakú doboza, ezért telefonon rendelt egyet lediktálva a méreteket. Mire kész lett a torta arra a doboz is megérkezett. Bár a doboz méretei megegyeztek a tortáéval, de csodálkozva vette észre, hogy mégsem tudja beletenni a tortát. Ahhoz, hogy beletegye a tetejével lefele kellene beletegye a tortát, ami számára nem megoldás. A cukrász azt állapította meg, hogy a doboz a tortájának tükörképe, ezért nem tudja belehelyezni a tortát.

Legyen \mathcal{X} egy n -dimenziós euklideszi tér. Az $f \in \text{Aut}(\mathcal{X})$ affinitás *megőrzi az irányítást* (vagy *irányítástartó*), ha az f nyomának $[f]_{\mathbf{B}}$ mátrixa az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér valamely \mathbf{B} bázisában pozitív determinánssal rendelkezik. Ha egy affinitás nem őrz meg az irányítást, vagyis nyoma mátrixának determinánsa egy bázisban negatív, akkor *irányításváltónak* nevezzük.

Ha az $f \in \text{Izo}(\mathcal{X})$ izometria *irányításmegőrző* (vagy *irányítástartó*), akkor a nyoma mátrixának determinánsa 1 egy ortonormált bázisban, míg ha nem őrz meg az irányítást (vagyis *irányításváltó*), akkor a determináns -1 .

Az irányításmegőrző affinitások halmazát $\text{Aut}^+(\mathcal{X})$ -szel jelöljük és az $(\text{Aut}(\mathcal{X}), \circ)$ affinitás csoport egy részcsoportját alkotják. Hasonlóan, az irányításmegőrző izometriák halmazát $\text{Izo}^+(\mathcal{X})$ -szel jelöljük és az $(\text{Izo}(\mathcal{X}), \circ)$ izometriacsoport egy részcsoportját alkotják.

11.21. Példa

A hipersíkra való tükrözések irányításváltók. Valóban, ha \mathcal{H} az n -dimenziós \mathcal{X} affin tér egy

hipersíkja, akkor legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy olyan ortonormált bázisa, hogy $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ a $\vec{\mathcal{H}}$ iránytér egy bázisa. Ekkor a \mathcal{H} hipersíkra való $\sigma_{\mathcal{H}}$ tükrözés nyomának mátrixa a \mathbf{B} bázisban

$$[\vec{\sigma}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ezért $\det([\vec{\sigma}_{\mathcal{H}}]_{\mathbf{B}}) = -1$. Hasonlóan belátható, hogy ha \mathcal{Y} az \mathcal{X} affin tér páros kodimenziós affin résztere, vagyis $\text{codim } \mathcal{Y} = \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{Y}$ páros, akkor az \mathcal{Y} részterre való $\sigma_{\mathcal{Y}}$ tükrözés irányítástartó, míg $\text{codim } \mathcal{Y} = \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{Y}$ páratlan esetben irányításváltó. Sajátosan a térben síkra (1-kodimenziós) vagy pontra (3-kodimenziós) való tükrözés irányításváltó, míg egyenesre (2-kodimenziós) való tükrözés irányítástartó. A síkban egyenesre (1-kodimenziós) való tükrözés irányításváltó, míg pontra (2-kodimenziós) való tükrözés irányítástartó. \diamond

Minden $f \in \text{Izo}(\mathcal{X})$ izometria felbontható legfeljebb $1 + \dim \mathcal{X}$ számú hipersík szerinti tükrözés összetételére. Ezek közül azok lesznek irányítástartók, amelyek páros számú hipersíkra való tükrözésre bonthatók fel, illetve azok lesznek irányításváltók, amelyek páratlan számúra. A síkban a pont körüli forgatások és az eltolások irányítástartó izometriák.

11.2.3. Izometria és kongruencia kapcsolata

Legyen \mathcal{S} egy 2-dimenziós euklideszi affin tér. Az \mathcal{S} síkban három nem kollineáris pont háromszöget alkot. Azt mondjuk, hogy az \mathcal{S} sík ABC és $A'B'C'$ háromszögei *kongruensek* (*egybevágóak*), ha a megfelelő oldalak egyenlő hosszúak, $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|CA| = |C'A'|$.

11.22. Tulajdonság

Az \mathcal{S} sík ABC és $A'B'C'$ háromszögei akkor és csakis akkor kongruensek, ha létezik egyetlen $f \in \text{Izo}(\mathcal{S})$ izometria úgy, hogy $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ és $f(C) = C'$.

11.23. Lemma

Legyen $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ a \mathcal{V} euklideszi vektortér egy bázisa és legyen $h \in \text{End}(\mathcal{V})$ lineáris endomorfizmus. Ha $\|h(\beta_i)\| = \|\beta_i\|$ és $\|h(\beta_i - \beta_j)\| = \|\beta_i - \beta_j\|$, minden $i, j = 1, \dots, n$ esetén, akkor h egy ortogonális transzformáció, vagyis $h \in O(\mathcal{V})$.

Bizonyítás. A h linearitása és a feltevés alapján minden $i, j = 1, \dots, n$ esetén

$$\|h(\beta_i) - h(\beta_j)\| = \|h(\beta_i - \beta_j)\| = \|\beta_i - \beta_j\|. \quad (11.10)$$

Minden $1 \leq i \neq j \leq n$ esetén

$$\beta_i \cdot \beta_j = \frac{\|\beta_i\|^2 + \|\beta_j\|^2 - \|\beta_i - \beta_j\|^2}{2} \stackrel{(11.10)}{=} \frac{\|h(\beta_i)\|^2 + \|h(\beta_j)\|^2 - \|h(\beta_i) - h(\beta_j)\|^2}{2} = h(\beta_i) \cdot h(\beta_j),$$

tehát a h megőrzi a bázisvektorok skalárszorzatát. Legyen $v = \sum_{i=1}^n v_i \beta_i$ és $w = \sum_{j=1}^n w_j \beta_j$ a \mathcal{V} vektortér két tetszőleges vektorra. Ekkor

$$h(v) \cdot h(w) = h\left(\sum_{i=1}^n v_i \beta_i\right) \cdot h\left(\sum_{j=1}^n w_j \beta_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n v_i h(\beta_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j h(\beta_j)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^n v_i w_j h(\beta_i) \cdot h(\beta_j) \stackrel{(11.10)}{=} \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \beta_i \cdot \beta_j = \left(\sum_{i=1}^n v_i \beta_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_j \beta_j \right) \\
&= v \cdot w.
\end{aligned}$$

Tehát h egy ortogonális transzformáció. \square

11.24. Lemma

Legyen $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ az \mathcal{X} euklideszi affin tér egy affin koordináta-rendszere. Ha $f \in \text{End}(\mathcal{X})$ egy olyan affin endomorfizmus, amely megőrzi az A_i és A_j pontok távolságát, minden $i, j = 1, \dots, n$ esetén, akkor f egy izometria.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ az \mathcal{X} tér egy affin koordináta-rendszere, ezért a 4.18. Tulajdonság alapján $\mathbf{B} = (\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$ az $\vec{\mathcal{X}}$ iránytér egy bázisa. Mivel f megőrzi az affin koordináta-rendszer pontjainak távolságát, ezért minden $i, j = 0, \dots, n$ esetén

$$\|\vec{f}(\overrightarrow{A_i A_j})\| = \|\overrightarrow{f(A_i) f(A_j)}\| = \delta(f(A_i), f(A_j)) = \delta(A_i, A_j) = \|\overrightarrow{A_i A_j}\|.$$

Innen kapjuk, hogy ha $i = 0$ és $1 \leq j \leq n$, akkor

$$\|\vec{f}(\overrightarrow{A_0 A_j})\| = \|\overrightarrow{A_0 A_j}\|, \quad (11.11)$$

illetve ha $1 \leq i, j \leq n$, akkor

$$\|\vec{f}(\overrightarrow{A_0 A_j} - \overrightarrow{A_0 A_i})\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{A_i A_j})\| = \|\overrightarrow{A_i A_j}\| = \|\overrightarrow{A_0 A_j} - \overrightarrow{A_0 A_i}\|. \quad (11.12)$$

A (11.11) és (11.12) alapján az \vec{f} nyom megőrzi a \mathbf{B} bázis vektorainak, illetve különbségeiknek a hosszát, ezért a 11.23. Lemma alapján $\vec{f} \in O(\vec{\mathcal{X}})$ egy ortogonális transzformáció, így a 11.13. Következmény alapján az f függvény izometria. \square

A 11.22. Tulajdonság bizonyítása.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy a két háromszög kongruens. Az A, B, C három nem kollineáris pont az \mathcal{S} sík egy $\mathcal{A} = (A, B, C)$ affin koordináta-rendszerét alkotják, és a 6.14. Tulajdonság alapján létezik egyetlen $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ affin függvény úgy, hogy $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ és $f(C) = C'$. A feltevés szerint az f függvény megőrzi az A, B, C pontok közti távolságot, ezért a 11.24. Lemma alapján izometria.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy az f egy olyan izometria, amelyre $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ és $f(C) = C'$. Az f megőrzi a távolságot, ezért $|AB| = \delta(A, B) = \delta(f(A), f(B)) = \delta(A', B') = |A'B'|$. Hasonlóan belátható, hogy $|AC| = |A'C'|$ és $|BC| = |B'C'|$. Tehát az ABC és $A'B'C'$ háromszögek kongruensek. \square

Az izometriák $(\text{Izo}(\mathcal{S}), \circ)$ csoportja hat az \mathcal{S} sík pontjain az 1.9. Példában tekintett csoport-hatás által. Ez a hatás az $(\text{Izo}(\mathcal{S}), \circ)$ csoport egy hatását származtatja az \mathcal{S} sík háromszögein (lásd az 1.22., illetve 1.23. Példákat). A 11.22. Tulajdonság szerint ezen csoporthatás által származtatott ekvivalenciareláció a háromszögek halmazán megegyezik a kongruenciarelációval.

Az izometriák csoportjának hatása a síkon származtat egy csoporthatást a sík nemüres részhalmazain is (lásd az 1.2.1.4. alfejezetet). Ezen hatás által származtatott ekvivalenciareláció

lehetővé teszi, hogy a sík más alakzatainak kongruenciáját is értelmezzük. Az izometria csoport segítségével egy euklideszi affin tér nemüres részhalmazainak kongruenciája a következőképpen értelmezhető.

11.25. Értelmezés

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér \mathcal{P} és \mathcal{Q} nemüres részhalmazai *kongruensek*, ha létezik $f \in \text{Izo}(\mathcal{X})$ izometria úgy, hogy $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.

Az így értelmezett reláció egy ekvivalenciareláció és általánosítja a háromszögek kongruenciáját euklideszi affin terek nemüres részhalmazaira. Ez lehetővé teszi, hogy síkban például értelmezzük görbék kongruenciáját, vagy térben testek kongruenciáját.

A cukrász számára lényegesebb fogalom az irányítástartó kongruencia, amely a következőképpen értelmezhető.

11.26. Értelmezés

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér \mathcal{P} és \mathcal{Q} nemüres részhalmazai *irányítástartóan kongruensek*, ha létezik $f \in \text{Izo}^+(\mathcal{X})$ irányítástartó izometria úgy, hogy $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.

Ahhoz, hogy a cukrász a dobozba be tudja tenni a tortát, a doboz a tortával irányítástartóan kongruens kell legyen. A síkban az irányítástartó izometriák a forgatások és eltolások, és amelyek megvalósíthatók folytonos mozgásként. Így a cukrász beletudja forgatni és csúsztani a tortát a dobozba anélkül, hogy felemelné azt az asztalról.

11.3. Hasonlóságok

11.27. Értelmezés

Az \mathcal{X} és \mathcal{Y} euklideszi affin terek közötti $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény egy *k-arányú hasonlóság*, ahol $k > 0$, ha minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $\delta(f(A), f(B)) = k \cdot \delta(A, B)$. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény egy *hasonlóság*, ha létezik $k > 0$ úgy, hogy f egy *k-arányú hasonlóság*.

A távolság értelmezése szerint az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény pontosan akkor *k-arányú hasonlóság*, ha

$$\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = k \cdot \|\overrightarrow{AB}\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{X}, \quad (11.13)$$

ahol a normák az iránytéren adott skalárszorzatok által vannak származtatva. Az értelmezés és a metrika tulajdonságai alapján következik, hogy minden f hasonlóság injektív. Valóban, ha f egy *k-arányú hasonlóság*, amelyre $f(A) = f(B)$, akkor $0 = \delta(f(A), f(B)) = k \cdot \delta(A, B)$, ahonnan következik, hogy $A = B$.

11.28. Lemma

Legyen O az \mathcal{X} euklideszi affin tér egy rögzített pontja és $k > 0$ egy tetszőleges szám. Ekkor minden $h \in \text{End}(\mathcal{X})$ *k-arányú*, O középpontú homotétia egy *k-arányú hasonlóság*.

Bizonyítás. Mivel h egy *k-arányú*, O középpontú homotétia, ezért minden $A \in \mathcal{X}$ pont esetén $\overrightarrow{Oh(A)} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. Tehát minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{Oh(B)} - \overrightarrow{Oh(A)} = k \cdot \overrightarrow{OB} - k \cdot \overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Innen adódik, hogy minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $\|\overrightarrow{h(A)h(B)}\| = \|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = k \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$, mivel $k > 0$. \square

Az izometriák és hasonlóságok között a következő kapcsolat áll fenn.

11.29. Lemma

Legyen $k > 0$ egy rögzített szám és $h \in \mathcal{E}nd(\mathcal{Y})$ egy k -arányú, $O \in \mathcal{Y}$ középpontú homotétia. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény egy k -arányú hasonlóság akkor és csakis akkor, ha létezik $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ izometria úgy, hogy $f = h \circ g$.

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy f egy k -arányú hasonlóság és legyen $g = h^{-1} \circ f$. Ekkor h^{-1} egy (k^{-1}) -arányú, O középpontú homotétia, így minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{(h^{-1} \circ f)(A)(h^{-1} \circ f)(B)}\| &= \|\overrightarrow{(h^{-1}(f(A))h^{-1}(f(B)))}\| = \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} k^{-1} \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| \stackrel{(\ddagger)}{=} k^{-1} k \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|, \end{aligned}$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy a 11.28. Lemma alapján h^{-1} egy (k^{-1}) -arányú hasonlóság, és a (\ddagger) egyenlőségben pedig, hogy f egy k -arányú hasonlóság. Tehát g egy izometria.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy létezik $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ izometria úgy, hogy $f = h \circ g$. Ekkor minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\|\overrightarrow{(h \circ g)(A)(h \circ g)(B)}\| = \|\overrightarrow{(h(g(A))h(g(B)))}\| \stackrel{(\dagger)}{=} k \cdot \|\overrightarrow{g(A)g(B)}\| \stackrel{(\ddagger)}{=} k \cdot \|\overrightarrow{AB}\|,$$

ahol a (\dagger) egyenlőségben felhasználtuk, hogy a 11.28. Lemma alapján h egy k -arányú hasonlóság, és a (\ddagger) egyenlőségben pedig, hogy g egy izometria. Tehát f egy k -arányú hasonlóság. \square

Hasonlóan igazolható a következő lemma is.

11.30. Lemma

Legyen $k > 0$ egy rögzített szám és $h \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy k -arányú, $O \in \mathcal{X}$ középpontú homotétia. Az $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ függvény egy k -arányú hasonlóság akkor és csakis akkor, ha létezik $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ izometria úgy, hogy $f = g \circ h$.

11.31. Következmény

Az \mathcal{X} és \mathcal{Y} euklideszi affin terek esetén minden $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ hasonlóság affin függvény.

Bizonyítás. A 11.29. Lemma alapján f felírható egy izometria és egy homotétia összetételeként, tehát felírható két affin függvény összetételeként, ezért affin. \square

11.32. Lemma

Ha $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy k -arányú hasonlóság és $g \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy l -arányú hasonlóság, akkor $g \circ f$ egy $(k \cdot l)$ -arányú hasonlóság. Sajátosan egy k - és egy (k^{-1}) -arányú hasonlóság összetétel egy izometria.

Bizonyítás. Minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén

$$\|\overrightarrow{(g \circ f)(A)(g \circ f)(B)}\| = \|\overrightarrow{g(f(A))g(f(B))}\| = l \cdot \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = l \cdot k \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = (l \cdot k) \cdot \|\overrightarrow{AB}\|,$$

tehát $g \circ f$ egy $(k \cdot l)$ -arányú hasonlóság.

Ha $l = k^{-1}$, akkor minden $A, B \in \mathcal{X}$ pontok esetén $\|\overrightarrow{(g \circ f)(A)(g \circ f)(B)}\| = (k \cdot k^{-1}) \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, tehát $g \circ f$ egy izometria. \square

11.33. Lemma

Ha $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ egy k -arányú hasonlóság, akkor f bijektív és f^{-1} egy (k^{-1}) -arányú hasonlóság.

Bizonyítás. A 11.29. Lemma alapján f felírható egy k -arányú, O középpontú $h \in \mathcal{A}ut(\mathcal{X})$ homotétia és $g \in \mathcal{A}ut(\mathcal{X})$ izometria összetételeként, $f = h \circ g$. Tehát f két affinitás összetétele, ezért affinitás, sajátosan bijektív. Továbbá $f^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$, tehát f^{-1} felírható egy g^{-1} izometria és egy (k^{-1}) -arányú homotétia összetételeként, ezért a 11.30. Lemma alapján f^{-1} egy (k^{-1}) -arányú hasonlóság. \square

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér esetén az $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{X})$ hasonlóságot az \mathcal{X} tér hasonlóságának nevezzük és az \mathcal{X} tér hasonlóságainak halmazát $\text{Has}(\mathcal{X})$ -szel jelöljük. A 11.32. és 11.33. Lemmák alapján adódik a következő tulajdonság.

11.34. Tulajdonság

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér hasonlóságai csoportot alkotnak az összetétellel. Az $(\text{Izo}(\mathcal{X}), \circ)$ izometriacsoport részcsoportja a $(\text{Has}(\mathcal{X}), \circ)$ csoportnak.

11.3.1. Hasonlóságok kapcsolata a hasonlósági relációval

Legyen \mathcal{S} egy 2-dimenziós euklideszi affin tér. Azt mondjuk, hogy az \mathcal{S} sík ABC és $A'B'C'$ háromszögei hasonlóak, ha a megfelelő oldalak arányosak,

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}.$$

11.35. Tulajdonság

Az \mathcal{S} sík ABC és $A'B'C'$ háromszögei akkor és csakis akkor hasonlóak, ha létezik egy $f \in \text{End}(\mathcal{S})$ hasonlóság úgy, hogy $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ és $f(C) = C'$.

Bizonyítás.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóak. Ekkor

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k > 0,$$

ahonnan $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$, $|C'A'| = k|CA|$. Legyen h egy (k^{-1}) -arányú és $O \in \mathcal{S}$ középpontú hasonlóság és legyenek $A'' = h(A')$, $B'' = g(B')$, $C'' = g(C')$. Mivel h egy (k^{-1}) -arányú hasonlóság, ezért $|A''B''| = k^{-1} \cdot |A'B'| = |AB|$ és hasonlóan $|B''C''| = |BC|$, $|C''A''| = |CA|$. Tehát a $h \circ g$ affin függvény az ABC háromszög csúcsait a vele kongruens $A''B''C''$ háromszög csúcsaiba képezi, így a 11.22. Tulajdonság alapján $h \circ g$ egy izometria és $f = h^{-1} \circ g$ egy k -arányú hasonlóság.

\Rightarrow Legyen $f \in \mathcal{E}nd(\mathcal{S})$ egy k -arányú hasonlóság úgy, hogy $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Ekkor

$$|A'B'| = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = k \cdot \|\overrightarrow{AB}\| = k \cdot |AB|,$$

hasonlóan $|B'C'| = k \cdot |BC|$ és $|C'A'| = k \cdot |CA|$. Tehát

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k,$$

ezért az ABC háromszög hasonló az $A'B'C'$ háromszöggel.

□

A hasonlóságok $(\text{Has}(\mathcal{S}), \circ)$ csoportja hat az \mathcal{S} sík pontjain az 1.9. Példában tekintett csoport-hatás által. Ez a hatás a $(\text{Has}(\mathcal{S}), \circ)$ csoport egy hatását származtatja az \mathcal{S} sík háromszögein. A 11.35. Tulajdonság szerint ezen csoporthatás által származtatott ekvivalenciareláció a háromszögek halmazán megegyezik a hasonlósági relációval.

A hasonlóságok csoportjának hatása a síkon származtat egy csoporthatást a sík nemüres részhalmazain is (lásd az 1.2.1.4. alfejezetet). Ezen hatás által származtatott ekvivalenciareláció lehetővé teszi, hogy a sík más alakzatainak kongruenciáját is értelmezzük. A hasonlóságcsoporthoz segítségével egy euklideszi affin tér nemüres részhalmazainak hasonlósága a következőképpen értelmezhető.

11.36. Értelmezés

Egy \mathcal{X} euklideszi affin tér \mathcal{P} és \mathcal{Q} nemüres részhalmazai *hasonlóak*, ha létezik $f \in \text{Has}(\mathcal{X})$ hasonlóság úgy, hogy $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$.

Az így értelmezett reláció egy ekvivalenciareláció és általánosítja a háromszögek hasonlósági relációját euklideszi affin terek nemüres részhalmazaira. Ez lehetővé teszi, hogy síkban például értelmezzük görbék hasonlóságát, vagy térben testek hasonlóságát.

12. fejezet

Másodrendű síkgörbék kanonikus alakra hozása

Ebben a fejezetben másodrendű síkgörbékkel fogunk foglalkozni. Ezek olyan görbék, amelyek kétváltozós polinomiális egyenlettel írhatók le. A célunk osztályozni ezeket a görbéket kongruencia erejéig. A görbék, mint ponthalmazok osztályozása helyett az őket leíró egyenleteket osztályozzuk azáltal, hogy megkeressük azt az ortonormált koordináta-rendszert, amelyben az egyenlet a legegyszerűbb alakú. Ezt a koordináta-rendszerek forgatásával és eltolásával érjük el. Keresünk olyan invariánsokat, amelyeket az másodrendű polinomiális egyenlet együtthatóiból kiszámolhatunk és különbséget tud tenni a különböző osztályú síkgörbék között, továbbá segítségükkel felírható a síkgörbe kanonikus alakja.

12.1. Másodrendű síkgörbék

Legyen \mathcal{X} egy 2-dimenziós valós euklideszi affin tér és $\mathcal{R} = (O; i, j)$ egy ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszer az \mathcal{X} síkban.

12.1. Értelmezés

Azon $M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pontok γ halmazát, amelyek teljesítik az

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (12.1)$$

egyenletet *kúpszeletnek* nevezzük, ahol az $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ együtthatók valós számok és másodfokú tagok a_{11}, a_{12}, a_{22} együtthatói nem mind nullák.

A kúpszelet pontjai pontosan azok a pontok, amelyek koordinátái teljesítik a görbe egyenletét:

$$\gamma = \{M(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X} \mid f(x, y) = 0\}.$$

A kúpszeletek általános egyenlete átírható mátrix alakba is:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Bevezetjük az

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{bmatrix}$$

jelöléseket. Megjegyezzük, hogy az A és \bar{A} mátrixok szimmetrikus valós mátrixok.

Célunk a kúpszeletek osztályozása. Ezt olyan ortonormált koordináta-rendszer megtalálásával érjük el, amelyben a görbe egyenlete a legegyszerűbb alakú, így a kúpszelet könnyen ábrázolható, illetve különböző osztálya sorolható. Ennek a koordináta-rendszernek a megtalálására mutatunk egy algoritmust, s melyet a *kúpszeletek kanonikus alakra hozásnak* nevezünk. Az algoritmus során a koordináta-rendszereinket irányítástartó izometriák (pont körüli forgatás és eltolás összetétele) segítségével transzformáljuk. Ezzel egyenértékű az a probléma, hogy megtaláljuk az \mathcal{R} koordináta-rendszerben megadott kúpszelettel irányítástartóan kongruens kúpszeletet, amely ugyanabban a koordináta-rendszerben kanonikus alakú. Emlékeztetünk, hogy izometria olyan transzformációja a síknak, amelyek megőrzik a távolságot és szöget. Tehát az izometria nem torzítja a kúpszelet alakját.

A görbék (pontok halmaza) helyett a görbéket leíró egyenleteket osztályozzuk, hozzájuk egyszerűbb alakra. Olyan esetek is lesznek, ahol a pontok halmaza üres halmaz, mégis különböző osztályba soroljuk őket az egyenlet alakja miatt. Például képzetes ellipszis, illetve két képzetes egyenes esetén is a pontok halmaza üres halmaz.

Az osztályozás után a következő típusú kúpszeleteket kapjuk: ellipszis, hiperbola, parabola, két metsző egyenes, két párhuzamos egyenes, két egybeeső egyenes, képzetes ellipszis, két képzetes egyenes (metszetük valós pont), két párhuzamos képzetes egyenes.

Érdekelnek olyan *invariánsok*, amelyek segítségével el tudjuk dönteni, hogy melyik esettel van dolgunk a felsorolt kúpszeletek közül és amely invariánsokat kiszámíthatjuk az együttthatókból (lásd a 12.1. táblázatot) anélkül, hogy elvégeznénk a kanonikus alakra hozást.

A kúpszeleteket két családra osztjuk: centrális kúpszeletek és parabola típusú kúpszeletek. A két család esetén különböző algoritmust használunk a kanonikus alakrahozásnál. Centrális kúpszeletek esetén először eltolást, majd forgatást végzünk, míg a parabola típusú kúpszeletek esetén előbb forgatást, majd eltolást végzünk.

12.2. Kúpszelet centruma

A kúpszelet centruma a kúpszelet egy szimmetria-középpontja.

12.2. Értelmezés

Az $M_0 \in \mathcal{X}$ pont a $\gamma \neq \emptyset$ kúpszelet *centruma*, ha a γ kúpszelet szimmetrikus az M_0 pontra nézve, vagyis minden $M \in \gamma$ esetén $\sigma_{M_0}(M) = 2M_0 - M \in \gamma$.

Az $f(x, y) = 0$ egyenlettel megadott kúpszeletnek $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ a centruma, ha

$$f(x_0 + x', y_0 + y') = 0 \iff f(x_0 - x', y_0 - y') = 0$$

egyenértékűség teljesül, minden $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Lehetséges, hogy egy kúpszeletnek nincs centruma vagy akár több (végtelen sok) is van.

12.3. Példa

- (i) Az $x^2 + 2y^2 = 1$ ellipszisnek egyetlen centruma van (az $M_0(0,0)$ pont).
- (ii) Az $y^2 = 2x$ parabolának nincs centruma.
- (iii) Az $y^2 = 0$ dupla egyenesnek végtelen sok centruma van (az $M_0(x,0)$ alakú pontok, ahol $x \in \mathbb{R}$).

◇

12.4. Tulajdonság

Legyen γ az \mathcal{R} ortonormált koordináta-rendszerben a (12.1) egyenlettel megadott kúpszelet. Ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0 \end{cases}, \quad (12.2)$$

akkor az $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ pont a γ kúpszelet centruma.

Bizonyítás. Legyen $M(x, y) \in \gamma$ a kúpszelet egy tetszőleges pontja, vagyis

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Legyenek $x', y' \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f(x_0 + x', y_0 + y') &= a_{11}(x_0 + x')^2 + 2a_{12}(x_0 + x')(y_0 + y') + a_{22}(y_0 + y')^2 \\ &\quad + 2a_{10}(x_0 + x') + 2a_{20}(y_0 + y') + a_{00} \\ &= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 \\ &\quad + 2x' \underbrace{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})}_0 + 2y' \underbrace{(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})}_0 \\ &\quad + \underbrace{a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}}_{a'_{00}=f(x_0, y_0)} \\ &= a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a'_{00} \\ &= 0. \end{aligned}$$

A fenti számolásba x' , illetve y' helyett $(-x')$ -t, illetve $(-y')$ -t helyettesítve kapjuk, hogy

$$f(x_0 - x', y_0 - y') = a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a'_{00} = 0,$$

ezért a γ kúpszelet tetszőleges $M(x_0 + x', y_0 + y')_{\mathcal{R}}$ pontjának $M'(x_0 - x', y_0 - y')_{\mathcal{R}}$ szimmetrikusa is rajta van a γ kúpszeleten, tehát az $M_0(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ pont a γ kúpszelet centruma. \square

Azokat a kúpszeleteket, amelyeknek egyetlen egy szimmetria-középpontjuk van centrális kúpszeletnek fogjuk hívni. Ezekre a következő, a gyakorlatban használhatóbb értelmezést adjuk.

12.5. Értelmezés

A (12.1) egyenletű γ kúpszelet *centrális*, ha a (12.2) egyenletrendszernek egyetlen egy megoldása van, vagyis

$$\delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

12.6. Példa

Centrális kúpszeletek az ellipszis, képzetes ellipszis (pontok halmaza üres halmaz) a hiperbola, két metsző egyenes, két képzetes metsző egyenes (egy pont). Például a képzetes ellipszis esetén a pontok halmaza üres, így nincs szimmetria-középpontja. \diamond

A nem centrális típusú nemüres kúpszeletek azok, amelyeknek nincs szimmetria-középpontja vagy több szimmetria-középpontja is van. Ezeket parabola típusú kúpszeleteknek nevezzük és a következő értelmezést adjuk rájuk.

12.7. Értelmezés

A (12.1) egyenletű γ kúpszeletet *parabola típusú*, ha nem centrális, vagyis

$$\delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

12.8. Példa

Parabola típusú kúpszeletek a parabola (nincs centruma), két párhuzamos vagy két egybeeső egyenes (végtelen sok centrumuk van). \diamond

12.3. Centrális kúpszeletek

Tekintsük az $\mathcal{R} = (O; i, j)$ ortonormált koordináta-rendszerben az

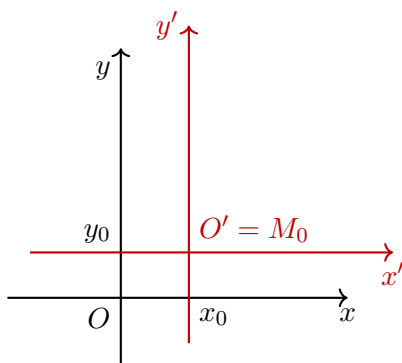
$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (12.3)$$

egyenletű γ centrális kúpszeletet. Ekkor $\delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, vagyis a (12.2) egyenletrendszernek egyetlen egy $M_0(x_0, y_0)$ megoldása van. Meg akarjuk találni azt a koordináta-rendszert, amelyben a kúpszelet egyenlete a legegyszerűbb alakú.

12.3.1. Eltolás

Eltoljuk az \mathcal{R} koordináta-rendszert, hogy az új \mathcal{R}' koordináta-rendszer origója kerüljön az M_0 pontba. Az $\mathcal{R} = (O; i, j)$ koordináta-rendszerrel az $\mathcal{R}' = (O' = M_0; i', j')$ koordináta-rendszerre való áttérés egyenlete:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{[M_0]_{\mathcal{R}}}. \quad (12.4)$$

12.1. ábra. Az $\mathcal{R} = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ és $\mathcal{R}' = (M_0; \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ koordináta-rendszerek.

12.9. Megjegyzés

Az eddigi szokásunktól eltérően (lásd a (4.7). képletet) a régi koordinátákat írjuk fel az új koordináták segítségével. Ennek két haszna van. Először is könnyű felírni a kúpszelet egyenletét az új koordináta-rendszerben, mivel csak végre kell hajtani a (12.4) koordináta-cserét a kúpszeletet megadó $f(x, y) = 0$ egyenletben. Másodszor pedig új koordinátákban megadott pontokat könnyű ábrázolni a régi koordináta-rendszerben, a (12.4) jobb oldalára behelyettesítve az új koordinátákat megkapjuk a régieket. \diamond

A következő tulajdonság azt mondja, hogy az új \mathcal{R}' koordináta-rendszernek megfelelő koordinátákban a kúpszelet egyenlete úgy írható fel, hogy megmaradnak a másodfokú tagok együtthatói, eltűnnek az elsőfokú tagok és a szabadtag $\frac{\Delta}{\delta} = f(x_0, y_0)$ lesz, ahol $M(x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ a kúpszelet centruma.

12.10. Tulajdonság

Az \mathcal{R} koordináta-rendszerben a (12.3) egyenlettel megadott γ kúpszelet $\mathcal{R}' = (O' = M_0; \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ koordináta-rendszerbeli egyenlete

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (12.5)$$

alakúra egyszerűsödik, ahol

$$\Delta = \det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Az $M(x_0 + x', y_0 + y')_{\mathcal{R}} \in \mathcal{X}$ pont akkor és csakis akkor van rajta a γ kúpszeleten, ha $f(x_0 + x', y_0 + y') = 0$. A 12.4. Tulajdonságban lévő számolás alapján ez egyenértékű az

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + f(x_0, y_0) = 0$$

egyenlőséggel, ahol

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} \\ &= x_0 \underbrace{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})}_0 + y_0 \underbrace{(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})}_0 + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} \end{aligned}$$

$$= a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}, \quad (12.6)$$

mivel az (x_0, y_0) teljesíti a (12.2) egyenletrendszert. A (12.6) és (12.2) összefüggések felhasználásával alkothatjuk a következő (homogén) lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10}z = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20}z = 0 \\ a_{10}x + a_{20}y + (a_{00} - f(x_0, y_0))z = 0 \end{cases}.$$

Ennek az egyenletrendszernek egy nemnulla megoldása az $(x, y, z) = (x_0, y_0, 1)$, tehát a rendszer determinánsa 0 kell legyen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} - f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Az utolsó oszlop szerint két részre bontva a bal oldali determinánst kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{10} & a_{20} & f(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \iff \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}}_{\Delta} - \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\delta} \cdot f(x_0, y_0) = 0$$

$$\iff \Delta - \delta \cdot f(x_0, y_0) = 0 \iff f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

□

12.11. Megjegyzés

A (12.5) egyenlet felírásához nem szükséges kiszámolni az M_0 centrum koordinátáit. A feladatokban az ábrázoláshoz szükséges ismerni a centrum koordinátáit, ezért a (12.5) szabadtagját könnyebb kiszámolni a $\frac{\Delta}{\delta} = f(x_0, y_0) = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}$ összefüggés által (egy 3×3 -as determináns kiszámítása helyett elég behelyettesíteni a centrum koordinátáit egy másodfokú kifejezésbe, vagy akár egy lineáris kifejezésbe). ◇

12.3.2. Forgatás

A γ kúpszelet \mathcal{R}' koordináta-rendszerbeli (12.5) egyenlete átírható a következő alakba:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (12.7)$$

Hogy tovább egyszerűsítsük a (12.7) egyenletet, elforgatjuk az \mathcal{R}' koordináta-rendszert az origója körül úgy, hogy a forgatás után a vegyes tag együtthatója 0 legyen, vagyis diagonalizáljuk az A mátrixot.

Legyenek λ_1 és λ_2 az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ valós szimmetrikus mátrix sajátértékei. A λ_1 és λ_2 valós számok az A mátrix

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - \text{Tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei, ahol az A mátrix nyoma $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ és $\det(A) = \delta$. Megjegyezzük, hogy a sajátértékek nem nullák, mivel $\delta = \det(A) \neq 0$ (γ centrális kúpszelet).

A sajátértékek sorrendjét a következőképpen választjuk meg:

- ha a két sajátérték azonos előjelű vagy a szabadtag $\frac{\Delta}{\delta} = 0$, akkor legyen λ_1 a kisebbik abszolút értékű és λ_2 a nagyobbik abszolút értékű sajátérték, vagyis

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2|;$$

- ha a két sajátérték ellentétes előjelű és a szabadtag $\frac{\Delta}{\delta} \neq 0$, akkor a λ_2 sajátérték és a $\frac{\Delta}{\delta}$ szabadtag előjele legyen megegyező, vagyis

$$\lambda_2 \cdot \frac{\Delta}{\delta} > 0.$$

12.12. Megjegyzés

Ha nem tesszük meg a fenti választásokat, akkor az eljárás végén nem jutunk kanonikus alakú egyenletekhez, például az ellipszis vagy a hiperbola fókuszai a második tengelyen lesznek az első helyett. Ilyen esetben még szükség van a koordináta-rendszer egy 90° -os elforgatására. A következő példák mutatjuk meg, hogy ez miért fordulhat elő.

Ha a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben $3(x')^2 + 2(y')^2 - 1 = 0$, akkor az $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 2 és 3 sajátértékei azonos előjelűek. A $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 2$ választás esetén a

$$3(x'')^2 + 2(y'')^2 - 1 = 0 \iff 3(x'')^2 + 2(y'')^2 = 1 \iff \frac{(x'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{(y'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

alakú egyenlethez jutunk, amely nem kanonikus egyenletű ellipszis, mivel az $(x'')^2$ nevezőjében $(\frac{1}{\sqrt{3}})^2$ kisebb, mint az $(y'')^2$ nevezőjében lévő $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$, így az ellipszis az első tengely mentén lapult a második helyett.

Ha a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben $3(x')^2 - 2(y')^2 + 1 = 0$, akkor az $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix -2 és 3 sajátértékei ellentétes előjelűek és a szabadtag $\frac{\Delta}{\delta} = 1$. A $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$ választás esetén, amikor $\lambda_2 \cdot \frac{\Delta}{\delta} < 0$, a

$$3(x'')^2 - 2(y'')^2 + 1 = 0 \iff -3(x'')^2 + 2(y'')^2 = 1 \iff -\frac{(x'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{(y'')^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

alakú egyenlethez fogunk jutni, amely szintén nem kanonikus alakú, mivel a fókuszai a második tengelyen helyezkednek el az első helyett. \diamond

Az A mátrix diagonalizálásához két esetet megkülönböztetünk meg.

- (i) Ha a sajátértékek különbözőek, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor legyen $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ a λ_1 , illetve $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátvektor, amelyet az

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_2 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerekből számítottuk ki. Megjegyezzük, hogy a v_1 és v_2 vektorok csak egy nemnulla számmal való szorzás erejéig vannak meghatározva. Megjegyezzük, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó v_1 és v_2 vektorok merőlegesek egymásra, azaz a standard skalárszorzatuk 0. Beírjuk a $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ és $\frac{v_2}{\|v_2\|}$ normalizált vektorokat egy mátrix oszlopaiba

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{11}}{\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2}} & \frac{v_{21}}{\sqrt{v_{21}^2 + v_{22}^2}} \\ \frac{v_{12}}{\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2}} & \frac{v_{22}}{\sqrt{v_{21}^2 + v_{22}^2}} \end{bmatrix},$$

majd az oszlopokban az előjelet megcseréljük úgy, hogy a főátlón lévő elemek ne legyenek negatívak, így kapva egy

$$S = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

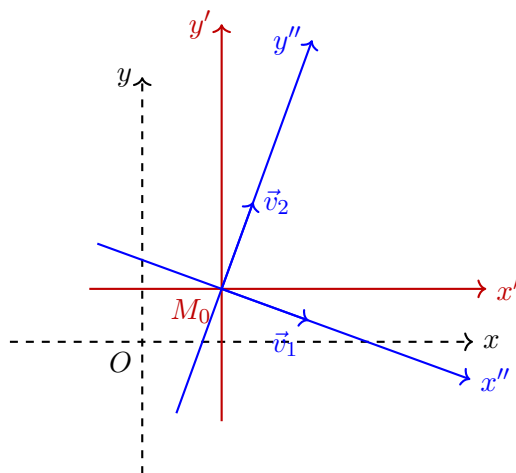
alakú mátrixot, ahol $a^2 + b^2 = 1$ és $a \geq 0$. Az utóbbi két feltétel miatt létezik $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ szög úgy, hogy $a = \cos \theta$ és $b = \sin \theta$. Tehát S a $\theta = \arctg(\frac{b}{a}) = \arctg(\frac{v_{12}}{v_{11}})$ szöggel való forgatás mátrixa, vagyis

$$S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Legyen $\mathcal{R}'' = (O'' = M_0; i'', j'')$ az $\mathcal{R}' = (M_0; i, j)$ koordináta-rendszer elforgatottja az M_0 pont körül θ szöggel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} = S \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}''}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{T_{\mathbf{B}'\mathbf{B}''}} \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}''}}$$

ahol $\mathbf{B}' = (i, j)$ és $\mathbf{B}'' = (i'', j'')$.



12.2. ábra. Az $\mathcal{R}' = (O' = M_0; i, j)$ és $\mathcal{R}'' = (O'' = M_0; i'', j'')$ koordinátarendszerek

Az A mátrix diagonalizálható az S ortogonális mátrix segítségével, azaz

$$A = S \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot S^t,$$

és a γ kúpszelet \mathcal{R}'' koordináta-rendszerbeli egyenlete felírható, mint

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \\ \iff & \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot S \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot S^t \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \\ \iff & \begin{bmatrix} x'' & y'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \\ \iff & \lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \end{aligned}$$

- (ii) Ha a sajátértékek megegyeznek, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor az A mátrix diagonális és a γ kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben $\lambda \cdot (x')^2 + \lambda \cdot (y')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ alakú. Hogy egységesebb legyen a tárgyalás ebben az esetben legyen $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}'$ és $(x'', y'') = (x', y')$, vagyis $\theta = 0^\circ$ -kal forgatunk.

Összegezve a θ szöggel való forgatás után az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a γ kúpszelet egyenlete

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (12.8)$$

alakú lesz.

12.3.3. Centrális kúpszeletek tárgyalása

A (12.8) egyenletű γ kúpszelet típusát a $\lambda_1, \lambda_2, \frac{\Delta}{\delta}$ előjele szerint tárgyaljuk, amelyeket az alábbi megjegyzés alapján az eredeti egyenlet együtthatói alapján is tárgyalhatunk.

12.13. Megjegyzés

A λ_1 és λ_2 az A mátrix sajátértékei:

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = 0 & \iff \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0 & \iff \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{Tr}(A)} \cdot \lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{\delta} = 0, \end{aligned}$$

ahonnan a megfelelő együtthatókat azonosítva kapjuk a következő összefüggéseket:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta = \det(A) \quad \text{és} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Így a λ_1 és λ_2 (nemnulla) sajátértékek pontosan akkor azonos előjelűek, ha $\delta > 0$:

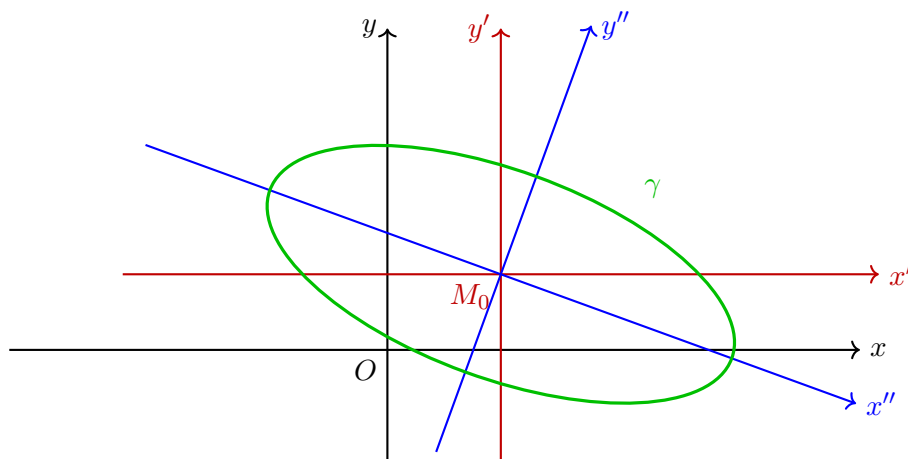
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \iff \delta > 0$ és $\text{Tr}(A) > 0$,
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \iff \delta > 0$ és $\text{Tr}(A) < 0$.

A λ_1 és λ_2 (nemnulla) sajátértékek ellentétes előjelűek pontosan akkor, ha $\delta < 0$. \diamond

Tehát centrális kúpszelet ($\delta \neq 0$) esetén a következő öt eset állhat fenn.

- I. $\delta > 0$ és $\text{Tr}(A) \cdot \Delta < 0$, vagyis λ_1, λ_2 azonos előjelűek és $\frac{\Delta}{\delta}$ velük ellentétes előjelű:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \iff \frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 1,$$



12.3. ábra. Ellipszis.

ahol $a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}$ és $a^2 \geq b^2$, mivel $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Ebben az esetben a γ kúpszelet egy *ellipszis* (sajátosan egy kör, ha $\lambda_1 = \lambda_2$), amelynek fókuszai az x'' -tengelyen találhatók.

12.14. Példa

Ha $2 \cdot (x'')^2 + 3 \cdot (y'')^2 - 5 = 0$, akkor a kanonikus alak $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{\frac{5}{2}})^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{\frac{5}{3}})^2} = 1$. ◇

II. $\delta > 0$ és $\text{Tr}(A) \cdot \Delta > 0$, vagyis λ_1 , λ_2 és $\frac{\Delta}{\delta}$ azonos előjelűek:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \iff \frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = -1,$$

ahol $a^2 = \frac{\Delta}{\delta\lambda_1}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2}$ és $a^2 \geq b^2$, mivel $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Ebben az esetben a γ kúpszelet egy *képzetes ellipszis*. (Valós pontok halmaza üres).

12.15. Példa

Ha $2 \cdot (x'')^2 + 3 \cdot (y'')^2 + 5 = 0$, akkor a kanonikus alak $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{\frac{5}{2}})^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{\frac{5}{3}})^2} = -1$. ◇

III. $\delta > 0$ és $\Delta = 0$, vagyis λ_1 , λ_2 azonos előjelűek:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 0,$$

ahol $a^2 = \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$, $b^2 = \left|\frac{1}{\lambda_2}\right|$ és $a^2 \geq b^2$, mivel $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Ebben az esetben a γ kúpszelet *két képzetes metsző egyenes* (a γ egy pontból áll, az M_0 pontból).

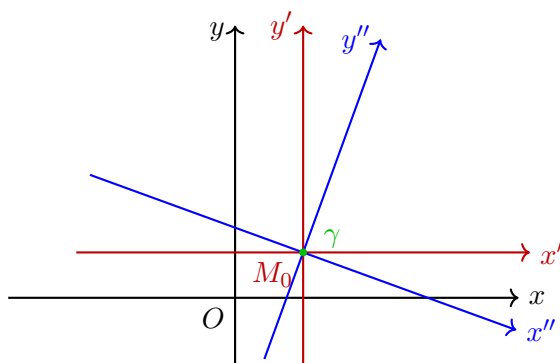
12.16. Példa

Ha $2 \cdot (x'')^2 + 3 \cdot (y'')^2 = 0$, akkor a kanonikus alak $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2} + \frac{(y'')^2}{(\sqrt{\frac{1}{3}})^2} = 0$. ◇

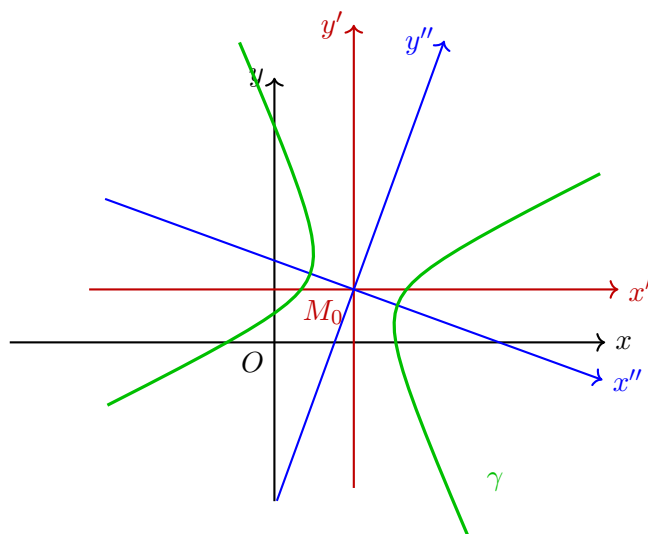
IV. $\delta < 0$ és $\Delta \neq 0$, vagyis λ_1 és λ_2 ellentétes előjelűek:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \iff \frac{(x'')^2}{a^2} - \frac{(y'')^2}{b^2} = 1,$$

ahol $a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0$ és $b^2 = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$, mivel λ_2 és $\frac{\Delta}{\delta}$ azonos előjelűek volt választva. Ebben az esetben a γ kúpszelet egy *hiperbola*, amelynek fókuszai az x'' -tengelyen találhatók. A hiperbola aszimptotái: $y'' = \pm \frac{b}{a} \cdot x''$.



12.4. ábra. Két képzetes metsző egyenes.



12.5. ábra. Hiperbola.

12.17. Példa

Ha $2 \cdot (x'')^2 - 3 \cdot (y'')^2 - 5 = 0$, akkor a kanonikus alak $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{\frac{5}{2}})^2} - \frac{(y'')^2}{(\sqrt{\frac{5}{3}})^2} = 1$. ◇

V. $\boxed{\delta < 0 \text{ és } \Delta = 0}$, vagyis λ_1 és λ_2 ellentétes előjelűek és a szabadtag 0:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{a^2} - \frac{(y'')^2}{b^2} = 0,$$

ahol $a^2 = \left| \frac{1}{\lambda_1} \right|$, $b^2 = \left| \frac{1}{\lambda_2} \right|$ és $a^2 \geq b^2$, mivel $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Ebben az esetben a γ kúpszelet *két metsző egyenes*, az $y'' = \frac{b}{a}x''$ és $y'' = -\frac{b}{a}x''$ egyenletű. A két egyenes x'' -tengellyel bezárt szöge kisebb vagy egyenlő, mint 45° .

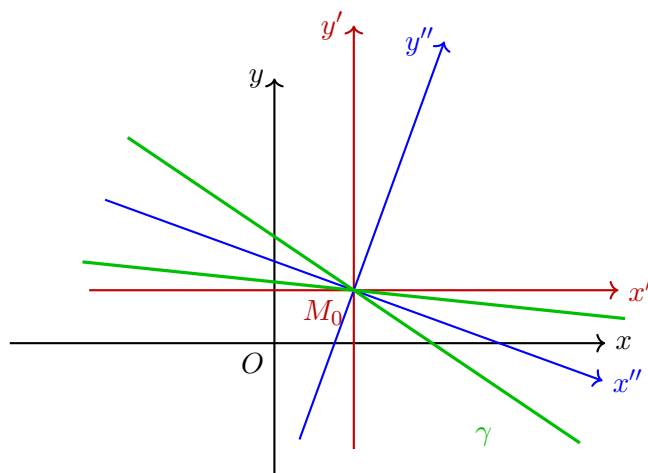
12.18. Példa

Ha $2 \cdot (x'')^2 - 3 \cdot (y'')^2 = 0$, akkor a kanonikus alak $\frac{(x'')^2}{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2} - \frac{(y'')^2}{(\sqrt{\frac{1}{3}})^2} = 0$. Ebben az esetben

a két egyenes $y'' = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot x''$. ◇

12.19. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez



12.6. ábra. Két metsző egyenes.

viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y - 7 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk a kúpszeletet.

Ebben az esetben $a_{11} = 17$, $a_{12} = \frac{-12}{2} = -6$, $a_{22} = 8$, $a_{10} = \frac{-22}{2} = -11$, $a_{20} = \frac{-4}{2} = -2$, $a_{00} = -7$. Alkotjuk a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -6 & -11 \\ -6 & 8 & -2 \\ -11 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\delta = \det(A) = 17 \cdot 8 - (-6) \cdot (-6) = 100 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális.

A kúpszelet centrumát a (12.2) egyenletrendszer segítségével számoljuk ki, amelyet mátrix alakba is írhatunk:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}.$$

Ennek a megoldása

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = \frac{-1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} = \frac{-1}{100} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $M_0(1, 1)_{\mathcal{R}}$ a kúpszelet centruma (szimmetria-középpontja).

Az \mathcal{R} koordináta-rendszert eltoljuk, hogy az új \mathcal{R}' koordináta-rendszer középpontja kerüljön az $M_0(1, 1)_{\mathcal{R}}$ pontban. Ennek a koordináta-cserének az egyenlete:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}.$$

Az eltolt koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + f(x_0, y_0) = 0$$

alakú, ahol $f(x, y) = 17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y - 7$, így $f(1, 1) = -20$. Tehát a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben

$$17(x')^2 - 12x'y' + 8(y')^2 - 20 = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Ehhez felírjuk az A mátrix karakterisztikus egyenletét

$$\begin{bmatrix} 17 - \lambda & -6 \\ -6 & 8 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - (17 + 8) \cdot \lambda + 100 = 0 \iff \lambda^2 - 25 \cdot \lambda + 100 = 0,$$

amelynek 20 és 5 gyökei az A mátrix sajátértékei. Mivel a két sajátérték azonos előjelű, ezért legyen $\lambda_1 = 5$ (a kisebbik abszolút értékű sajátérték) és $\lambda_2 = 20$ (a nagyobb abszolút értékű sajátérték).

A $\lambda_1 = 5$ sajátértékhez tartozó (egy nemnulla) sajátvektort az

$$(A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0_2 \iff \begin{bmatrix} 17 - 5 & -6 \\ -6 & 8 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 12v_{11} - 6v_{12} = 0 \\ -6v_{11} + 3v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számolunk ki. Az egyenletrendszer határozatlan, összefüggő, továbbá egyenértékű a $2v_{11} - v_{12} = 0$, vagyis $v_{12} = 2v_{11}$ egyenlettel. Például $v_{11} = -1$ esetén kapjuk, hogy $v_{12} = -2$ kell legyen, tehát $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ egy nemnulla $\lambda_1 = 5$ -höz tartozó sajátvektor.

A $\lambda_2 = 20$ sajátértékhez tartozó (egy nemnulla) sajátvektort az

$$(A - \lambda_2 I_2)v_2 = 0_2 \iff \begin{bmatrix} 17 - 20 & -6 \\ -6 & 8 - 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -3v_{21} - 6v_{22} = 0 \\ -6v_{21} - 12v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számolunk ki. Az egyenletrendszer határozatlan, összefüggő, továbbá egyenértékű a $v_{21} + 2v_{22} = 0$, vagyis $v_{21} = -2v_{22}$ egyenlettel. Például $v_{22} = -1$ esetén kapjuk, hogy $v_{21} = 2$ kell legyen, tehát $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ egy nem nulla $\lambda_2 = 20$ -hoz tartozó sajátvektor.

A normalizált sajátvektorokból alkotjuk a $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} & \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} & \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ mátrixot. A mátrix oszlopaiban megcseréljük úgy az előjeleket, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek, így kapva az $S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ forgatási mátrixot, ahol a forgatás szöge $\theta = \arctg \frac{1}{2}$. A következő koordinátacserét végezzük

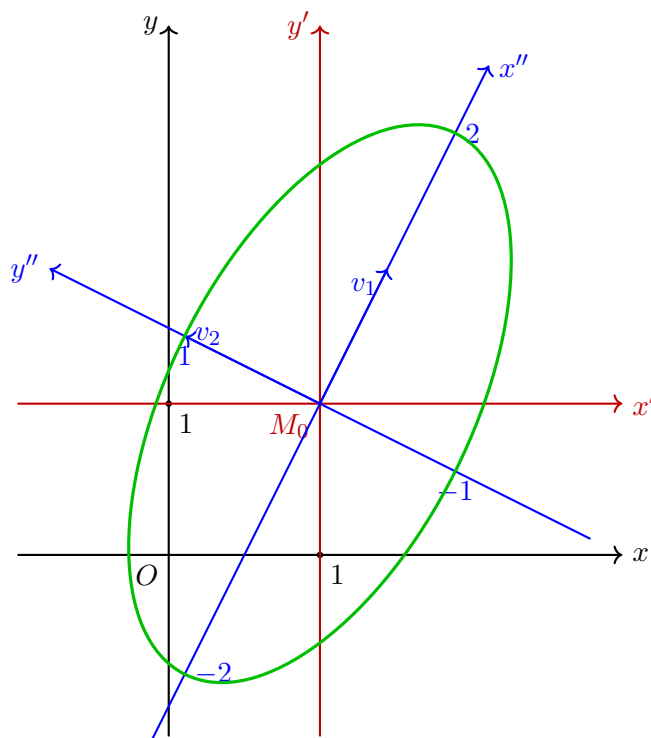
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}''}} \iff \begin{cases} x' = \frac{x'' - 2y''}{\sqrt{5}} \\ y' = \frac{2x'' + y''}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

A koordináta-csere után a kúpszelet egyenlete

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \iff 5(x'')^2 + 20(y'')^2 - 20 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{4} + (y'')^2 = 1,$$

amely egy kanonikus alakú ellipszis egyenlete.

Megjegyezzük, hogy ha nem 5-öt választjuk λ_1 -nek, hanem 20-at, akkor az $(y'')^2 + \frac{(y'')^2}{4} = 1$ nem kanonikus egyenletű ellipszishez jutunk, és ekkor szükség van még egy $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix}$ 90°-os forgatásra, hogy végre a kanonikus egyenletű $\frac{(x''')^2}{4} + (y''')^2 = 1$ ellipszishez juthassunk.



12.7. ábra. Az $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 22x - 4y - 7 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

A kapott ellipszist a következőképpen ábrázoljuk, feltüntetve a köztes koordináta-rendszereket is (lásd a 12.7. ábrát). Megrajzoljuk az \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszert és felvesszük benne az $M_0(1,1)_{\mathcal{R}}$ pontot. Ezen a ponton keresztül párhuzamosokat húzunk a tengelyekkel, így kapva az eltoló \mathcal{R}' koordináta-rendszert. Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben felvesszük az $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ koordinátájú pontot (a forgatás mátrixának első oszlopa). Ez a pont az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -tengelyének egy pontja, ezért az M_0 -n és ezen a ponton keresztül egyenest húzva kapjuk meg az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -tengelyét. Hasonlóan, az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben felvesszük az $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ koordinátájú pontot (a forgatás mátrixának második oszlopa). Ez a pont az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer y'' -tengelyének egy pontja, ezért az M_0 -n és ezen a ponton keresztül egyenest húzva kapjuk meg az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer y'' -tengelyét. (Az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer az \mathcal{R}' koordináta-rendszerhez képest $\theta = \arctg 2 \simeq 63.44^\circ$ -os szöggel van forgatva el.) Végül az \mathcal{R}'' ortonormált koordináta-rendszerben ábrázoljuk a $\frac{(x'')^2}{4} + (y'')^2 = 1$ kanonikus egyenletű ellipszist.

◇

12.4. Parabola típusú kúpszeletek

A centrális kúpszeletek esetén először eltolást, majd forgatást hajtottunk végre, hogy megkapjuk azt a koordináta-rendszert, melyben a kúpszelet kanonikus alakú. Parabola típusú kúpszeletek esetén fordítva járunk el, először forgatást, majd eltolást hajtottunk végre.

Legyen γ egy parabola típusú kúpszelet, amelynek egyenlete az \mathcal{R} koordináta-rendszerben

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \quad (12.9)$$

A γ kúpszelet pontosan akkor parabola típusú, ha

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \iff a_{12}^2 = a_{11}a_{22}. \quad (12.10)$$

Ebből következik, hogy $a_{11}, a_{22} \geq 0$ vagy $a_{11}, a_{22} \leq 0$. Feltehetjük, hogy

$$a_{11}, a_{22} \geq 0,$$

különben a kúpszelet (12.9) egyenletét megszorozzuk (-1) -gyel.

12.4.1. Forgatás

Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ mátrix valós együtthatós és szimmetrikus, ezért sajátértékei valósak és a mátrix diagonalizálható (speciális) ortogonális mátrixok segítségével. Az A mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \\ \iff \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - \text{Tr}(A)) = 0,$$

ahonnan a sajátértékek $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} \neq 0$. Ha $a_{11} = a_{12} = 0$, akkor nem kell forgatni, ezért feltételezhetjük, hogy $a_{11}a_{12} \neq 0$. Egy, a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó nemnulla sajátvektor $v_1 = (a_{12}, -a_{11})$, míg egy, a $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ sajátértékhez tartozó nemnulla sajátvektor $v_2 = (a_{11}, a_{12})$. Beírjuk a normalizált sajátvektorokat egy mátrix oszlopaiba

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \\ \frac{-a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \end{bmatrix},$$

így kapva egy forgatási mátrixot. A mátrixot megszorozzuk egy $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ számmal a következő szabály szerint:

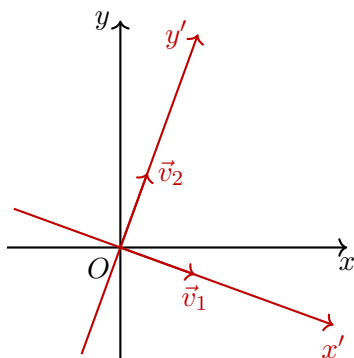
$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{ha } (2a_{10}, 2a_{20})v_1 = 2a_{10}a_{12} - 2a_{20}a_{11} \leq 0, \\ -1, & \text{ha } (2a_{10}, 2a_{20})v_1 = 2a_{10}a_{12} - 2a_{20}a_{11} > 0. \end{cases} \quad (12.11)$$

Erre azért van szükség, hogy a koordináta-csere után az x' együtthatója ne legyen pozitív. Így kapunk egy

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{\varepsilon a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \\ \frac{-\varepsilon a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{\varepsilon a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

forgatási mátrixot. Legyen az $\mathcal{R}' = (O; i', j')$ koordináta-rendszer az $\mathcal{R} = (O; i, j)$ koordináta-rendszer elforgatása az O pont körül θ szöggel trigonometrikus irányba:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_S \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{\varepsilon a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \\ \frac{-\varepsilon a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{\varepsilon a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

12.8. ábra. Az $\mathcal{R} = (O; i, j)$ és $\mathcal{R}' = (O; i', j')$ koordinátarendszerek.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \varepsilon \cdot \frac{a_{12} \cdot x' + a_{11} \cdot y'}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \\ y = \varepsilon \cdot \frac{-a_{11} \cdot x' + a_{12} \cdot y'}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \end{cases} \quad (12.12)$$

A másodfokú tagok a következőképpen változnak meg a forgatás után:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} S^t A S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 (y')^2 + \lambda_2 (y')^2 \\ &= (a_{11} + a_{22})(y')^2. \end{aligned}$$

A (12.9) egyenleten elvégezve a (12.12) koordináta-cserét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{a'_{22}} (y')^2 + 2\varepsilon \cdot \underbrace{\frac{a_{10}a_{12} - a_{20}a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}}_{2a'_{10}} \cdot x' + 2\varepsilon \cdot \underbrace{\frac{a_{10}a_{11} + a_{20}a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}}_{2a'_{20}} \cdot y' + \underbrace{a_{00}}_{a'_{00}} &= 0 \\ \Leftrightarrow a'_{22}(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} &= 0 \end{aligned} \quad (12.13)$$

ahol

$$a'_{22} = a_{11} + a_{22}, \quad \begin{bmatrix} a'_{10} & a'_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{\varepsilon a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \\ \frac{-\varepsilon a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} & \frac{\varepsilon a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \end{bmatrix}}_S, \quad a'_{00} = a_{00}.$$

Az ε megválasztása miatt az x' együtthatója $a'_{10} \leq 0$ lesz. Ha nem figyelünk az ε szám megválasztására, akkor a végén szükség lehet egy 180° -os forgatásra, mivel előfordulhat, hogy például az $(y'')^2 = 2x''$ kanonikus egyenletű parabola helyett az $(y'')^2 = -2x''$ nem kanonikus egyenletű, de vele kongruens parabolához jutunk.

12.20. Megjegyzés

Később szükségünk lesz az $(a'_{10})^2$, $(a'_{20})^2$ és $(a'_{10})^2 + (a'_{20})^2$ kifejezésekre az eredeti együtthatók függvényben:

$$(a'_{10})^2 = \left(\varepsilon \cdot \frac{a_{10}a_{12} - a_{20}a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \right)^2 = \frac{(a_{10}a_{12} - a_{20}a_{11})^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{a_{10}^2 a_{12}^2 - 2a_{10}a_{20}a_{11}a_{12} + a_{20}^2 a_{11}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

$$\stackrel{(12.10)}{=} \frac{a_{10}^2 a_{11} a_{22} - 2a_{10}a_{20}a_{11}a_{12} + a_{20}^2 a_{11}^2}{a_{11}^2 + a_{11}a_{22}} = \frac{a_{10}^2 a_{22} - 2a_{10}a_{20}a_{12} + a_{20}^2 a_{11}}{a_{11} + a_{22}}, \quad (12.14)$$

$$(a'_{20})^2 = \left(\varepsilon \cdot \frac{a_{10}a_{11} + a_{20}a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \right)^2 = \frac{(a_{10}a_{11} + a_{20}a_{12})^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{a_{10}^2 a_{11}^2 + 2a_{10}a_{20}a_{11}a_{12} + a_{20}^2 a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

$$\stackrel{(12.10)}{=} \frac{a_{10}^2 a_{11}^2 + 2a_{10}a_{20}a_{11}a_{12} + a_{20}^2 a_{11}a_{22}}{a_{11}^2 + a_{11}a_{22}} = \frac{a_{10}^2 a_{11} + 2a_{10}a_{20}a_{12} + a_{20}^2 a_{22}}{a_{11} + a_{22}}, \quad (12.15)$$

ahonnan

$$(a'_{10})^2 + (a'_{20})^2 = \frac{a_{10}^2 a_{22} - 2a_{10}a_{20}a_{12} + a_{20}^2 a_{11}}{a_{11} + a_{22}} + \frac{a_{10}^2 a_{11} + 2a_{10}a_{20}a_{12} + a_{20}^2 a_{22}}{a_{11} + a_{22}} = a_{10}^2 + a_{20}^2. \quad (12.16)$$

◇

12.4.2. Eltolás és parabolikus kúpszeletek tárgyalása

A célunk olyan $\begin{cases} x' = x'' + x'_0 \\ y' = y'' + y'_0 \end{cases}$ koordináta-csere végrehajtása, amely után az y'' együtthatója és a szabadtag is 0 lesz. A szabadtag akkor tehető nullává, ha az x' együtthatója $a'_{10} \neq 0$. Ha kiszámítjuk a Δ determinánst, felhasználva, hogy $\delta = 0$, akkor kapjuk, hogy

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} = a_{00} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\delta} - a_{20} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{10} & a_{20} \end{vmatrix} + a_{10} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{10} & a_{20} \end{vmatrix}$$

$$= - (a_{20}^2 a_{11} - 2a_{10}a_{20}a_{12} + a_{10}^2 a_{22}) = - \frac{a_{20}^2 a_{11} - 2a_{10}a_{20}a_{12} + a_{10}^2 a_{22}}{a_{11} + a_{22}} \cdot (a_{11} + a_{22})$$

$$\stackrel{(12.14)}{=} - (a'_{10})^2 (a_{11} + a_{22}), \quad (12.17)$$

tehát

$$a'_{10} = 0 \iff \Delta = 0. \quad (12.18)$$

A következő eseteket különböztetjük meg.

$\Delta \neq 0$ Ekkor $a'_{10} \neq 0$ és a γ kúpszelet \mathcal{R}' koordináta-rendszer szerinti (12.13) egyenlete a következőképpen alakítható át:

$$a'_{22} \cdot (y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0$$

$$\iff a'_{22} \cdot \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \cdot y' + \left(\frac{a'_{20}}{a'_{22}} \right)^2 \right] + 2a'_{10}x' + a'_{00} - \frac{(a'_{20})^2}{a'_{22}} = 0$$

$$\iff a'_{22} \cdot \underbrace{\left(y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \right)^2}_{y''} + 2a'_{10} \cdot \underbrace{\left(x' + \frac{a'_{00}}{2a'_{10}} - \frac{(a'_{20})^2}{2a'_{10}a'_{22}} \right)}_{x''} = 0.$$

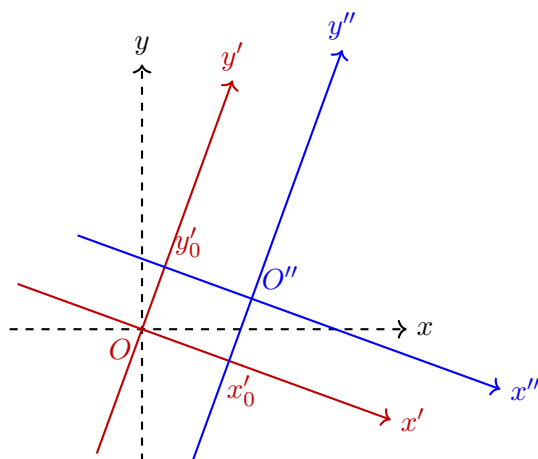
Innen adódik, hogy a következő eltolást végezzük:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}''}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a'_{00}}{a'_{10}} - \frac{(a'_{20})^2}{2a'_{10}a'_{22}} \\ \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \end{bmatrix}}_{-[O'']_{\mathcal{R}'}} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}''}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a'_{00}}{a'_{10}} - \frac{(a'_{20})^2}{2a'_{10}a'_{22}} \\ \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \end{bmatrix}}_{[O'']_{\mathcal{R}'}} \\ \iff \begin{cases} x' = x'' - \frac{2a'_{00}a'_{22} - (a'_{20})^2}{2a'_{10}a'_{22}} \\ y' = y'' - \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \end{cases},$$

tehát az $\mathcal{R}' = (O; i', j')$ koordináta-rendszer origóját eltoljuk az $O''(x'_0, y'_0)_{\mathcal{R}'}$ pontba, ahol

$$(x'_0, y'_0) = \left(-\frac{2a'_{00}a'_{22} - (a'_{20})^2}{2a'_{10}a'_{22}}, -\frac{a'_{20}}{a'_{22}} \right),$$

így kapva meg az $\mathcal{R}'' = (O''; i'', j'')$ koordináta-rendszert.



12.9. ábra. Az $\mathcal{R}' = (O; i', j')$ és $\mathcal{R}'' = (O''; i'', j'')$ koordinátarendszerek.

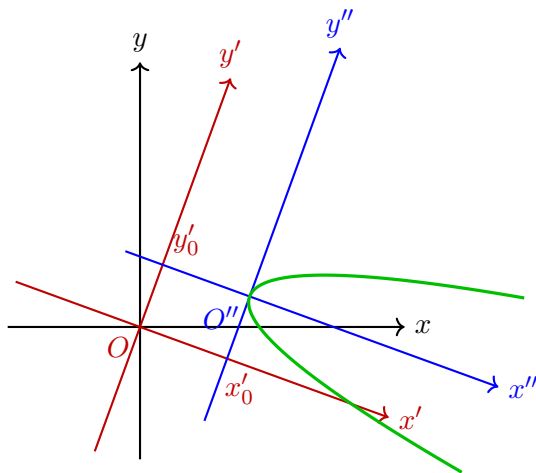
Az eltolás után a γ kúpszelet egyenlete

$$\begin{aligned} a'_{22} \cdot (y'')^2 + 2a'_{10} \cdot x'' &= 0 \\ \iff (y'')^2 &= -2 \frac{a'_{10}}{a'_{22}} x'' \\ \iff (y'')^2 &= 2 \underbrace{\sqrt{\frac{-\Delta}{\text{Tr}(A)}}}_{p} x'' \\ \iff (y'')^2 &= 2px'', \end{aligned}$$

alakba írható át, ahol $p = \sqrt{\frac{-\Delta}{\text{Tr}(A)}} > 0$. Tehát a γ kúpszelet egy *parabola*.

$\Delta = 0$ Ekkor $a'_{10} = 0$ és a γ kúpszelet (12.13) egyenlete a következőre redukálódik:

$$\begin{aligned} a'_{22}(y')^2 + 2a'_{20}y' + a'_{00} &= 0 \\ \iff a'_{22} \cdot \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \cdot y' + \left(\frac{a'_{20}}{a'_{22}} \right)^2 \right] + a'_{00} - \frac{(a'_{20})^2}{a'_{22}} &= 0 \end{aligned}$$



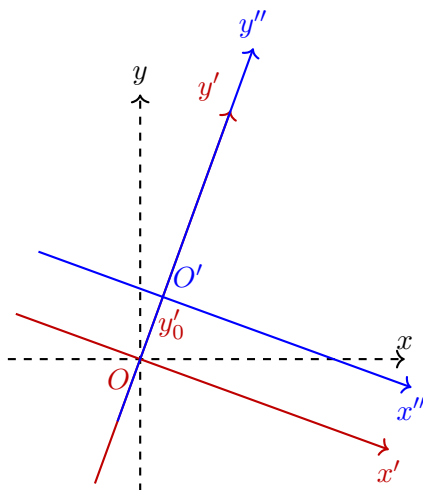
12.10. ábra. Parabola.

$$\Leftrightarrow a'_{22} \cdot \underbrace{\left(y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}}\right)}_{y''}^2 + \frac{a'_{00}a'_{22} - (a'_{20})^2}{a'_{22}} = 0,$$

Ebben az esetben az

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}''}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a'_{20}}{a'_{22}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \end{cases}.$$

eltolást hatjuk végre (ha $a'_{20} = 0$, akkor nem kell eltolást végrehajtani), ahol az új $\mathcal{R}'' = (O''; i, j)$ koordináta-rendszer origója $O'' \left(0, -\frac{a'_{20}}{a'_{22}}\right)_{\mathcal{R}'}$. Ez a koordináta-csere után a γ kúp-

12.11. ábra. Az $\mathcal{R}' = (O; i', j')$ és $\mathcal{R}'' = (O''; i', j')$ koordinátarendszerek

szelet egyenlete

$$a'_{22} \cdot (y'')^2 + \frac{a'_{22} \cdot a'_{00} - (a'_{20})^2}{a'_{22}} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow a'_{22} \cdot (y'')^2 = \frac{(a'_{20})^2 - a'_{22} \cdot a'_{00}}{a'_{22}} \\
&\Longleftrightarrow (y'')^2 = \frac{1}{(a'_{22})^2} \cdot \underbrace{[(a'_{20})^2 - a'_{22} \cdot a'_{00}]}_D \\
&\Longleftrightarrow (y'')^2 = \frac{D}{(a'_{22})^2}
\end{aligned} \tag{12.19}$$

alakra hozható, ahol $D = (a'_{20})^2 - a'_{22} \cdot a'_{00}$. A $\Delta = 0$ esetben a D számot is ki lehet fejezni az eredeti együtthatók segítségével a következőképpen:

$$\begin{aligned}
D &= (a'_{20})^2 - a'_{22} \cdot a'_{00} \\
&\stackrel{(\Delta=0)}{=} -\frac{\Delta}{a_{11} + a_{22}} + (a'_{20})^2 - a'_{22} \cdot a'_{00} \\
&\stackrel{(12.18)}{=} (a'_{10})^2 + (a'_{20})^2 - a'_{22} \cdot a'_{00} \\
&\stackrel{(12.16)}{=} a_{10}^2 + a_{20}^2 - (a_{11} + a_{22})a_{00} \\
&= K.
\end{aligned}$$

Tehát a kúpszelet egyenlete 12.19 egyenlete átírható

$$(y'')^2 = \frac{K}{[\text{Tr}(A)]^2} \tag{12.20}$$

alakba.

A $K = a_{10}^2 + a_{20}^2 - (a_{11} + a_{22})a_{00}$ előjele szerint három alesetet különböztetünk meg.

- (i) $\boxed{K > 0}$ a γ kúpszelet 2 *párhuzamos egyenes* ($y'' = \pm \sqrt{\frac{K}{[\text{Tr}(A)]^2}}$ párhuzamos egyenesek, lásd a 12.12a. ábrát).
- (ii) $\boxed{K = 0}$ a γ kúpszelet 2 *egybeeső egyenes* (γ az $y'' = 0$ egyenes, lásd a 12.12b. ábrát).
- (iii) $\boxed{K < 0}$ a γ kúpszelet 2 *párhuzamos képzetes egyenes* ($(y'')^2 = \frac{K}{[\text{Tr}(A)]^2}$, ezért $\gamma = \emptyset$, a görbének nincs valós pontja).

12.21. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszerhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $x^2 - 4xy + 4y^2 - 16x + 7y + 14 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk.

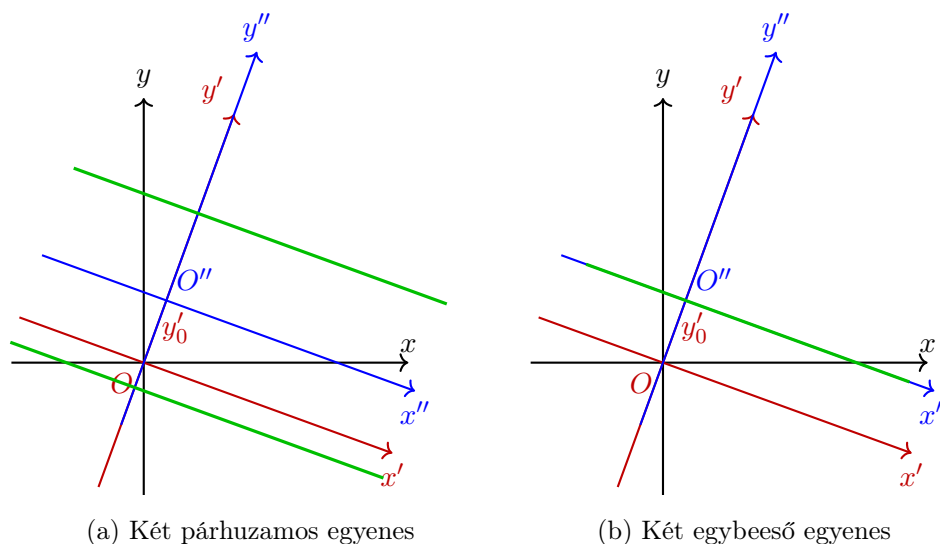
Ebben az esetben $a_{11} = 1$, $a_{12} = \frac{-4}{2} = -2$, $a_{22} = 4$, $a_{10} = \frac{-16}{2} = -8$, $a_{20} = \frac{7}{2}$, $a_{00} = 14$. Alkotjuk a következő mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\delta = \det(A) = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2) = 0$, ezért a kúpszelet parabola típusú.

Először forgatást, majd eltolást hajtunk végre. Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0$, illetve $\lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1 + 4 = 5$, továbbá a hozzájuk tartozó egy-egy nemnulla sajátvektor $v_1 = (a_{22}, -a_{12}) = (4, 2)$, illetve $v_2 = (a_{12}, a_{22}) = (-2, 4)$ (az A mátrix utolsó oszlopa). Ezeket a vektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiba:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{4^2+2^2}} & \frac{-2}{\sqrt{4^2+2^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{4^2+2^2}} & \frac{4}{\sqrt{4^2+2^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$



12.12. ábra

Megvizsgáljuk, hogy előjelet kell-e váltani ebben a mátrixban:

$$(a_{10}, a_{20})v_1 = (-16, 7)(4, 2) = -64 + 14 < 0,$$

így a (12.11) alapján $\varepsilon = 1$ és nem kell előjelet váltani a fenti mátrixban. Tehát a forgatás mátrixa

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ahol $\theta = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 26.56^\circ$.

Elforgatjuk az $\mathcal{R} = (O; i, j)$ koordináta-rendszert az O origó körül $\theta = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 26.56^\circ$ szöggel, így kapva az $\mathcal{R}' = (O; i', j')$ koordináta-rendszert:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (12.21)$$

A kúpszelet egyenletét az \mathcal{R} koordináta-rendszerben úgy kapjuk meg, hogy az

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 16x + 7y + 14 = 0$$

egyenletbe végrehajtjuk a (12.21) változócsere:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 4y^2 - 16x + 7y + 14 = 0 \\ \iff & \text{Tr}(A)(y')^2 + 2 \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + a_{00} = 0 \\ \iff & 5(y')^2 + \begin{bmatrix} -16 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 14 = 0 \\ \iff & 5(y')^2 - 16 \cdot \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}} + 7 \cdot \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}} + 14 = 0 \\ \iff & 5(y')^2 + \frac{-25}{\sqrt{5}}x' + \frac{30}{\sqrt{5}}y' + 14 = 0 \end{aligned}$$

$$\iff 5(y')^2 - 5\sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' + 14 = 0.$$

Ezután egy olyan $\begin{cases} x' = x'' + x'_0 \\ y' = y'' + y'_0 \end{cases}$ koordináta-cserét végzünk, hogy utána az y'' tag együtthatója és a szabadtag 0 legyen.

$$\begin{aligned} & 5(y')^2 - 5\sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' + 14 = 0 \\ \iff & 5 \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 \right] - 5\sqrt{5}x' + 14 - 9 = 0 \\ \iff & 5 \left(y' + \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 - 5\sqrt{5}x' + 5 = 0 \\ \iff & 5 \underbrace{\left(y' + \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2}_{y''} - 5\sqrt{5} \underbrace{\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)}_{x''} = 0 \\ \iff & 5(y'')^2 - 5\sqrt{5}x'' = 0 \\ \iff & (y'')^2 = 2 \underbrace{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)}_p x'', \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y' = y'' - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{[O'']_{\mathcal{R}'}}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszert eltoljuk, hogy az új \mathcal{R}'' koordináta-rendszer origója kerüljön az $O''(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}})_{\mathcal{R}'}$ pontba. Azt kaptuk, hogy a kúpszeletünk egyenlete az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben $(y'')^2 = 2 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) x''$, amely egy (kanonikus egyenletű) parabola (lásd a 12.13. ábrát).

◇

12.5. Kúpszelet típusának meghatározása az együtthatók segítségével

Ha a γ kúpszelet egyenlete $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$, akkor legyenek

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}, \quad \text{Tr} = a_{11} + a_{22}, \quad K = a_{10}^2 + a_{20}^2 - a_{00}(a_{11} + a_{22}).$$

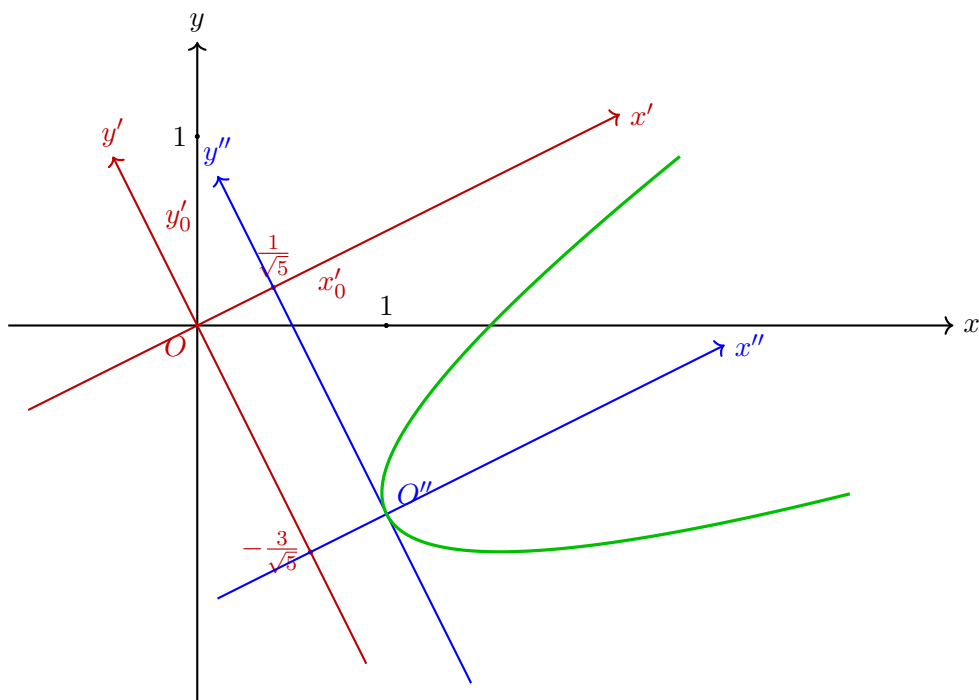
Megjegyezzük, hogy a δ , Δ , Tr mennyiségek nem változnak eltolás és forgatás során, így ők a kúpszelet *invariánsai*. A K nem változik forgatás, csak az eltolás során, így őt *félinvariánsnak* hívjuk. Ezek segítségével eldönthető, hogy milyen kúpszelettel van dolgunk (lásd a 12.1. táblázatot).

A centrális kúpszeletek tárgyalásához a δ , Δ és $\text{Tr} = \text{Tr}(A)$ számokra volt szükség, amelyek meghatározhatók a kúpszelet eredeti egyenletéből. A parabola típusú kúpszeletek tárgyalása a $\Delta = \det(\bar{A})$ és K kifejezések segítségével történtek.

A 12.1. táblázatban összefoglaltuk a kúpszeletek osztályozását az invariánsok alapján.

Invariánsok		Kúpszelet típusa	Kúpszelet kanonikus egyenlete
$\delta > 0$	$\Delta = 0$ 2 képzetes metsző egyenes (γ egy pont)		$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0, (a^2 \geq b^2)$
	$\text{Tr} \cdot \Delta > 0$ képzetes ellipszis ($\gamma = \emptyset$)		$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1, (a^2 \geq b^2)$
	$\text{Tr} \cdot \Delta < 0$ ellipszis (γ egy ellipszis)		$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, (a^2 \geq b^2)$
$\delta < 0$	$\Delta = 0$ 2 metsző egyenes (γ két metsző egyenes)		$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0, (a^2 \geq b^2)$
	$\Delta \neq 0$ hiperbola (γ egy hiperbola)		$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$ parabola (γ egy parabola)		$Y^2 = 2pX, (p > 0)$
	$\Delta = 0$	$K > 0$ 2 párhuzamos egyenes (γ két egyenes)	$\frac{Y^2}{b^2} = 1$
		$K = 0$ 2 egybeeső egyenes (γ egy egyenes)	$Y^2 = 0$
		$K < 0$ 2 párhuzamos, képzetes egyenes ($\gamma = \emptyset$)	$\frac{Y^2}{b^2} = -1$

12.1. táblázat. Kúpszelet típusának meghatározása az együtthatók segítségével.

12.13. ábra. Az $x^2 - 4xy + 4y^2 - 16x + 7y + 14 = 0$ egyenletű kúpszelet.**12.22. Példa**

Néhány példa esetén bemutatjuk hogyan használható a 12.1. táblázat kúpszeletek típusának meghatározására.

(i) A $2x^2 - 6xy + 10y^2 - 8x + 12y + 2 = 0$ kúpszelet esetén

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 10 & 6 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -66, \quad \text{Tr} = 2 + 10 = 12,$$

tehát $\delta > 0$ és $\text{Tr} \cdot \Delta < 0$, ezért a kúpszelet egy ellipszis.

(ii) A $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0$ kúpszelet esetén

$$\delta = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9,$$

tehát $\delta < 0$ és $\Delta \neq 0$, ezért a kúpszelet egy hiperbola.

(iii) A $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ kúpszelet esetén

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -225,$$

tehát $\delta = 0$ és $\Delta \neq 0$, ezért a kúpszelet egy parabola.

(iv) A $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$ kúpszelet esetén

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 & -12 \\ 6 & 4 & -8 \\ -12 & -8 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K = (-12)^2 + (-8)^2 + 3(9 + 4) = 169,$$

tehát $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K > 0$, ezért a kúpszelet két párhuzamos egyenes.

◇

12.6. Példák

12.23. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 25 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk.

◇

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális. Kiszámoljuk a kúpszelet centrumát (szimmetria-középpontját):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} = -\frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{-1}{24} \begin{bmatrix} -24 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ahonnan a centrum $M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$. Az \mathcal{R}' az \mathcal{R} koordináta-rendszer eltoltja, és amelynek origója $O' = M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$. A két koordináta-rendszer közötti áttérési képlet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenletét a következőképpen számoljuk ki. A másodfokú tagok együtthatói változatlanok, nincsenek elsőfokú tagok és a szabadtag $f(1, -2) = (-7) \cdot 1 + 11 \cdot (-2) + 25 = -4$, ahol $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 25$. Ez alapján a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben

$$5(x')^2 - 2x'y' + 5(y')^2 - 4 = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$, amelynek gyökei 4 és 6. Mivel a sajátértékek azonos előjelűek, ezért $\lambda_1 = 4$ (a kisebbik abszolút értékű) és $\lambda_2 = 6$. Kiszámoljuk egy-egy nemnulla sajátvektorukat.

A $\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ -1 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} v_{11} - v_{12} = 0 \\ -v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_1 = (v_{11}, v_{12}) = (\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\alpha = 1$ -et választva $v_1 = (1, 1)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_1 = 4$ sajátértéknek.

A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-6 & -1 \\ -1 & 5-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -v_{21} - v_{22} = 0 \\ -v_{21} - v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_2 = (v_{21}, v_{22}) = (\beta, -\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\beta = 1$ -et választva $v_2 = (1, -1)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_2 = 6$ sajátértéknek. (Figyeljük meg, hogy a v_1 és v_2 vektorok merőlegesek egymásra a standard skalárszorzat szerint.)

A sajátvektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiban:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ebből a mátrixból egy forgatás mátrixát kapjuk, ha az oszlopokban az előjelet úgy választjuk meg, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{R} koordináta-rendszert elforgatjuk az origó körül $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$ -kal, így kapva az \mathcal{R}'' koordináta-rendszert. A koordináta-csere képlete

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}'}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}}_{[M]_{\mathcal{R}}''},$$

ahol (x', y') az \mathcal{R}' -beli, illetve (x'', y'') az \mathcal{R}'' -beli koordináták. Az elforgatott \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete (a vegyes tag eltűnik, a másodfokú tagok együtthatói a sajátértékek lesznek, a szabadtag nem változik):

$$4(x'')^2 + 6(y'')^2 - 4 = 0 \iff (x'')^2 + \frac{(y'')^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1,$$

egy ellipszis kanonikus egyenlete.

Az ábrázoláshoz az \mathcal{R} koordináta-rendszerben felvesszük az $M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$ pontot, amely az eltolt \mathcal{R}' koordináta-rendszer origója. A forgatáshoz az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben felvesszük az

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

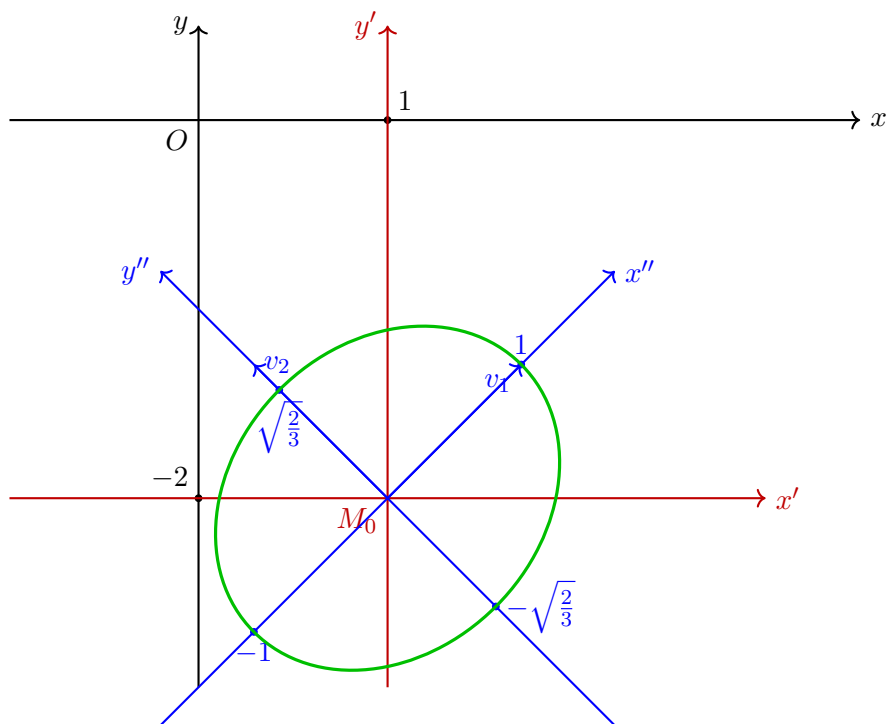
pontokat, amelyek az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyein lévő egységbeosztásokat jelölik. Az M_0 -ból egyeneseket húzva ezeken a pontokon keresztül megkapjuk az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyét. Az \mathcal{R}'' elforgatott koordináta-rendszerben ábrázoljuk a kanonikus egyenletű ellipszist (lásd a 12.14. ábrát). \square

12.24. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 29 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális. Kiszámoljuk a kúpszelet centrumát (szimmetria-középpontját):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} = -\frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{-1}{24} \begin{bmatrix} -24 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

12.14. ábra. Az $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 25 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

ahonnan a centrum $M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$.

Az \mathcal{R}' az \mathcal{R} koordináta-rendszer eltoltja, és amelynek origója $M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$. A két koordináta-rendszer közötti áttérési képlet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenletét a következőképpen számoljuk ki. A másodfokú tagok együtthatói változatlanok, nincsenek elsőfokú tagok és a szabadtag $f(1, -2) = (-7) \cdot 1 + 11 \cdot (-2) + 29 = 0$, ahol $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 29$. Ez alapján a kúpszelet egyenlete:

$$5(x')^2 - 2x'y' + 5(y')^2 = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$, amelynek gyökei 4 és 6. Mivel a sajátértékek azonos előjelűek, ezért $\lambda_1 = 4$ (a kisebbik abszolút értékű) és $\lambda_2 = 6$. Kiszámoljuk egy-egy nemnulla sajátvektorukat.

A $\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ -1 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} v_{11} - v_{12} = 0 \\ -v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_1 = (v_{11}, v_{12}) = (\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\alpha = 1$ -et választva $v_1 = (1, 1)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_1 = 4$ sajátértéknek.

A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-6 & -1 \\ -1 & 5-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -v_{21} - v_{22} = 0 \\ -v_{21} - v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_2 = (v_{21}, v_{22}) = (\beta, -\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\beta = 1$ -et választva $v_2 = (1, -1)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_2 = 6$ sajátértéknek.

A sajátvektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiban:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ebből a mátrixból egy forgatás mátrixát kapjuk, ha az oszlopokban az előjelet úgy választjuk meg, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{R} koordináta-rendszert elforgatjuk az origó körül $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$ -kal, így kapva az \mathcal{R}'' koordináta-rendszert. A koordináta-csere képlete

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix},$$

ahol (x', y') az \mathcal{R}' -beli, illetve (x'', y'') az \mathcal{R}'' -beli koordináták. Az elforgatott \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete (a vegyes tag eltűnik, a másodfokú tagok együtthatói a sajátértékek lesznek, a szabadtag nem változik):

$$4(x'')^2 + 6(y'')^2 = 0 \iff (x'')^2 + \frac{(y'')^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 0,$$

két képzetes metsző egyenes egyenlete ($\gamma = \{M_0\}$) A kúpszeletet és a hozzá tartozó koordináta-rendszereket a 12.15. ábrán ábrázoltuk. \square

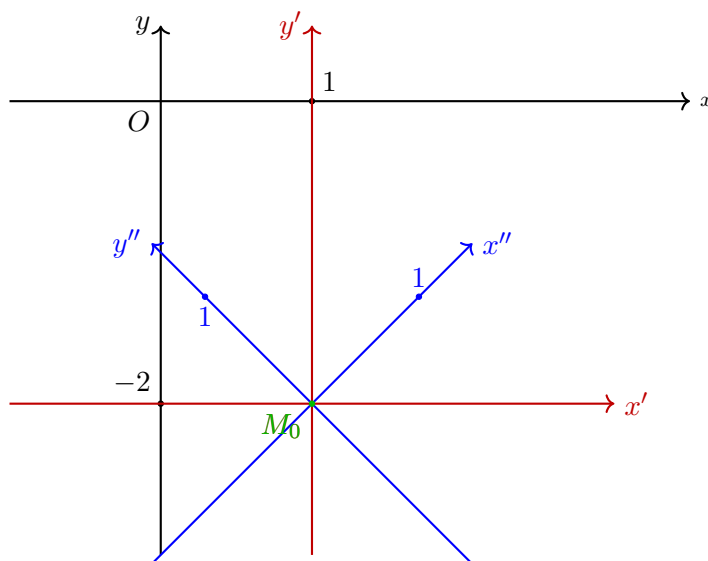
12.25. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 30 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális. Kiszámoljuk a kúpszelet centrumát (szimmetria-középpontját):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} = -\frac{1}{24} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{-1}{24} \begin{bmatrix} -24 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ahonnan a centrum $M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$.



12.15. ábra. Az $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 29 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

Az \mathcal{R}' az \mathcal{R} koordináta-rendszer eltoltja, és amelynek origója $M_0(1, -2)_{\mathcal{R}}$. A két koordináta-rendszer közötti áttérési képlet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenletét a következőképpen számoljuk ki. A másodfokú tagok együtthatói változatlanok, nincsenek elsőfokú tagok és a szabadtag $f(1, -2) = (-7) \cdot 1 + 11 \cdot (-2) + 30 = 1$, ahol $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 14x + 22y + 30$. Ez alapján a kúpszelet egyenlete:

$$5(x')^2 - 2x'y' + 5(y')^2 + 1 = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$, amelynek gyökei 4 és 6. Mivel a sajátértékek azonos előjelűek, ezért $\lambda_1 = 4$ (a kisebbik abszolút értékű) és $\lambda_2 = 6$. Kiszámoljuk egy-egy nemnulla sajátvektorukat.

A $\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ -1 & 5-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} v_{11} - v_{12} = 0 \\ -v_{11} + v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_1 = (v_{11}, v_{12}) = (\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\alpha = 1$ -et választva $v_1 = (1, 1)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_1 = 4$ sajátértéknek.

A $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-6 & -1 \\ -1 & 5-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -v_{21} - v_{22} = 0 \\ -v_{21} - v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_2 = (v_{21}, v_{22}) = (\beta, -\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\beta = -1$ -et választva $v_2 = (-1, 1)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_2 = 6$ sajátértéknek.

A sajátvektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiban:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ebből a mátrixból egy forgatás mátrixát kapjuk, ha az oszlopokban az előjelet úgy választjuk meg, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{R} koordináta-rendszert elforgatjuk az origó körül $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$ -kal, így kapva az \mathcal{R}'' koordináta-rendszert. A koordináta-csere képlete

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix},$$

ahol (x', y') az \mathcal{R}' -beli, illetve (x'', y'') az \mathcal{R}'' -beli koordináták. Az elforgatott \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete (a vegyes tag eltűnik, a másodfokú tagok együtthatói a sajátértékek lesznek, a szabadtag nem változik):

$$4(x'')^2 + 6(y'')^2 + 1 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{(y'')^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2} = -1,$$

amely egy képzetes ellipszis kanonikus egyenlete ($\gamma = \emptyset$). □

12.26. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 160 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. ◇

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális. Kiszámoljuk a kúpszelet centrumát (szimmetria-középpontját):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-52}{2} \\ \frac{-24}{2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{-36} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

ahonnan a centrum $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$.

Az \mathcal{R}' az \mathcal{R} koordináta-rendszer eltoltja, és amelynek origója $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$. A két koordináta-rendszer közötti áttérési képlet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 6 \end{cases}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenletét a következőképpen számoljuk ki. A másodfokú tagok együtthatói változatlanok, nincsenek elsőfokú tagok és a szabadtag $f(-2, -6) = -26 \cdot (-2) - 12 \cdot (-6) - 160 = -36$, ahol $f(x, y) = 5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 160$. Ez alapján a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben:

$$5(x')^2 - 12x'y' - 36 = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$, amelynek gyökei -4 és 9 . Mivel a sajátértékek ellentétes előjelűek, ezért megnézzük, hogy melyik előjele egyezik meg a -36 szabadtag előjelével s abból lesz a λ_2 . Tehát $\lambda_1 = 9$ és $\lambda_2 = -4$. Kiszámoljuk egy-egy nemnulla sajátvektorukat.

A $\lambda_1 = 9$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-9 & -6 \\ -6 & 0-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4v_{11} - 6v_{12} = 0 \\ -6v_{11} - 9v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_1 = (v_{11}, v_{12}) = (3\beta, -2\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\beta = 1$ -et választva $v_1 = (3, -2)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_1 = 9$ sajátértéknek.

A $\lambda_2 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5+4 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 9v_{21} - 6v_{22} = 0 \\ -6v_{21} + 4v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_2 = (v_{21}, v_{22}) = (2\alpha, 3\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\alpha = 1$ -et választva $v_2 = (2, 3)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_2 = -4$ sajátértéknek.

A sajátvektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiban:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

Ebből a mátrixból egy forgatás mátrixát kapjuk, ha az oszlopokban az előjelet úgy választjuk meg, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{R} koordináta-rendszert elforgatjuk az origó körül $\theta = -\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} \simeq -33.69^\circ$ -kal, így kapva az \mathcal{R}'' koordináta-rendszert. A koordináta-csere képlete

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix},$$

ahol (x', y') az \mathcal{R}' -beli, illetve (x'', y'') az \mathcal{R}'' -beli koordináták. Az elforgatott \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete (a vegyes tag eltűnik, a másodfokú tagok együtthatói a sajátértékek lesznek, a szabadtag nem változik):

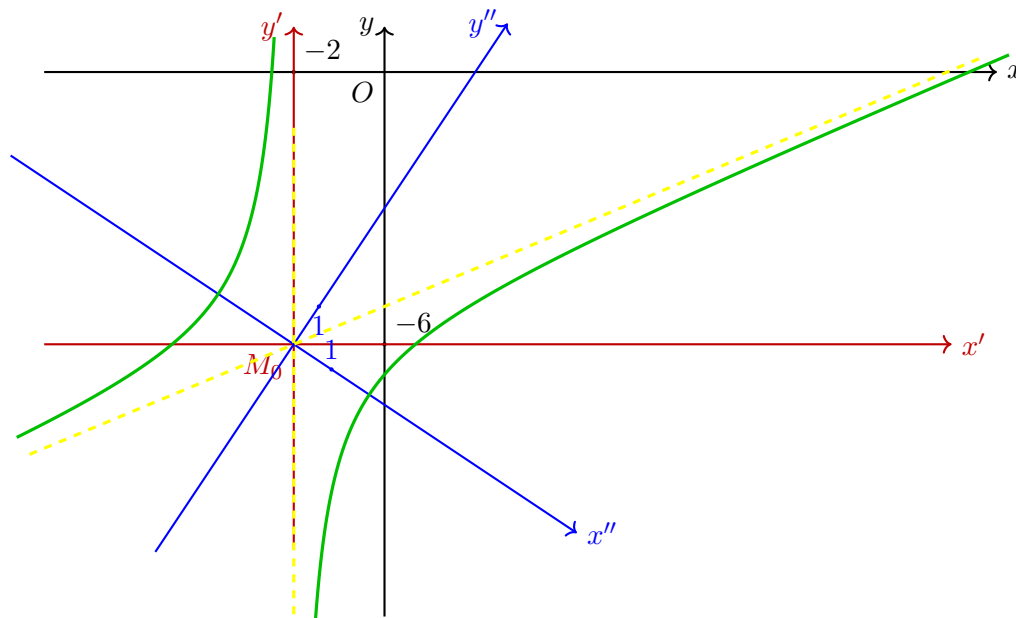
$$9(x'')^2 - 4(y'')^2 - 36 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{2^2} - \frac{(y'')^2}{3^2} = 1,$$

hiperbola kanonikus egyenlete.

Az ábrázoláshoz az \mathcal{R} koordináta-rendszerben felvesszük az $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$ pontot, amely az \mathcal{R}' koordináta-rendszer origója. A forgatáshoz az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben felvesszük az

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

pontokat, amelyek az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyein lévő egységbeosztásokat jelölik. Az M_0 pontból egyeneseket húzva ezeken a pontokon keresztül megkapjuk az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyét. Az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben megrajzoljuk az $\frac{(x'')^2}{2^2} - \frac{(y'')^2}{3^2} = 1$ kanonikus egyenletű hiperbolát és az $y'' = \pm \frac{3}{2}x''$ aszimptotait (lásd a 12.16. ábrát). \square



12.16. ábra. Az $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 160 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

12.27. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 88 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális. Kiszámoljuk a kúpszelet centrumát (szimmetria-középpontját):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -52 \\ -24 \end{bmatrix} = \frac{-1}{-36} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

ahonnan a centrum $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$.

Az \mathcal{R}' az \mathcal{R} koordináta-rendszer eltoltja, és amelynek origója $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$. A két koordináta-rendszer közötti áttérési képlet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 6 \end{cases}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenletét a következőképpen számoljuk ki. A másodfokú tagok együtthatói változatlanok, nincsenek elsőfokú tagok és a szabadtag $f(-2, -6) =$

$-26 \cdot (-2) - 12 \cdot (-6) - 88 = 36$, ahol $f(x, y) = 5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 88$. Ez alapján a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben:

$$5(x')^2 - 12x'y' + 36 = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$, amelynek gyökei -4 és 9 . Mivel a sajátértékek ellentétes előjelűek, ezért megnézzük, hogy melyik előjele egyezik meg a 36 szabadtag előjelével és abból lesz a λ_2 . Tehát $\lambda_1 = -4$ és $\lambda_2 = 9$. Kiszámoljuk egy-egy nemnulla sajátvektorukat.

A $\lambda_1 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5+4 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 9v_{11} - 6v_{12} = 0 \\ -6v_{11} + 4v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_1 = (v_{11}, v_{12}) = (2\alpha, 3\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\alpha = 1$ -et választva $v_1 = (2, 3)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_1 = -4$ sajátértéknek.

A $\lambda_2 = 9$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-9 & -6 \\ -6 & 0-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4v_{21} - 6v_{22} = 0 \\ -6v_{21} - 9v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_2 = (v_{21}, v_{22}) = (3\beta, -2\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\beta = -1$ -et választva $v_2 = (3, -2)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_2 = 9$ sajátértéknek.

A sajátvektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiban:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

Ebből a mátrixból egy forgatás mátrixát kapjuk, ha az oszlopokban az előjelet úgy választjuk meg, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

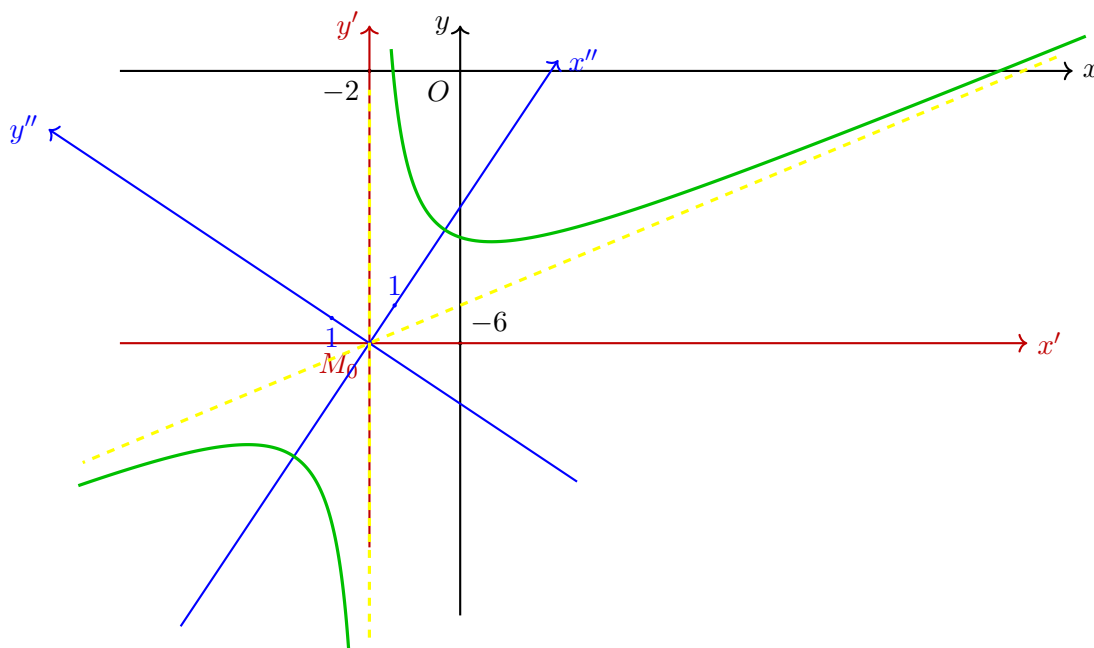
Az \mathcal{R} koordináta-rendszert elforgatjuk az origó körül $\theta = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} \simeq 56.3^\circ$ -kal, így kapva az \mathcal{R}'' koordináta-rendszert. A koordináta-csere képlete

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix},$$

ahol (x', y') az \mathcal{R}' -beli, illetve (x'', y'') az \mathcal{R}'' -beli koordináták. Az elforgatott \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete (a vegyes tag eltűnik, a másodfokú tagok együtthatói a sajátértékek lesznek, a szabadtag nem változik):

$$-4(x'')^2 + 9(y'')^2 + 36 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{3^2} - \frac{(y'')^2}{2^2} = 1,$$

hiperbola kanonikus egyenlete (lásd a 12.17. ábrát).

12.17. ábra. Az $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 88 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

Az ábrázoláshoz az \mathcal{R} koordináta-rendszerben felvesszük az $M_0(-2, -6)$ pontot, amely az \mathcal{R} koordináta-rendszer origója. A forgatáshoz az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben felvesszük az

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

pontokat, amelyek az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyein lévő egységbeosztásokat jelölik. Az M_0 -ból egyeneseket húzva ezeken a pontokon keresztül megkapjuk az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyét. Az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben megrajzoljuk az $\frac{(x'')^2}{3^2} - \frac{(y'')^2}{2^2} = 1$ kanonikus egyenletű hiperbolát és az $y'' = \pm \frac{2}{3}x''$ aszimptotait.

□

12.28. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 124 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. ◇

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$, ezért a kúpszelet centrális. Kiszámoljuk a kúpszelet centrumát (szimmetria-középpontját):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-52}{2} \\ \frac{-24}{2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{-36} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -26 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix},$$

ahonnan a centrum $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$.

Az \mathcal{R}' az \mathcal{R} koordináta-rendszer eltoltja, és amelynek origója $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$. A két koordináta-rendszer közötti áttérési képlet pedig

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 6 \end{cases}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenletét a következőképpen számoljuk ki. A másodfokú tagok együtthatói változatlanok, nincsenek elsőfokú tagok és a szabadtag $f(-2, -6) = -26 \cdot (-2) - 12 \cdot (-6) - 124 = 0$, ahol $f(x, y) = 5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 124$. Ez alapján a kúpszelet egyenlete az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben:

$$5(x')^2 - 12x'y' = 0.$$

A forgatáshoz kiszámoljuk az $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$, amelynek gyökei -4 és 9 . Mivel a sajátértékek ellentétes előjelűek, de a szabadtag 0 , ezért $\lambda_1 = -4$ (a kisebbik abszolút értékű) és $\lambda_2 = 9$. Kiszámoljuk egy-egy nemnulla sajátvektorukat.

A $\lambda_1 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5+4 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 9v_{11} - 6v_{12} = 0 \\ -6v_{11} + 4v_{12} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_1 = (v_{11}, v_{12}) = (2\alpha, 3\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\alpha = 1$ -et választva $v_1 = (2, 3)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_1 = -4$ sajátértéknek.

A $\lambda_2 = 9$ sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{bmatrix} 5-9 & -6 \\ -6 & 0-9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4v_{21} - 6v_{22} = 0 \\ -6v_{21} - 9v_{22} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerből számoljuk ki, melynek megoldásai $v_2 = (v_{21}, v_{22}) = (3\beta, -2\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ alakúak. Például $\beta = 1$ -et választva $v_2 = (3, -2)$ egy nemnulla sajátvektora a $\lambda_2 = 9$ sajátértéknek.

A sajátvektorokat normalizálva beírjuk egy mátrix oszlopaiban:

$$\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$$

Ebből a mátrixból egy forgatás mátrixát kapjuk, ha az oszlopokban az előjelet úgy választjuk meg, hogy a főátlón nemnegatív számok legyenek:

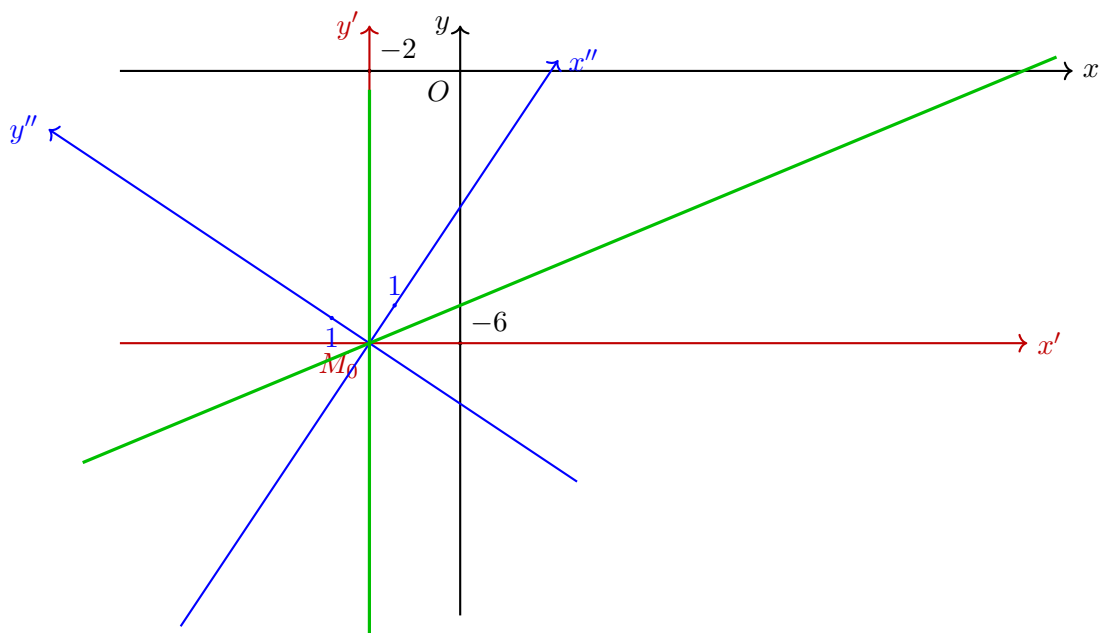
$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Az \mathcal{R} koordináta-rendszert elforgatjuk az origó körül $\theta = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} \simeq 56.3^\circ$ -kal, így kapva az \mathcal{R}'' koordináta-rendszert. A koordináta-csere képlete

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix},$$

ahol (x', y') az \mathcal{R}' -beli, illetve (x'', y'') az \mathcal{R}'' -beli koordináták. Az elforgatott \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben a kúpszelet egyenlete (a vegyes tag eltűnik, a másodfokú tagok együtthatói a sajátértékek lesznek, a szabadtag nem változik):

$$-4(x'')^2 + 9(y'')^2 = 0 \iff \frac{(x'')^2}{3^2} - \frac{(y'')^2}{2^2} = 0,$$

12.18. ábra. Az $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 124 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása

amely két metsző egyenes kanonikus egyenlete.

Az ábrázoláshoz az \mathcal{R} koordináta-rendszerben felvesszük az $M_0(-2, -6)_{\mathcal{R}}$ pontot, amely az \mathcal{R}' koordináta-rendszer origója. A forgatáshoz az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben felvesszük az

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

pontokat, amelyek az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyein lévő egységbeosztásokat jelölik. Az M_0 pontból egyeneseket húzva ezeken a pontokon keresztül megkapjuk az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer x'' -, illetve y'' -tengelyét. Az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben megrajzoljuk az $y' = \pm \frac{2}{3}x'$ metsző egyeneseket (lásd a 12.18. ábrát).

Megjegyezzük, hogy $5x^2 - 12xy - 52x - 24y - 124 = (x + 2)(5x - 12y - 62)$. \square

12.29. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $x^2 - 6xy + 9y^2 - 5x + 35y - 20 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, ezért a kúpszelet parabola típusú. Először forgatást, majd eltolást hajtunk végre.

Diagonalizáljuk az $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ehhez kiszámoljuk a sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Mivel $\det(A) = 0$, ezért $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1 + 9 = 10$ a két sajátérték. A $\lambda_1 = 0$ -hoz tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_1 = (3, 1)$, míg a $\lambda_2 = 10$ -hez tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_2 = (-1, 3)$. A normalizált sajátvektorokat beírjuk egy mátrix oszlopaiba úgy, hogy egy forgatás mátrixát kapjuk (a mátrix ortogonális és a determinánsa

1 legyen):

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{-1}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

Megvizsgáljuk, hogy előjelet kell-e cserélni a mátrixban: $-5 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 20 > 0$, ezért $\varepsilon = -1$ és a fenti mátrixban előjelet kellcserélni, hogy megkapjuk a forgatás mátrixát.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Elforgatjuk az \mathcal{R} koordináta-rendszert az O origó körül $\theta = 180^\circ + \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 198.43^\circ$ szöggel, így kapva az \mathcal{R}' koordináta-rendszert:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{-x'-3y'}{\sqrt{10}} \end{cases}. \quad (12.22)$$

A kúpszelet egyenletét az \mathcal{R} koordináta-rendszerben úgy kapjuk meg, hogy a kúpszelet egyenletébe végrehajtjuk a (12.22) változócsere:

$$\begin{aligned} & 10(y')^2 + \begin{bmatrix} -5 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 20 = 0 \\ \iff & 10(y')^2 - 5 \cdot \frac{-3x' + y'}{\sqrt{10}} + 35 \cdot \frac{-x' - 3y'}{\sqrt{10}} - 20 = 0 \\ \iff & 10 \cdot (y')^2 - \frac{20}{\sqrt{10}} \cdot x' - \frac{110}{\sqrt{10}} \cdot y' - 20 = 0 \\ \iff & (y')^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{11}{\sqrt{10}}y' - 2 = 0. \end{aligned}$$

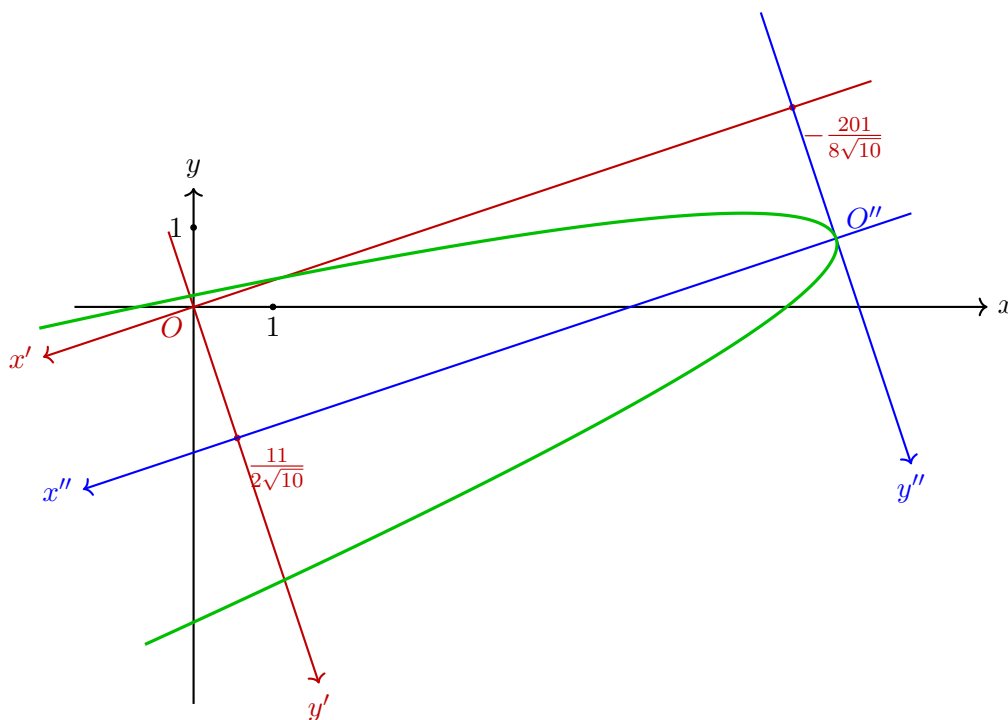
Ezután egy olyan $\begin{cases} x' = x'' + x'_0 \\ y' = y'' + y'_0 \end{cases}$ koordináta-cserét végzünk, hogy utána az y'' tag együtthatója és a szabadtag 0 legyen.

$$\begin{aligned} & (y')^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{11}{\sqrt{10}}y' - 2 = 0 \\ \iff & \left[(y')^2 - 2 \cdot \frac{11}{2\sqrt{10}}y' + \left(\frac{11}{2\sqrt{10}} \right)^2 \right] - \frac{2}{\sqrt{10}}x' - 2 - \frac{121}{40} = 0 \\ \iff & \left(y' - \frac{11}{2\sqrt{10}} \right)^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{201}{40} = 0 \\ \iff & \underbrace{\left(y' - \frac{11}{2\sqrt{10}} \right)^2}_{y''} - \frac{2}{\sqrt{10}} \underbrace{\left(x' + \frac{201}{8\sqrt{10}} \right)}_{x''} = 0 \\ \iff & (y'')^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}x'' = 0 \\ \iff & (y'')^2 = 2 \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)}_p x'', \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{201}{8\sqrt{10}} \\ y'' = y' - \frac{11}{2\sqrt{10}} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' - \frac{201}{8\sqrt{10}} \\ y' = y'' + \frac{11}{2\sqrt{10}} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{201}{8\sqrt{10}} \\ \frac{11}{2\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_{[O'']_{\mathcal{R}'}}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszert eltoljuk olyan módon, hogy az \mathcal{R}'' koordináta-rendszer origója kerüljön az $O''(-\frac{201}{8\sqrt{10}}, \frac{11}{2\sqrt{10}})_{\mathcal{R}'}$ pontba. Azt kaptuk, hogy a kúpszeletünk egyenlete az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben $(y'')^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)x''$, amely egy (kanonikus egyenletű) parabola (lásd a 12.19. ábrát). \square



12.19. ábra. Az $x^2 - 6xy + 9y^2 - 5x + 35y - 20 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

12.30. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 30y - 20 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, ezért a kúpszelet parabola típusú. Először forgatást, majd eltolást hajtunk végre.

Diagonalizáljuk az $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ehhez kiszámoljuk a sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Mivel $\det(A) = 0$, ezért $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1 + 9 = 10$ a két sajátérték. A $\lambda_1 = 0$ -hoz tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_1 = (3, 1)$, míg a $\lambda_2 = 10$ -hez tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_2 = (-1, 3)$. A normalizált sajátvektorokat beírjuk egy mátrix oszlopaiba úgy, hogy egy forgatás mátrixát kapjuk (a mátrix ortogonális és a determinánsa

1 legyen):

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{-1}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

Megvizsgáljuk, hogy előjelet kell-e cserélni a mátrixban: $-10 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 0 \leq 0$, ezért $\varepsilon = 1$ és a fenti mátrixban nem kell előjelet cserélni, hogy megkapjuk a forgatás mátrixát.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Elforgatjuk az \mathcal{R} koordináta-rendszert az O origó körül $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 18.43^\circ$ szöggel, így kapva az \mathcal{R}' koordináta-rendszert:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \end{cases}. \quad (12.23)$$

A kúpszelet egyenletét az \mathcal{R} koordináta-rendszerben úgy kapjuk meg, hogy az kúpszelet egyenletébe végrehajtjuk a (12.23) változócsere:

$$\begin{aligned} & 10(y')^2 + \begin{bmatrix} -10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 20 = 0 \\ \iff & 10(y')^2 - 10 \cdot \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} + 30 \cdot \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} - 20 = 0 \\ \iff & 10 \cdot (y')^2 + \frac{100}{\sqrt{10}} \cdot y' - 20 = 0 \\ \iff & (y')^2 + \sqrt{10}y' - 2 = 0. \end{aligned}$$

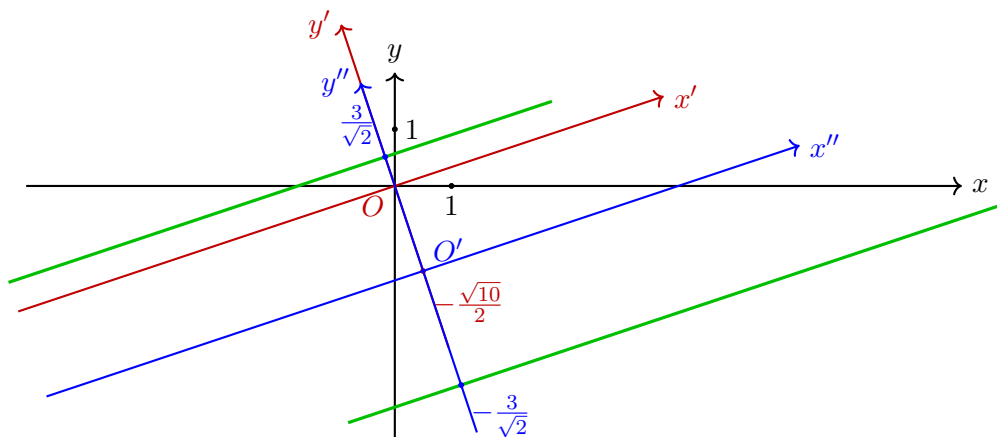
Ezután egy olyan $\begin{cases} x' = x'' + x'_0 \\ y' = y'' + y'_0 \end{cases}$ koordináta-cserét végzünk, hogy utána az y'' tag együtthatója és a szabadtag 0 legyen.

$$\begin{aligned} & (y')^2 + \sqrt{10}y' - 2 = 0 \\ \iff & \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}y' + \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 \right] - 2 - \frac{10}{4} = 0 \\ \iff & \left(y' + \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 - \frac{9}{2} = 0 \\ \iff & \underbrace{\left(y' + \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2}_{y''} = \frac{9}{2} \\ \iff & (y'')^2 = \frac{9}{2} \\ \iff & y'' = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}}_{[O'']_{\mathcal{R}'}}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszert eltoljuk olyan módon, hogy az új \mathcal{R}'' koordináta-rendszer origója kerüljön az $O''(0, -\frac{\sqrt{10}}{2})_{\mathcal{R}'}$ pontba. Azt kaptuk, hogy a kúpszeletünk egyenlete az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben $y'' = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$, amely két párhuzamos egyenes (lásd a 12.20. ábrát). \square



12.20. ábra. Az $x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 30y - 20 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

12.31. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 30y + 25 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, ezért a kúpszelet para-

bola típusú. Először forgatást, majd eltolást hajtunk végre. Diagonalizáljuk az $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ehhez kiszámoljuk a sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Mivel $\det(A) = 0$, ezért $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1 + 9 = 10$ a két sajátérték. A $\lambda_1 = 0$ -hoz tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_1 = (3, 1)$, míg a $\lambda_2 = 10$ -hez tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_2 = (-1, 3)$. A normalizált sajátvektorokat beírjuk egy mátrix oszlopaiba úgy, hogy egy forgatás mátrixát kapjuk (a mátrix ortogonális és a determinánsa 1 legyen):

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{-1}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

Megvizsgáljuk, hogy előjelet kell-e cserélni a mátrixban: $-10 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 0 \leq 0$, ezért $\varepsilon = 1$ és a fenti mátrixban nem kell előjelet cserélni, hogy megkapjuk a forgatás mátrixát.

$$S = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Elforgatjuk az \mathcal{R} koordináta-rendszert az O origó körül $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 18.43^\circ$ szöggel, így kapva az \mathcal{R}' koordináta-rendszert:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \end{cases}. \quad (12.24)$$

A kúpszelet egyenletét az \mathcal{R} koordináta-rendszerben úgy kapjuk meg, hogy a kúpszelet egyenletébe végrehajtjuk a (12.24) változócsere:

$$\begin{aligned} 10(y')^2 + \begin{bmatrix} -10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 25 &= 0 \\ \iff 10(y')^2 - 10 \cdot \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} + 30 \cdot \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} + 25 &= 0 \\ \iff 10 \cdot (y')^2 + \frac{100}{\sqrt{10}} \cdot y' + 25 &= 0 \\ \iff (y')^2 + \sqrt{10}y' + \frac{5}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Ezután egy olyan $\begin{cases} x' = x'' + x'_0 \\ y' = y'' + y'_0 \end{cases}$ koordináta-cserét végzünk, hogy utána az y'' tag együtthatója és a szabadtag 0 legyen.

$$\begin{aligned} (y')^2 + \sqrt{10}y' + \frac{5}{2} &= 0 \\ \iff \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}y' + \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 \right] + \frac{5}{2} - \frac{10}{4} &= 0 \\ \iff \left[\underbrace{y' + \frac{\sqrt{10}}{2}}_{y''} \right]^2 + \frac{5}{2} - \frac{10}{4} &= 0 \\ \iff (y'')^2 &= 0, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}}_{[O'']_{\mathcal{R}'}}.$$

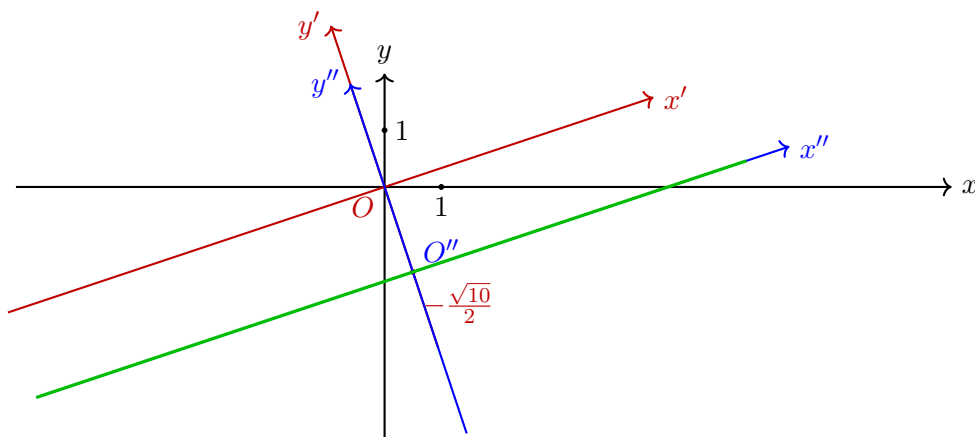
Az \mathcal{R}' koordináta-rendszert eltoljuk olyan módon, hogy az új \mathcal{R}'' koordináta-rendszer origója kerüljön az $O''(0, -\frac{\sqrt{10}}{2})_{\mathcal{R}'}$ pontba. Azt kaptuk, hogy a kúpszeletünk egyenlete az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben $(y'')^2 = 0$, amely két egybeeső egyenes (lásd a 12.21. ábrát). \square

12.32. Példa

A sík (2-dimenziós való affin tér) adott \mathcal{R} ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszeréhez viszonyítva egy kúpszelet egyenlete $x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 30y + 50 = 0$. Határozzuk meg a kúpszelet kanonikus egyenletét, típusát, majd ábrázoljuk. \diamond

Megoldás. Megvizsgáljuk a kúpszelet típusát. Mivel $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, ezért a kúpszelet para-

bola típusú. Először forgatást, majd eltolást hajtunk végre. Diagonalizáljuk az $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ehhez kiszámoljuk a sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Mivel $\det(A) = 0$, ezért $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = \text{Tr}(A) = 1 + 9 = 10$ a két sajátérték. A $\lambda_1 = 0$ -hoz tartozó, egy nemnulla sajátvektor $v_1 = (3, 1)$, míg a $\lambda_2 = 10$ -hez tartozó, egy nemnulla sajátvektor

12.21. ábra. Az $x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 30y + 25 = 0$ egyenletű kúpszeletet ábrázolása.

$v_2 = (-1, 3)$. A normalizált sajátvektorokat beírjuk egy mátrix oszlopaiba úgy, hogy egy forgatás mátrixát kapjuk (a mátrix ortogonális és a determinánsa 1 legyen):

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{-1}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} & \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

Megvizsgáljuk, hogy előjelet kell-e cserélni a mátrixban: $-10 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 0 \leq 0$, ezért $\varepsilon = 1$ és a fenti mátrixban nem kell előjelet cserélni, hogy megkapjuk a forgatás mátrixát:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Elforgatjuk az \mathcal{R} koordináta-rendszert az O origó körül $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 18.43^\circ$ szöggel, így kapva az \mathcal{R}' koordináta-rendszert:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} \end{cases}. \quad (12.25)$$

A kúpszelet egyenletét az \mathcal{R}' koordináta-rendszerben úgy kapjuk meg, hogy a kúpszelet egyenletébe végrehajtjuk a (12.25) változócserét:

$$\begin{aligned} 10 \cdot (y')^2 + \begin{bmatrix} -10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 50 &= 0 \\ \iff 10 \cdot (y')^2 - 10 \cdot \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} + 30 \cdot \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}} + 50 &= 0 \\ \iff 10 \cdot (y')^2 + \frac{100}{\sqrt{10}} \cdot y' + 50 &= 0 \\ \iff (y')^2 + \sqrt{10}y' + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Ezután egy olyan $\begin{cases} x' = x'' + x'_0 \\ y' = y'' + y'_0 \end{cases}$ koordináta-cserét végzünk, hogy utána az y'' tag együtthatója és a szabadtag 0 legyen (teljes négyzetet alakítunk ki).

$$(y')^2 + \sqrt{10}y' + 5 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} y' + \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 \right] + 5 - \frac{10}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\underbrace{y' + \frac{\sqrt{10}}{2}}_{y''} \right]^2 + \frac{5}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow (y'')^2 + \frac{5}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow (y'')^2 = -\frac{5}{2},
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}}_{[O'']_{\mathcal{R}'}}.$$

Az \mathcal{R}' koordináta-rendszert eltoljuk olyan módon, hogy az új \mathcal{R}'' koordináta-rendszer origója kerüljön az $O''(0, -\frac{\sqrt{10}}{2})_{\mathcal{R}'}$ pontba. Azt kaptuk, hogy a kúpszeletünk egyenlete az \mathcal{R}'' koordináta-rendszerben $(y'')^2 = -\frac{5}{2}$, amely két párhuzamos képzetes egyenes ($\gamma = \emptyset$). \square

A. függelék

Jobb oldali csoportthatás

Nem fogjuk használni, de megemlítjük, hogy létezik jobb oldali csoportthatás is. Legyen (\mathcal{G}, \cdot) egy csoport, amelynek semleges eleme $e \in \mathcal{G}$ és legyen \mathcal{X} egy nemüres halmaz.

A.1. Értelmezés

A $t : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény egy *jobb oldali csoportthatás* az \mathcal{X} halmazon, ha

- (i) $t(t(x, g_1), g_2) = t(x, g_1 \cdot g_2)$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén,
- (ii) $t(x, e) = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén.

A tömörebb $x * g = t(x, g)$ jelölést is szokták használni. Ebben az esetben az értelmezés két feltétele a következőképpen fog kinézni:

- (i) $(x * g_1) * g_2 = x * (g_1 \cdot g_2)$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén,
- (ii) $x * e = x$, minden $x \in \mathcal{X}$ esetén.

A.2. Megjegyzés

Egy hatás nem attól lesz jobb oldali, hogy a csoport elemeit a jobb oldalra írjuk. Az értelmezés első pontját szóban úgy tudjuk kifejezni, hogy ha a $g_1 \cdot g_2$ szorzattal hatunk az x -re az ugyanaz mintha előbb a g_1 -gyel (a szorzat bal oldali vagy első tényezőjével) hatunk x -re, majd g_2 -vel (a szorzat jobb oldali vagy első tényezőjével) hatunk az eredményre. Tehát a bal oldali hatáshoz képest fordított sorrendben hatunk a $g_1 \cdot g_2$ szorzat tényezőivel. \diamond

A.3. Példa

A $\overline{ev} : \mathcal{X} \times S_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, $\overline{ev}(x, f) = f^{-1}(x)$ függvény egy jobb oldali $S_{\mathcal{X}}$ -hatást eredményez az \mathcal{X} halmazon, ahol $S_{\mathcal{X}}$ az \mathcal{X} nemüres halmaz szimmetrikus-csoportja. \diamond

Jobb oldali csoportthatás esetén is teljesülni fog az 1.28. Lemma megfelelője.

A.4. Tulajdonság

Ha $t : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ egy jobb oldali csoportthatás, akkor

- (i) $t_g = t(-, g) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bijektív, minden $g \in \mathcal{G}$ esetén, vagyis $t_g \in S_{\mathcal{X}}$,
- (ii) $(t_g)^{-1} = t_{g^{-1}}$, minden $g \in \mathcal{G}$ esetén.

Az 1.29. Tulajdonság megfelelője jobb oldali csoportthatás esetén a következő.

A.5. Tulajdonság

A $t : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ függvény egy jobb oldali csoportthatás pontosan akkor, ha $T : \mathcal{G} \rightarrow S_{\mathcal{X}}, T(g) = t_g$, ahol $t_g = t(-, g) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy anti-csoportmorfizmus vagyis $T(g_1 \cdot g_2) = T(g_2) \circ T(g_1)$, minden $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ esetén.

Megemlíjtjük a következő jobb oldali csoportthatásokat.

A.6. Példa

Legyen $\mathcal{X} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ az $(m \times n)$ -es valós mátrixok halmaza és $\mathcal{G} = GL_n(\mathbb{R})$ az $(n \times n)$ -es invertálható valós mátrixok csoportja a szorzásra nézve. A

$$* : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A * U := AU$$

egy jobb oldali csoportthatás. ◇

A.7. Példa

Legyen $\mathcal{X} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ az $(m \times n)$ -es valós mátrixok halmaza és $\mathcal{G} = GL_m(\mathbb{R})$ az $(m \times m)$ -es invertálható valós mátrixok csoportja a szorzásra nézve. A

$$* : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times GL_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A * U := U^{-1}A$$

egy jobb oldali csoportthatás. ◇

A.8. Példa

Legyen $\mathcal{X} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ az $(n \times n)$ -es négyzetes valós mátrixok halmaza és $\mathcal{G} = GL_n(\mathbb{R})$ az $(n \times n)$ -es invertálható valós mátrixok csoportja a szorzásra nézve. A

$$* : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A * U := U^{-1}AU$$

konjugálás egy jobb oldali csoportthatás. ◇

A.1. Kapcsolat jobb és bal oldali csoportthatások között

Mivel egy (nem kommutatív) \mathcal{G} csoport esetén $(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$, ezért a következő kapcsolat áll fenn a jobb és bal oldali hatások között.

A.9. Tulajdonság

(i) Ha $\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy bal oldali csoportthatás, akkor

$$\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \psi(x, g) = \phi(g^{-1}, x)$$

egy jobb oldali csoportthatás.

(ii) Ha $\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ egy jobb oldali csoportthatás, akkor

$$\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \phi(g, x) = \psi(x, g^{-1})$$

egy bal oldali csoportthatás.

A jobb oldali és bal oldali csoportthatást az különbözteti meg, hogy egy $g_1 \cdot g_2$ szorzat esetén milyen sorrendben hatunk a halmaz elemeire a szorzat tényezőivel (lásd az 1.3. és A.2. Megjegyzéseket).

Ezért kommutatív csoport esetén nincs lényegi különbség a jobb és bal oldali csoportthatás között, csak annyi a különbség, hogy a bal oldali csoportthatást megadó függvényben az értelmezési tartomány $\mathcal{G} \times \mathcal{X}$, míg jobb oldali esetén $\mathcal{X} \times \mathcal{G}$. Emiatt \mathcal{G} kommutatív csoport hatása esetén egyszerűen csoportthatást mondhatunk.

A.10. Tulajdonság

Legyen (\mathcal{G}, \cdot) egy kommutatív csoport és \mathcal{X} egy nemüres halmaz. Egy jobb oldali csoportthatás egyben bal oldali csoportthatás is, és fordítva. Pontosabban,

- (i) ha $\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ egy bal oldali csoportthatás, akkor $\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$, $\psi(x, g) = \phi(g, x)$ egy jobb oldali csoportthatás;
- (ii) ha $\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ egy jobb oldali csoportthatás, akkor $\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $\phi(g, x) = \psi(x, g)$ egy bal oldali csoportthatás.

B. függelék

Műveletek vektorterek részhalmazaival

Egy \mathcal{V} \mathbb{K} -vektortér részhalmazaival a következő műveleteket értelmezzük.

B.1. Értelmezés

Az $a \in \mathcal{V}$ vektor és a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmaz összege

$$a + \mathcal{P} = \{a + p \in \mathcal{V} \mid p \in \mathcal{P}\}.$$

A $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}$ és a $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmazok összege

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} := \{p + q \in \mathcal{V} \mid p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}\}.$$

A $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmaz szorzása a $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárral

$$\lambda \cdot \mathcal{P} := \{\lambda p \in \mathcal{V} \mid p \in \mathcal{P}\},$$

sajátosan $-\mathcal{P} := (-1) \cdot \mathcal{P}$.

B.2. Megjegyzés

Általában $\mathcal{P} + \mathcal{P} \neq 2\mathcal{P}$, csak $2\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} + \mathcal{P}$. Például, $\mathcal{P} = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{P} + \mathcal{P} = \{0, 1, 2\}$, de $2 \cdot \mathcal{P} = \{0, 2\}$. \diamond

B.3. Tulajdonság

- (i) $0 \cdot \mathcal{P} = \{\vec{0}\}$, minden $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}$ nemüres részhalmazra.
- (ii) $\langle v_1, \dots, v_n \rangle + \langle w_1, \dots, w_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \rangle$.
- (iii) Ha \mathcal{U} lineáris résztere \mathcal{V} -nek és $\lambda \in \mathbb{K}^*$, akkor $\lambda \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- (iv) Ha \mathcal{U} és \mathcal{W} lineáris részterei \mathcal{V} -nek, akkor $\lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W}$ is lineáris résztere \mathcal{V} -nek, minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ skalár esetén. Sajátosan $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ és $\mathcal{U} - \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- (v) Ha \mathcal{U} lineáris résztere \mathcal{V} -nek, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$ egy nemüres részhalmaza és $u \in \mathcal{U}$ eleme, akkor $\mathcal{P} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ és $u + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- (vi) minden nem üres $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ részhalmaz esetén $\mathcal{P} + (\mathcal{Q} + \mathcal{S}) = (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) + \mathcal{S}$ és $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{Q} + \mathcal{P}$.

Bizonyítás. (i) Mivel $0 \cdot p = \vec{0}$ minden $p \in \mathcal{V}$ esetén, ezért $0 \cdot \mathcal{P} = \{0 \cdot p \mid p \in \mathcal{P}\} = \{\vec{0}\}$.

(ii) Ha

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}\}, \\ \mathcal{W} &= \langle w_1, \dots, w_m \rangle = \{h_1 w_1 + \dots + h_m w_m \mid h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}\}, \\ \mathcal{Z} &= \langle v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \rangle \\ &= \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n + h_1 w_1 + \dots + h_m w_m \mid k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}\},\end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned}\mathcal{U} + \mathcal{W} &= \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}\} + \{h_1 w_1 + \dots + h_m w_m \mid h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) + (h_1 w_1 + \dots + h_m w_m) \mid k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathcal{Z}.\end{aligned}$$

(iii) Mivel \mathcal{U} lineáris résztere \mathcal{V} -nek, ezért minden $u \in \mathcal{U}$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda \cdot u \in \mathcal{U}$, tehát $\lambda \cdot \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$. Fordítva, $\mathcal{U} = 1 \cdot \mathcal{U} = (\lambda \lambda^{-1}) \cdot \mathcal{U} = \lambda \cdot (\lambda^{-1} \cdot \mathcal{U}) \subseteq \lambda \cdot \mathcal{U}$. Tehát, ha $\lambda \in \mathbb{K}^*$, akkor $\mathcal{U} = \lambda \cdot \mathcal{U}$.

(iv) Mivel \mathcal{U} és \mathcal{W} lineáris részterei \mathcal{V} -nek, ezért $\vec{0} \in \mathcal{U}$ és $\vec{0} \in \mathcal{W}$ és $\vec{0} = \lambda \cdot \vec{0} + \mu \cdot \vec{0} \in \lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W}$, tehát $\lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W} \neq \emptyset$. Ha $v_1 = \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot w_1 \in \lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W}$ és $v_2 = \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot w_2 \in \lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W}$, akkor

$$\begin{aligned}k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 &= k_1 \cdot (\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot w_1) + k_2 \cdot (\lambda \cdot u_2 + \mu \cdot w_2) \\ &= \lambda \cdot (k_1 u_1 + k_2 u_2) + \mu \cdot (k_1 w_1 + k_2 w_2) \\ &\in \lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W},\end{aligned}$$

mert $k_1 u_1 + k_2 u_2 \in \mathcal{U}$ és $k_1 w_1 + k_2 w_2 \in \mathcal{W}$, mivel \mathcal{U} és \mathcal{W} lineáris részterei V -nek. Tehát $\lambda \cdot \mathcal{U} + \mu \cdot \mathcal{W}$ lineáris résztere \mathcal{V} -nek.

Mivel \mathcal{U} lineáris résztere \mathcal{V} -nek, ezért minden $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ esetén $u_1 + u_2 \in \mathcal{U}$ és $u_1 - u_2 \in \mathcal{U}$, tehát $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ és $\mathcal{U} - \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$. Továbbá, $\vec{0} \in \mathcal{U}$, illetve minden $u \in \mathcal{U}$ esetén $u = u + \vec{0}$ és $u = u - \vec{0}$, ezért $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{U}$ és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} - \mathcal{U}$. Tehát $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ és $\mathcal{U} - \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

(v) Mivel \mathcal{U} lineáris részter és $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$, ezért az előző alpont alapján $\mathcal{P} + \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Mivel $\mathcal{P} \neq \emptyset$, ezért létezik $p \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{U}$. Minden $u \in \mathcal{U}$ esetén $u' = u - p \in \mathcal{U} - \mathcal{P} \subseteq \mathcal{U} - \mathcal{U} = \mathcal{U}$, ezért $u = p + (u - p) = p + u' \in \mathcal{P} + \mathcal{U}$, így $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P} + \mathcal{U}$. Tehát $\mathcal{P} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

A $\mathcal{P} = \{u\}$ esetben megkapjuk az $u + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ esetet.

(vi) A nemüres részhalmazok összeadása kommutatív és asszociatív, mert a V vektortérben az összeadás asszociatív és kommutatív:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} + (\mathcal{Q} + \mathcal{S}) &= \{p + (q + s) \mid p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{S}\} \\ &= \{(p + q) + s \mid p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{S}\} \\ &= (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) + \mathcal{S},\end{aligned}$$

és

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \{p + q \mid p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}\} = \{q + p \mid q \in \mathcal{Q}, p \in \mathcal{P}\} = \mathcal{Q} + \mathcal{P}.$$

□

Irodalomjegyzék

- [1] András Sz., Szilágyi Zs., *Geometria II.*, Státus kiadó, Csíkszereda, 2006.
- [2] Armstrong, M. A., *Groups and Symmetry*, 1988.
- [3] Artin, E., *Geometric Algebra*, Interscience, 1957.
- [4] Bennet, M. K., *Affine and Projective Geometry*, Wiley, 1995.
- [5] Benson, R. *Euclidean Geometry & Convexity*, McGraw, 1966.
- [6] Berger, M., *Geometry I.*, Springer, 2009.
- [7] Berger, M., *Geometry II.*, Springer, 2009.
- [8] Berger, M., Pansu, P., Berry, J.-P., Saint-Raymond, X., *Problems in Geometry*, Springer, 1984.
- [9] Delode, C., *Géométrie Affine et Euclidienne au Capes*, Dunod, 2006.
- [10] László, T., Marcus, A., Szántó, Cs., *Lineáris algebra*, Kolozsvári Egyetemi Kiadó, 2021.
- [11] Martin, G. E., *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*, Springer, 1982.
- [12] Matoušek, J., *Using Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Springer, 2008.
- [14] Mezei I., Varga Cs., *Analitikus mértan*, Egyetemi Könyvkiadó, Kolozsvár, 2010.
- [15] Radó F., Orbán B., Groze, V., Vasiu, A. *Culegere de probleme de geometrie*, Cluj-Napoca, 1979.
- [16] Reimann, I., *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999.
- [17] Snapper, E., Troyer, R. J., *Metric affine geometry*, Elsevier, 2014.



ISBN: 978-606-37-1832-8